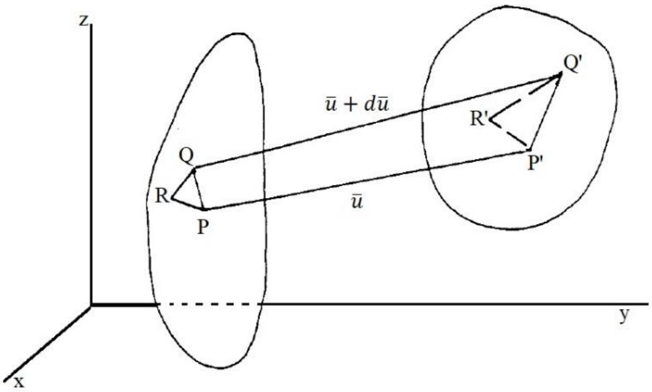
فصل ۲: تحلیل کرنش

هنگامی که ماده تحت نیروهای سطح، نیروهای بدنی، تغییر دما، تغییر رطوبت و دیگر تغییرات محیط است، هر ذره‌ای و یا هر نقطه از ماده را باعث می‌شود تا مکان جدیدی را اشغال کند. بردار مکانی از نقطه P تا P' را جابه‌جایی نقطه P می‌نامند. جسم مادی یا جامد به شکل جدیدی انگاشت شده است.



جابه‌جایی از دو قسمت تشکیل شده است:

۱) جابه‌جایی جسم صلب[1]: منجر به حرکت جسم صلب می‌شود.

۲) خیز (دگردیسی[2]): شامل تغییرات در اندازه و شکل جسم جامد می‌شود که به‌ترتیب توسط کرنش عمودی و کرنش برشی اندازه‌گیری می‌شود.

در شکل بالا مثلث PQR و مثلث P'Q'R' را در نظر بگیرید. مثلث PQR گفته می‌شود که دگردیس شده است (خیز برداشته است).

جابه‌جایی: $\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$

دگردیسی (خیز): $d\bar{u} = d\bar{u}(x, y, z, t)$

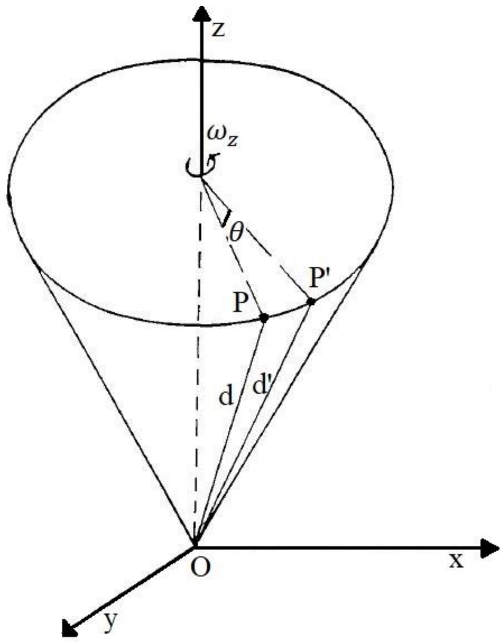
جابه‌جایی خطی جسم صلب[3]:

جابه‌جایی خطی جسم صلب را با $\bar{u}$ یا با $\bar{d}$ نشان داده می‌شود. بنابراین $u_i = d_i = \left(d_x, d_y, d_z\right)$

[1] Rigid body displacement
[2] Deformation
[3] Rigid body linear displacement

که در اینجا $\bar{u}$ جابه‌جایی است و (d_x, d_y, d_z) مؤلفه‌های آن هستند.

