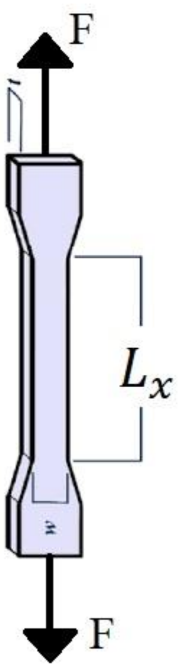
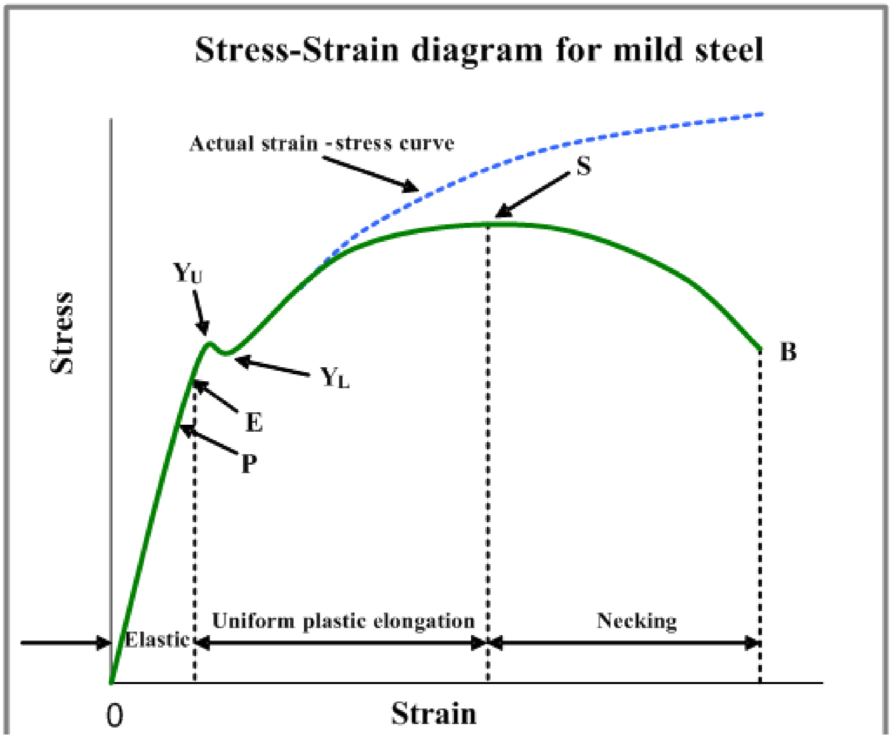
فصل ۳: رابطه تنش و کرنش

آزمون کشش ساده

آزمون کشش یکی از آزمون‌های مخرب است که نمونه تحت نیروی کششی تک‌بعدی تا نقطه شکست قرار می‌گیرد و این درحالیست که ازدیاد طول نیز به‌صورت همزمان با نیروی اعمالی (بار اعمالی) ثبت می‌شود. نتایج حاصل از آزمون به‌طور معمول برای انتخاب یک ماده به منظور کنترل کیفیت و پیش‌بینی این‌که چگونه یک ماده تحت انواع دیگری از نیروها واکنش نشان می‌دهد به‌کار می‌رود. منحنی تنش-کرنش مهندسی براساس مقادیر نیرو اعمالی-ازدیاد طول رسم می‌شود بنابراین خروجی آزمون یک منحنی تنش/کرنش می‌باشد که نشان‌دهنده رفتار ماده تحت کشش است.



نمونه تحت بارگذاری کشش ساده



نمودار تنش-کرنش در بارگذاری کشش ساده

داده‌های بدست آمده در این آزمون برای تعیین خواص مکانیکی ماده استفاده می‌شود و کمیت‌ها زیر به‌دست می‌آیند:

- تنش تسلیم
- استحکام کششی یا استحکام نهایی کشش
- داکتیلیتی یا میزان قابلیت تغییر فرم پلاستیک

- مدول الاستیسیته یا مدول یانگ
- چقرمگی

رابطه تنش و کرنش

قانون عمومی هوک[1] رابطه تنش و کرنش را خطی تعریف می‌کند. در آزمون کشش برای بارگذاری کششی:

E مدول الاستیسیته (مدول یانگ[2])

$\nu \leq \frac{1}{2}$ ضریب پواسون

$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ مدول برشی[3] (مدول صلبیت)

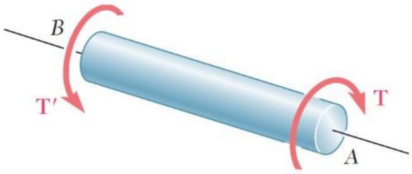
λ ثابت لایم[4]

K مدول حجمی[5]

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A}$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx}$$

برای بارگذاری پیچشی:

$$\gamma_{zy} = \frac{\sigma_{zy}}{G}$$



$[\tilde{\sigma}]$ و $[\tilde{\varepsilon}]$ دو تانسور درجه دو هستند پس رابطه خطی آن‌ها فقط بدین صورت ممکن است:

$$i,j,k,l = 1,2,3 \qquad \varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl}$$

به‌واسطه متقارن بودن $[\tilde{\sigma}]$ و $[\tilde{\varepsilon}]$ می‌توانیم بنویسیم که:

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$$

به‌عنوان مثال:

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}\sigma_{11} + A_{1112}\sigma_{12} + A_{1113}\sigma_{13} + A_{1121}\sigma_{21} + A_{1122}\sigma_{22} + A_{1123}\sigma_{23} + A_{1131}\sigma_{31} + A_{1132}\sigma_{32} + A_{1133}\sigma_{33}$$

$[A_{ijkl}]$ را ماتریس سختی[6] می‌نامیم. در یک رابطه معکوس داریم که:

---

[1] Generalized Hook’s Law
[2] Young Modulus
[3] Shear Modulus
[4] Lame
[5] Bulk Modulus
[6] Stiffness Matrix

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

که $[C_{ijkl}]$ را ماتریس نرمی[1] می‌نامیم.

