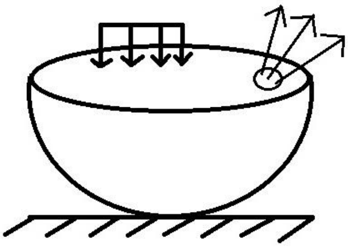
فصل ۱: تئوری الاستیسیته

در مسائل الاستیسیته با دو نوع نیرو سر و کار داریم



۱) نیروهای سطح[1] که توسط تماس مستقیم اعمال می‌شوند مانند فشار و...

۲) نیروهای بدنی[2] یا حجمی که با فاصله‌ای اعمال می‌شوند مانند وزن بر واحد حجم

جابه‌جایی ممکن است معلوم باشد

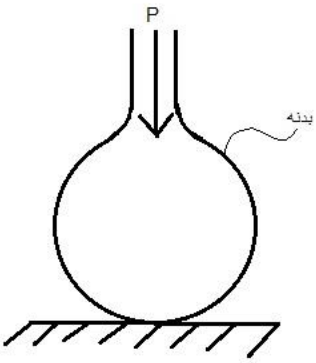
مسئله اصلی الاستیسیته

۱) پیش بینی حرکت = الاستو سینماتیک[3]

۲) پیش بینی جابه‌جایی (خیز) زمانی که جسم در تعادل است = الاستو استاتیک[4]

مدل ساده

۱) یک محیط پیوسته[5]



ماده به‌طور پیوسته در سرتاسر جسم پخش شده است⇐ معادله دیفرانسیل نسبی

۲) خیزهای کوچک:

مثال: اگر جسم بدنه خیلی نرم نباشد، خیز کوچک است و در نتیجه می‌توان حل را بر اساس هندسه اولیه فرموله کرد.

۳) مواد الاستیک خطی[6]

روابط بین تنش و کرنش خطی و مستقل از زمان هستند.

[1] Surface Forces
[2] Body Forces
[3] Elasto-Kinetic
[4] Elasto-Static
[5] A Continuum
[6] Linear Elastic Materials

۴) ایزوتراپی[1]

خواص مستقل از جهت است.

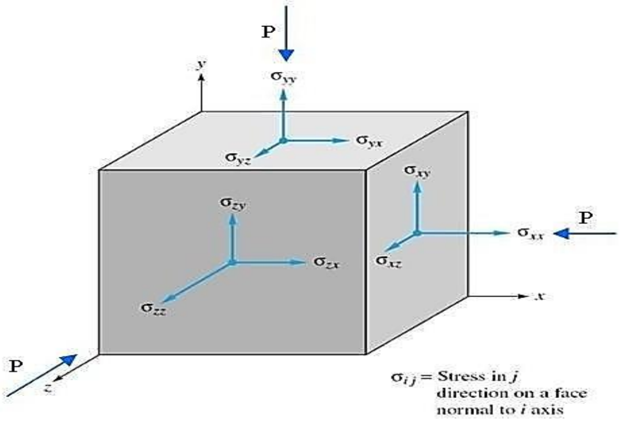
۵) همگونی[2]

هر چقدر هم حجم بسیار کوچک ماده را در نظر بگیریم خواص ماده همان خواهد بود.

تنش

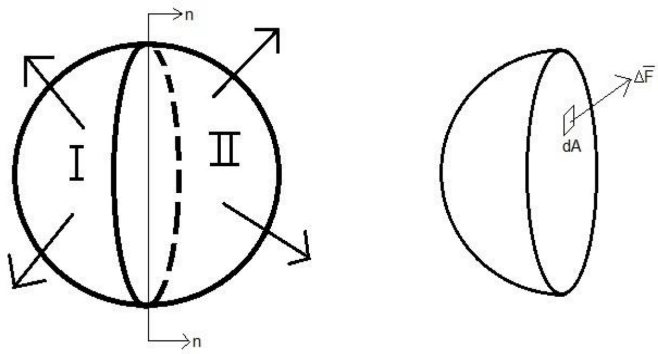
علامت گذاری

تانسور تنش، یک تانسور درجه دو است و لذا مقدار تنش با دو اندیس مشخص می‌شود. اندیس اول صفحه‌ای که تنش بر آن اعمال می‌شود را نشان می‌دهد و اندیس دوم جهت تنش را نشان می‌دهد. بنابراین اگر اندیس‌ها یکسان باشند، تنش عمود بر صفحه و اگر یکسان نباشند موازی صفحه اعمال می‌شود.