چرخش جسم صلب[1]:



چرخش جسم صلب روبرو را حول محور z را در نظر بگیرید:

$$d'_x = \cos\theta\, d_x - \sin\theta\, d_y$$
$$d'_y = \sin\theta\, d_x + \cos\theta\, d_y$$
$$d'_z = d_z$$

که d_i و d'_i جابه‌جایی $\overline{OP}$ و $\overline{OP}'$ هستند. تانسور چرخش[2] چنین داده شده است:

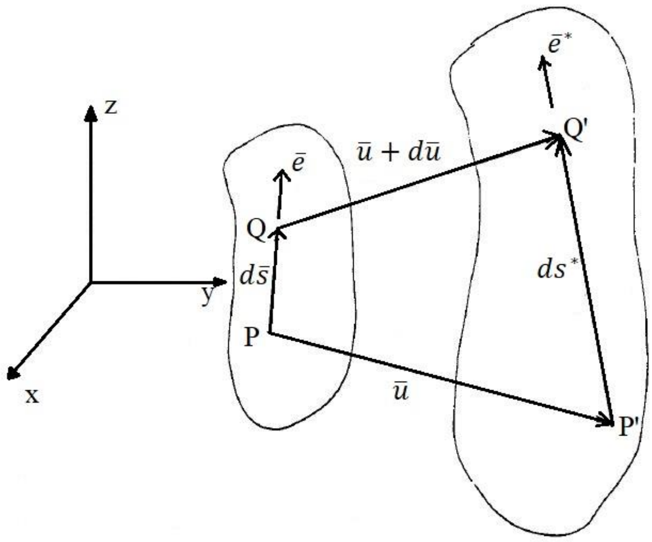
$$[\tilde{\omega}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و رابطه آن با بردار چرخش بدین صورت است:

$$\bar{\omega} = \bar{\Delta} \times \tilde{\omega} \qquad \text{یا} \qquad \omega_k = e_{ijk}\, \omega_{ij}$$

[1] Rigid body rotation
[2] Rotation Tensor

دگردیسی[1] (خیز)



جابه‌جایی دو نقطه مجاور P و Q را در نظر بگیرید. اگر آن‌ها فقط جابه‌جایی جسم صلب را داشتند، P و Q هر دو جابه‌جایی $\bar{u}$ را داشتند و $d\bar{u}$ صفر می‌شد. پس بنابراین، خیز توسط $d\bar{u}$ اندازه‌گیری می‌شود و باعث تغییر در طول‌ها و زوایا در نزدیکی نقطه P می‌شود. تغییرات کوچک در جابه‌جایی در نزدیکی نقطه P چنین نوشته می‌شود.

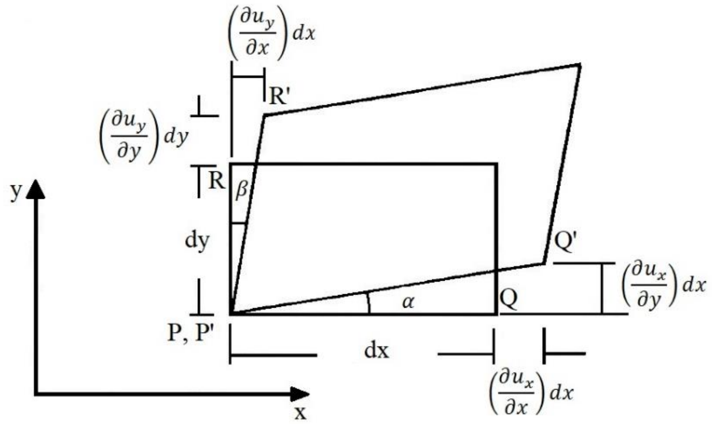
$$du_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)dz$$
$$du_y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dz$$
$$du_z = \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)dz$$

$$d\bar{u} = \left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)\bullet d\bar{x} \qquad \Rightarrow \qquad du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dx_j$$

حالت کرنش در یک نقطه (کرنش‌های کوچک)[2]

کرنش‌ها اندازه‌گیری‌های تغییرات در اندازه و شکل هستند. تعریف مهندسی کرنش چنین است:

[1] Deformation
[2] State of strain at a point (small strain)



$\varepsilon=$کرنش عمودی

$\gamma=$کرنش برشی

$$\varepsilon_{ii}=\frac{\text{change in length}}{\text{initial length}}=\frac{\Delta L_i}{L_i}=\frac{\partial u_i/\partial x_i}{dx_i}dx_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\gamma_{ji}=change\,in\,right\,angle\,(average)=\alpha+\beta=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