به‌طور کلی برای مسائل سه‌بعدی

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$$

$$\sigma_{ij} = 2G\left[\varepsilon_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right] = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

در مختصات کارتزین

$$2G\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - 3\left[\frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma$$

$$2G\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} - 3\left[\frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma$$

$$2G\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - 3\left[\frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma$$

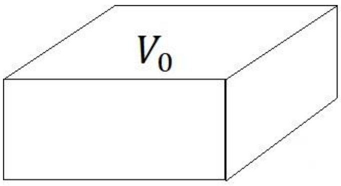
$$2G\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}$$

$$2G\varepsilon_{yz} = \sigma_{yz}$$

$$2G\varepsilon_{zx} = \sigma_{zx}$$

که در اینجا $\sigma = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{3}$ می‌باشد.

مدول حجمی



$V_0 =$ حجم اولیه $= 1$

بعد از تغییرشکل

[1] Compliance Matrix

$$V = V_0(1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz}) = V_0\{1 + (\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}) + \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

در مورد فشار هیدرواستاتیکی

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1-2\nu}{E}(-3P) = \frac{-P}{K} \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

جدول: روابط بین ثابت‌های الاستیک یک جسم همگن همسانگرد

	λ	μ	E	ν	K
λ, μ	-	-	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$
λ, E	-	$\frac{(E-3\lambda)+A^*}{4}$	-	$\frac{-(E+\lambda)+A^*}{4\lambda}$	$\frac{3(\lambda+E)+A^*}{6}$
λ, ν	-	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	-	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$
λ, K	-	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	-
μ, E	$\frac{\mu(2\mu-E)}{E-3\mu}$	-	-	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$
μ, ν	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	-	$2\nu(1+\nu)$	-	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
μ, K	$\frac{3K-2\mu}{3}$	-	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	-
E, ν	$\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	-	-	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E, K	$\frac{3K(3-E)}{9K-E}$	$\frac{3EK}{9K-E}$	-	$\frac{3K-E}{6K}$	-
ν, K	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1-2\nu)$	-	-
$A^* = \sqrt{(E-3\lambda)^2 + 8E\lambda}$					

روابط سازگاری[1]

روابط سازگاری در مختصات کارتزین:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_{xx}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_{yy}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\gamma_{xy})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}$$

روابط سازگاری برحسب کرنش‌ها در مختصات کارتزین:

برای حالت سه‌بعدی می‌توان نوشت که:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ki} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

روابط سازگاری در مختصات قطبی

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial z \partial r}$$

---

[1] Compatibility Conditions

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial r}=\frac{2}{r}\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta z}}{\partial z\partial\theta}+\frac{\partial\varepsilon_{\theta z}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r}=2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_{r\theta}}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zr}}{\partial\theta}+\frac{\partial\varepsilon_{\theta z}}{\partial r}-\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial z}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{\theta z}}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\theta\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zr}}{\partial\theta}-\frac{\partial\varepsilon_{\theta z}}{\partial r}+\frac{\partial\varepsilon_{\theta r}}{\partial z}\right]-\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta z}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varepsilon_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zr}}{\partial\theta}+\frac{\partial\varepsilon_{\theta z}}{\partial r}+\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial z}\right]$$

روابط سازگاری را می‌توان با تنش‌ها نیز تعریف کرد. به‌عنوان مثال:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}$$

با استفاده از روابط هوک:

$$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{yy}-\nu\sigma\right]$$
$$\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{zz}-\nu\sigma\right] \qquad \sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$$
$$\gamma_{yz}=\frac{2(1+\nu)\sigma_{yz}}{E}=\frac{\sigma_{yz}}{G}$$
$$\Rightarrow (1+\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial y^2}\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\right)=2(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_{yz}}{\partial y\partial z} \qquad (۱)$$

با استفاده از معادلات تعادل:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+f_x=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+f_y=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+f_z=0$$

برای $\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}$ از معادله اول حل نموده و در جهت z مشتق می‌گیریم و همچنین برای $\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}$ از معادله دوم حل نموده و در جهت y مشتق می‌گیریم و سپس هر دو را با هم جمع می‌کنیم.

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)}_{\text{از معادله اول تعادل: } \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial f_x}{\partial x}} - \frac{\partial f_z}{\partial z} - \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

در معادله (۱) می‌گذاریم و ساده می‌کنیم.

$$\therefore\ \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial f_x}{\partial x}$$

اگر نیروهای بدنی صفرباشند یا ثابت باشند.

$$(1+\nu)\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0 \qquad (1+\nu)\nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} = 0$$

$$(1+\nu)\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0 \qquad (1+\nu)\nabla^2 \sigma_{xz} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} = 0$$

$$(1+\nu)\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0 \qquad (1+\nu)\nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = 0$$