فصل ۴: حل مسائل الاستیسیته

چنان‌چه گفته شد، حل مسائل الاستیسیته یا برای پیش‌بینی حرکت یک جسم جامد تحت نیروهای اعمال شده است و یا پیدا کردن تغییر شکل جسم جامد در حالت تعادل. نیروهای اعمالی یا نیروهای سطح هستند که توسط تماس مستقیم اعمال می‌شوند و یا نیروهای بدنی هستند که با فاصله اعمال می‌شوند. معادلات عمده به طور اختصار چنین است:

۱) معادلات تعادل (نوع اول):

$$\sigma_{ij,i} + f_j = o \ \ (= \rho \ddot{u}_j)$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

۲) رابطه تنش و کرنش(نوع دوم):

$$2G \ \varepsilon_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$
$$\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$$

۳) رابطه کرنش و تغییرشکل (نوع سوم):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

بنابراین تعداد معادلات و مجهولات در مسائل الاستیسیته چنین می‌باشد:

تعداد معادلات	تعداد مجهولات
۳ معادله از نوع اول	۶ مجهول σ_{ij}
۶ معادله از نوع دوم	۶ مجهول ε_{ij}
۶ معادله از نوع سوم	۳ مجهول u_i
۱۵	۱۵

بنابراین به صورت نظری مسائل الاستیسیته باید از نظر ریاضی قابل حل باشند. به‌دلیل وجود معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی[1] (حدی) برای حل مسائل نیاز است:

$$S_j^{(n)} = \sigma_{ij} n_i$$
$$u_i = u_i^o$$

در بعضی از مواقع ممکن است شرایط اولیه نیز نیاز باشد.

[1] Boundary Condition

به طور کلی دو روش کلی برای حل مسائل الاستیسیته وجود دارد.

۱) با استفاده از معادلات نوع دوم و سوم، تنش‌ها به شکل تابعی از تغییرشکل‌ها به‌دست می‌آیند. جانمایی آنها در معادلات نوع اول، معادلات دیفرانسیلی از تغییرشکل‌ها را نتیجه می‌دهد. این روش برای مواقعی که $\ddot{u}$ صفر نیست، الزامی است. در این روش ممکن است شرایط مرزی لازم باشد.

۲) هنگامی که عبارات اینرسی وجود ندارند (یعنی $\ddot{u}$ صفر است) و شرایط مرزی با تنش‌ها داده شده‌اند، تنش‌ها را می‌توان از معادلات نوع اول به‌دست آورد. سپس با استفاده از معادلات نوع دوم کرنش‌ها به‌دست می‌آیند. در این روش باید از روابط سازگاری برای مطمئن شدن این‌که کرنش‌های واقعی به‌دست آمده‌اند، استفاده نمود. تغییر شکل‌ها از معادلات نوع سوم به‌دست می‌آیند.

برای ساده کردن راه‌حل‌های الاستیسیته ایزوتراپیکی، از تعدادی از روش‌های غیرمستقیم و شبه معکوس مانند روش‌های پتانسیلی استفاده می‌شود. پتانسیل‌هایی که به تغییرشکل مربوط می‌شود، پتانسیل‌های مقداری و برداری مانند بردارهای گلرکین[۱] و توابع پاپکوییچ-نیوبر[۲] هستند. پتانسیل‌هایی که سیستم تنش‌های متعادل را به‌وجود می‌آورند، تابع تنش ایری[۳] و توابع تنش ماکسول-موررا[۴] می‌باشند.

معادلات ناویر[۵]:

ناویر معادلات تعادل را بر حسب تغییرشکل داده است

$$(\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} + f_i = 0$$

$$(\lambda + G)\overline{\nabla}(\overline{\nabla}.\bar{u}) + G\nabla^2 u + \bar{f} = 0$$

که در تکالیف است و به‌دست آورید.

تئوری هلمهولز

برای هر میدان برداری $\bar{u}(x_i)$ می‌توان رابطه زیر را نوشت

$$\bar{u} = grad\ \emptyset + curl\ \bar{\psi}$$
$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\delta_j\psi_k$$

که در اینجا $\emptyset$ پتانسیل اسکالر و $\bar{\psi}$ پتانسیل برداری و $\bar{u}$ میدان برداری می‌باشند.

[1] Galerkin
[2] Papkovich-Neuber
[3] Airy Stress Function
[4] Maxwell-Morera
[5] Navier Equations

پتانسیل کرنشی لایم

فرض کنید در تئوری هلمهولز، $\bar{\psi}$ صفر شود.

$$2G\bar{u} = grad\ \phi \qquad \text{یا} \qquad \nabla^2\phi = 0$$

$$2Gu_i = \phi_{,i}$$

که در اینجا ϕ پتانسیل کرنشی لایم نامیده می‌شود.