با فرض اینکه α و β کوچک باشند، می‌توان نوشت که:

$$\varepsilon_{xx}=\lim_{|PQ|\to 0}\frac{|P'Q'|-|PQ|}{|PQ|}=\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}=\lim_{|PR|\to 0}\frac{|P'R'|-|PR|}{|PR|}=\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta=\langle R'P'Q'-\langle RPQ=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=2\varepsilon_{xy}=2\varepsilon_{yx}$$

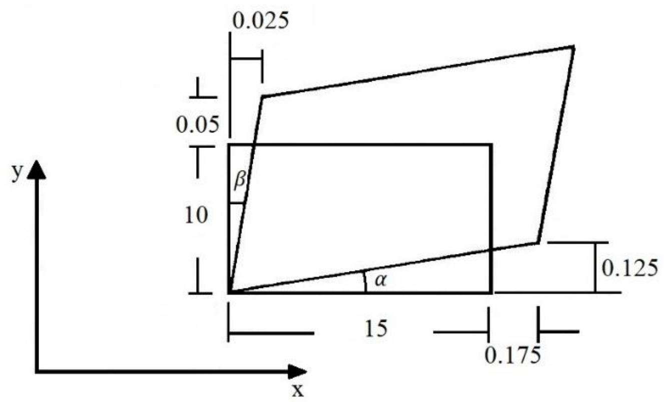
در اینجا فرض شده است که $\tan\alpha\approx\alpha$ و $\tan\beta\approx\beta$. توجه داشته باشید که γ_{xy} در x و y متقارن است. این یعنی که یک مستطیل همیشه به یک لوزی تغییر می‌کند. وقتی جهت z را نیز در نظر بگیریم، در نزدیکی نقطه P داریم که:

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx}=\gamma_{xz}=\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}=2\varepsilon_{xz}=2\varepsilon_{zx}$$

$$\gamma_{zy}=\gamma_{yz}=\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}=2\varepsilon_{yz}=2\varepsilon_{zy}$$

مثال: مطلوب است یافتن ε_{xx}، ε_{yy} و γ_{xy}.



$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{0.175}{15}=0.0117$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{0.05}{10}=0.005$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{0.025}{10}+\frac{0.125}{15}=0.0025+0.0083=0.01083$$

تانسور کرنش[1] شکل زیر را داراست:

$$\overline{U}=u_x\cdot\overline{e_x}+u_y\cdot\overline{e_y}+u_z\cdot\overline{e_z}$$

۱. در مختصات دکارتی:

$$\left[\tilde{\varepsilon}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

$$\overline{U}=u_r\cdot\overline{e_r}+u_\theta\cdot\overline{e_\theta}+u_z\cdot\overline{e_z}$$

۲. در مختصات قطبی:

$$\left[\tilde{\varepsilon}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz}\\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z}\\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

$$\overline{U}=u_R\cdot\overline{e_R}+u_\theta\cdot\overline{e_\theta}+u_\varphi\cdot\overline{e_\varphi}$$

۳. در مختصات کروی:

$$\left[\tilde{\varepsilon}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{RR} & \varepsilon_{R\theta} & \varepsilon_{R\varphi}\\ \varepsilon_{\theta R} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\varphi}\\ \varepsilon_{\varphi R} & \varepsilon_{\varphi\theta} & \varepsilon_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}$$

[1] Strain Tensor

مؤلفه‌های کرنش شامل قسمت‌های متقارن گرادیان جابه‌جایی هستند. اگر جابه‌جایی را به دو قسمت متقارن[1] و متقارن اریب[2] تقسیم کنیم:

$$du_i = \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j$$

که در اینجا:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i}\right] = StrainTensor = \varepsilon_{ji} \qquad symmetric$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} - u_{j,i}\right] = RotationTensor = -\omega_{ji} \qquad skew-symmetric$$