بردار گلرکین

در تئوری هلمهولز، اگر

$$\psi_k = -2(1-\nu)e_{klm}F_{m,l}$$

$$2Gu_i = 2(1-\nu)\ F_{i,jj} - F_{j,ji}$$

$$2G\bar{u} = 2(1-\nu)\ \nabla^2\bar{F} - grad(div\ \bar{F})$$

که در اینجا F_i بردار گلرکین است و اگر نیروی بدنی f_i صفرباشد، یک تابع بای‌هارمونیک می‌شود

$$\nabla^2\nabla^2\ F_i = \frac{-f_i}{(1-\nu)} = 0$$

هنگامی که بردارهای گلرکین جابه‌جایی‌های یکسان را تعریف کنند، باید با هم برابر باشند.

تابع کرنش لاو (لاوی)

هنگامی که بردار گلرکین فقط یک مؤلفه غیر صفر داشته باشد، مثلاً $F_3 = \bar{F}.\bar{e}_3$، این مؤلفه تابع کرنش لاو نامیده می‌شود و چنین نشان داده می‌شود.

F_3=Z

پتانسیل‌های پاپکویچ-نیوبر

$$2G\bar{u} = 4(1-\nu)\ \bar{F} - grad(r.\bar{\phi} + \bar{\phi}_0)$$

$$2Gu_i = 4(1-\nu)\ \phi_i - \partial_i\big(x_j\phi_j - \phi_0\big)$$

$$\nabla^2\ \phi_i = 0 \qquad\qquad \nabla^2\ \phi_0 = 0$$

توجه داشته باشید که انتخاب ضرایب برای $\bar{\phi}$ یگانه و منحصر به فرد نیست.

یادآوری

$$\nabla\phi = grad\ \phi = \partial_i\phi \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$div\ \bar{V} = \bar{\nabla}.\bar{V} = \partial_i V_i = V_{i,i} \qquad \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$curl\ \bar{V} = \bar{\nabla}\times\bar{V} = e_{ijk}\partial_j V_R = e_{ijk}V_{k,j} \qquad \frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_y}{\partial x}+\frac{\partial V_z}{\partial y}$$

$$\nabla^2\phi = \bar{\nabla}.\bar{\nabla}\phi = \partial_{ii}\phi = \phi_{,ii}$$

حل‌های اساسی با استفاده از توابع هارمونیک

الف) راه حل A

اگر تابع پتانسیل یک تابع هارمونیک باشد $(\nabla^2 F = 0)$، می‌توان به‌صورت زیر از آن برای به‌دست آوردن میدان تنش و کرنش استفاده نمود:

$$2G(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

$$\varepsilon = \bar{V}.\bar{u} = \partial_i u = 0$$

اگر	$2Gu_i = F_{,i}$	$\Longrightarrow 2G\bar{u} = grad\ F$	
یعنی	$2Gu_x = \frac{\partial F}{\partial x}$	$2Gu_y = \frac{\partial F}{\partial y}$	$2Gu_z = \frac{\partial F}{\partial z}$
میدان کرنش	$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$
	$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\right]$	$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}$	$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}$
میدان تنش	$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\sigma_{zz} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$
	$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}$	$\sigma_{yz} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}$	$\sigma_{xz} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}$

ب) راه حل B **(با استفاده از تابع کرنش لاو)**

$$2G(u_x, u_y, u_z) = z\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)Z - [0,0,(3-4\nu)Z]$$

$\nabla^2 Z = 0$ $\qquad\qquad$ $G\varepsilon = -(1-2\nu)\dfrac{\partial Z}{\partial z}$

پس $\quad 2G(u_i) = zZ_{,i} - (3-4\nu)\dfrac{\partial z}{x_{,i}}$

یا $\quad 2G\bar{u} = z\ grad\ Z - (3-4\nu)Z\ grad\ z$

در مختصات (x, y, z):

$$\sigma_{xx} = z\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - 2\nu\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$\sigma_{yy} = z\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 2\nu\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$\sigma_{zz} = z\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - 2(1-\nu)\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$\sigma_{xy} = z\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$$
$$\sigma_{yz} = z\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial z} - (1-2\nu)\frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\sigma_{zx} = z\frac{\partial^2 Z}{\partial z\partial x} - (1-2\nu)\frac{\partial Z}{\partial x}$$

ج) راه حل C:

$$2G(u_x, u_y, u_z) = x\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)X - [(3-4\nu)X, 0,0]$$

$\nabla^2 X = 0$ $\qquad\qquad$ $G\varepsilon = -(1-2\nu)\dfrac{\partial X}{\partial x}$