در کل رابطه کرنش و جابه‌جایی را می‌توان چنین نوشت:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\bar{e}\cdot\left[\left(\bar{\nabla}\bar{u} + \bar{u}\bar{\nabla}\right)\cdot\bar{e} + \left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)\left(\bar{\nabla}\bar{u}\right)\cdot\bar{e}\right]$$

یا

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right]$$

رابطه کرنش و جابه‌جایی در مختصات کارتزین (x، y و z):

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{x,x}\right)^2 + \left(u_{y,x}\right)^2 + \left(u_{z,x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y,y} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{x,y}\right)^2 + \left(u_{y,y}\right)^2 + \left(u_{z,y}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = u_{z,z} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{x,z}\right)^2 + \left(u_{y,z}\right)^2 + \left(u_{z,z}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[u_{x,y} + u_{y,x} + \left(u_{x,x}u_{x,y}\right) + \left(u_{y,x}u_{y,y}\right) + \left(u_{z,x}u_{z,y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[u_{y,z} + u_{z,y} + \left(u_{x,y}u_{x,z}\right) + \left(u_{y,y}u_{y,z}\right) + \left(u_{z,y}u_{z,z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left[u_{z,x} + u_{x,z} + \left(u_{x,x}u_{x,z}\right) + \left(u_{y,x}u_{y,z}\right) + \left(u_{z,x}u_{z,z}\right)\right]$$

---
[1] Symmetric
[2] Skew-Symmetric

رابطه کرنش و جابه‌جایی در مختصات قطبی یا استوانه‌ای (r, θ و z):

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{r,r}\right)^2 + \left(u_{\theta,r}\right)^2 + \left(u_{z,r}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} - \frac{u_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_{z,\theta}}{r}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = u_{r,z} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{r,z}\right)^2 + \left(u_{\theta,z}\right)^2 + \left(u_{z,z}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} + u_{r,r}\left(\frac{u_{r,\theta}}{r} - \frac{u_\theta}{r}\right) + u_{\theta,r}\left(\frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}\right)^2 \right.$$
$$\left. + u_{z,r}\left(\frac{u_{z,\theta}}{r}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left[u_{\theta,z} + \frac{u_{z,\theta}}{r} + \frac{u_{r,z}}{r}\left(u_{r,\theta} - u_\theta\right) + \frac{u_{\theta,z}}{r}\left(u_{\theta,\theta} + u_r\right) + \frac{\left(u_{z,z}u_{z,\theta}\right)}{r}\right]$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left[u_{r,z} + u_{z,r} + \left(u_{r,r}u_{r,z}\right) + \left(u_{\theta,r}u_{\theta,z}\right) + \left(u_{z,r}u_{z,z}\right)\right]$$

رابطه کرنش و جابه‌جایی در مختصات کروی ((R, θ و ∅):

$$\varepsilon_{RR} = u_{R,R} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{R,R}\right)^2 + \left(u_{\emptyset,R}\right)^2 + \left(u_{\theta,R}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{R\sin\emptyset} + \frac{u_R}{R} + \frac{u_\emptyset\cot\emptyset}{R} + \frac{\left[\left(\frac{u_{R,\theta}}{R} - \frac{u_\theta\sin\emptyset}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{\emptyset,\theta}}{R} - \frac{u_\theta\cos\emptyset}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{\theta,\theta}}{R} + \frac{u_R\sin\emptyset}{R} + \frac{u_\emptyset\cos\emptyset}{R}\right)^2\right]}{\sin^2\emptyset}$$

$$\varepsilon_{\emptyset\emptyset} = \frac{u_{\emptyset,\emptyset}}{R} + \frac{u_R}{R} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_{R,\emptyset}}{R} - \frac{u_\emptyset}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{\emptyset,\emptyset}}{R} + \frac{u_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{\theta,\emptyset}}{R}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{R\theta} = \frac{1}{2}\left\{u_{\theta,R} + \frac{u_{R,\theta}}{R\sin\emptyset} - \frac{u_\theta}{R} + \right.$$
$$\left. \frac{\left[u_{R,R}\left(u_{R,\theta} - u_\theta\sin\emptyset\right) + u_{\emptyset,R}\left(u_{\emptyset,\theta} - u_\theta\cos\emptyset\right) + u_{\theta,R}\left(u_{\theta,\theta} + u_R\sin\emptyset + u_\emptyset\cos\emptyset\right)\right]}{R\sin\emptyset}\right\}$$

$$\varepsilon_{\theta\emptyset} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{\emptyset,\theta}}{R\sin\emptyset} - \frac{u_\theta\cot\theta}{R} + \frac{u_{\theta,\emptyset}}{R} + \right.$$
$$\left. \frac{\left[\left(u_{R,\emptyset} - u_\emptyset\right)\left(u_{R,\theta} - u_\theta\sin\emptyset\right) + \left(u_{\emptyset,\emptyset} + u_R\right)\left(u_{\emptyset,\theta} - u_\theta\cot\emptyset\right) + \left(u_{\theta,\emptyset}\right)\left(u_{\theta,\theta} + u_R\sin\emptyset + u_\emptyset\cos\emptyset\right)\right]}{R\sin\emptyset}\right\}$$

$$\varepsilon_{\emptyset R} = \frac{1}{2}\left\{u_{\emptyset,R} + \frac{\left[-u_\emptyset + u_{R,\emptyset} + u_{R,R}\left(u_{R,\emptyset} - u_\emptyset\right) + u_{\emptyset,R}\left(u_{\emptyset,\emptyset} + u_R\right) + u_{\theta,R}\left(u_{\theta,\emptyset}\right)\right]}{R}\right\}$$

جهات اصلی کرنش

برای کرنش نیز هماند تنش می‌توان جهات و مقادیر کرنش‌های اصلی را چنین به‌دست آورد:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}-\varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}-\varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

که معادله مشخصه آن:

$$\Rightarrow \varepsilon^3 - I_\varepsilon \varepsilon^2 + II_\varepsilon \varepsilon - III_\varepsilon = 0$$

که ریشه‌های $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ به‌دست آمده همان کرنش‌های اصلی هستند. در اینجا $I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon$ ضرایب ثابت تانسور کرنش[1] می‌باشند و بدین گونه داده شده‌اند:

$$I_\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$II_\varepsilon = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_{yz}^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$III_\varepsilon = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

جهات کرنش‌های اصلی را می‌توان چنین به‌دست آورد:

$$(\varepsilon_{xx} - \varepsilon)n_x + \varepsilon_{yz}n_y + \varepsilon_{zx}n_z = 0$$

$$\varepsilon_{yx}n_x + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)n_y + \varepsilon_{yz}n_z = 0$$

$$\varepsilon_{zx}n_x + \varepsilon_{zy}n_y + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n_z = 0$$

قسمت کروی[2] تانسور کرنش بدین صورت داده شده است:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

ضرایب متغیر تانسور کرنش[3] را با ε_{ij}^* نشان می‌دهیم.

---

[1] Stress Invariants
[2] Spherical Strain
[3] Strain Deviator

$$\varepsilon_{ij}^{*} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{xx}^{*} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon$$

$$\varepsilon_{yy}^{*} = \varepsilon_{yy} - \varepsilon$$

$$\varepsilon_{zz}^{*} = \varepsilon_{zz} - \varepsilon$$

$$\varepsilon_{xy}^{*} = \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{yz}^{*} = \varepsilon_{yz}$$

$$\varepsilon_{zx}^{*} = \varepsilon_{zx}$$

کرنش حجمی[1]: تغییرات در حجم

$$\varepsilon_{V} = \varepsilon_{kk} = I_{\varepsilon}$$

انتقال کرنش:

کرنش یک تانسور مرتبه دو است و برای انتقال از یک مختصات به مختصات دیگر از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد.

$$\varepsilon_{ij}' = a_{ip}a_{jq}\varepsilon_{pq}$$

[1] Volumetric Strain