پس $\quad 2G(u_i) = xX_{,i} - (3-4\nu)X_{x,i}$

یا $\quad 2G\bar{u} = x\ grad\ X - (3-4\nu)X\ grad\ x$

د) راه حل D:

$$2G(u_x, u_y, u_z) = y\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)Y - [0, (3-4\nu)Y, 0]$$

$\nabla^2 Y = 0$ $\qquad$ $G\varepsilon = -(1-2\nu)\dfrac{\partial Y}{\partial y}$

پس $\quad 2G(u_i) = yY_{,i} - (3-4\nu)Y_{y,i}$

یا $\quad 2G\bar{u} = y\ grad\ Y - (3-4\nu)Y\ grad\ y$

د) راه حل E:

$$G(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}, 0\right)$$

$\nabla^2\psi = 0$ $\qquad$ $\varepsilon = 0$

پس $\quad G(u_i) = e_{ijk}\partial_j\psi$

یا $\quad G\bar{u} = \bar{\nabla}\psi$

در مختصات (x, y, z):

$$\sigma_{xx} = 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \qquad \sigma_{yz} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \qquad \sigma_{yx} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \qquad \sigma_{xy} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

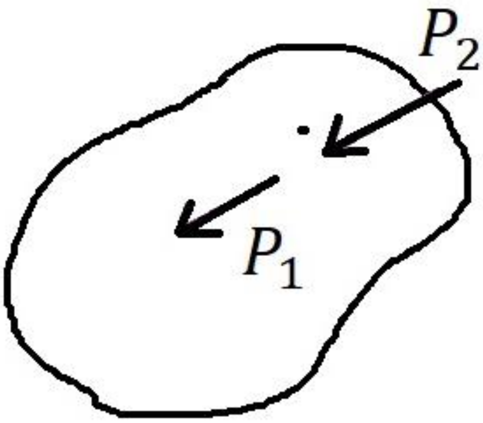
در مختصات (r, θ, z):

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{r^2}\left[r\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] \qquad \sigma_{\theta z} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial z}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} \qquad \sigma_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial z}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \qquad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]$$

اصل سوپرپوزیسون[۱]



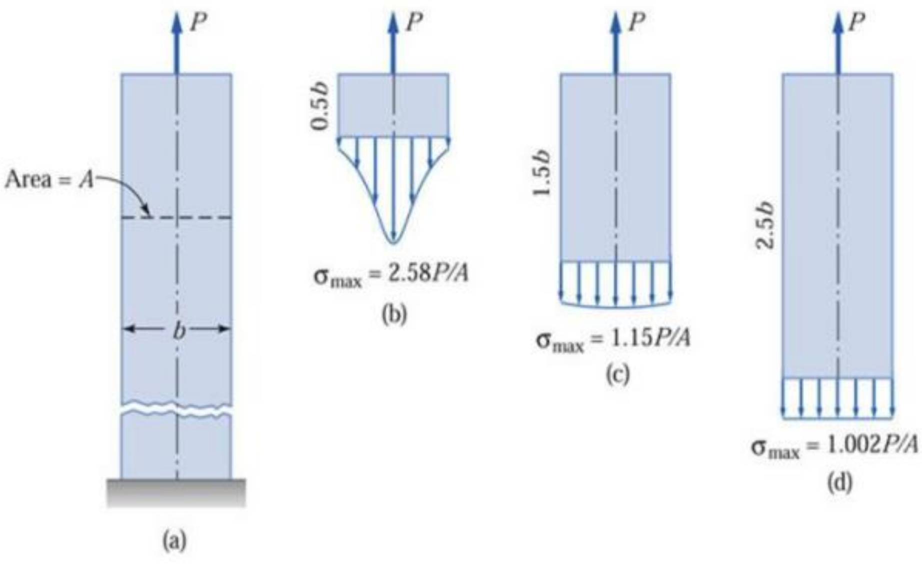
اگر P_1 و P_2 نیروهایی باشند که در یک نقطه اعمال می‌شوند، پس برایند جابه‌جایی برابر با مجموع جابه‌جایی که نیروی P_1 ایجاد کرده و جابه‌جایی که نیروی P_2 ایجاد کرده خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت که:

$$u_i = a_{ij}P_j \qquad i,j = 1,2,3$$

که a_{ij} مستقل از P_j است، صرف‌نظر از این‌که کدام P_j اول اعمال شده است.

اصل سینت ونانت[۲]

میدان تنش و کرنش ایجاد شده توسط سیستم نیروهایی که استاتیکی برابر نیروی صفر و گشتاور صفر باشند، در فاصله‌ای دور از محل اعمال آن‌ها قابل اغماض است.



در نتیجه صرف‌نظر از نحوه بارگذاری، در فاصله دور از محل بارگذاری تنش‌ها و کرنش‌ها یکنواخت خواهد بود.

---
[1] Principle of Superposition
[2] Saint Venant’s Principle