تعریف

یک جسم ماده تحت بارگذاری اعمال شده، در تعادل و یا در حرکت را درنظر بگیرید. نیروهای داخلی $\Delta \overline{F}$ در سطوح داخلی که توسط صفحه برش داده شده n-n ایجاد می‌شوند به وجود می‌آیند.



[1] Isotropy
[2] Homogeneity

بر اساس قانون سوم نیوتن نیروها و عکس العمل‌های داخلی هم‌مقدار ولی مخالف در جهت هستند. در یک ماده با ابعاد بی‌نهایت، نیروی داخلی $\Delta\bar{F}$ بر روی مساحت داخلی ΔA نزدیک نقطه داخلی P را تراکشن و یا بردار تنش می‌نامیم.

$$\overline{T}^{(n)} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overline{\Delta F}^{(n)}}{\Delta A}$$

مشخص است که می‌توان کل نیروی $\Delta\bar{F}^{(n)}$ که بر روی مساحت ΔA وارد شده است را به یک مؤلفه عمودی و دو مؤلفه برشی تقسیم کرد. اگر $\bar{n}$ بردار واحد و $\bar{e}_x$، $\bar{e}_y$ و $\bar{e}_z$، بردارهای واحد در جهات x, y, z باشند. پس:

$$\bar{T} = \bar{T}_x . \bar{e}_x + \bar{T}_y . \bar{e}_y + \bar{T}_z . \bar{e}_z$$

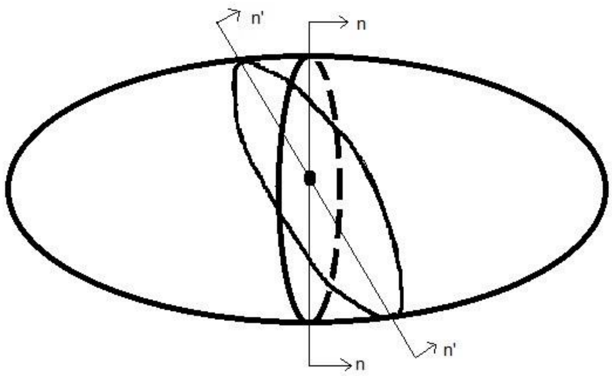
همچنین

$$\overline{T}^{(n)} = -\overline{T}^{(-n)}$$

هنگامی که تراکشن برروی سطوح بسته منجر به نیرو و ممان صفر شود، بردار تنش خودتعادل نامیده می‌شود.

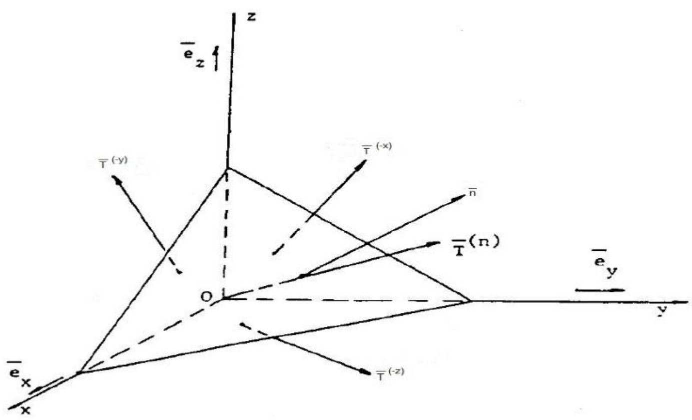
فرمول کاشی (کوشی)[1]

اگر یک صفحه در مقطع $n'-n'$ که از نقطه P می‌گذرد قطع شود، بردار تنش $\overline{T}^{(n')}$ جدیدی به‌دست می‌آید. به نظر می‌آید که بردار تنش به جهت صفحه بریده شده بستگی دارد.



حالا یک تتراهدرون نشان داده شده در شکل با وزن Δm و شتاب $\bar{a}$ در نظر بگیرید.

[1] Cauchy Formula



نیروهای داخلی بر روی هر صفحه برش داده شده به‌صورت $\overline{\Delta F}^{(-x)}$، $\overline{\Delta F}^{(-y)}$، $\overline{\Delta F}^{(-z)}$ و $\overline{\Delta F}^{(n)}$ نشان داده شده است. نمای داخل پرانتز نمایان‌گر بردار عمود بر صفحه برش است. با به کارگیری قانون دوم نیوتن داریم:

$$\overline{\Delta F}^{(n)}+\overline{\Delta F}^{(-x)}+\overline{\Delta F}^{(-y)}+\overline{\Delta F}^{(-z)}+f\,\Delta V=\Delta m\bar{a}$$

$f=$ نیروی بدنی[1]

$$\Delta m=\rho\Delta V$$

$$\Delta V=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=\frac{1}{3}h\Delta A$$

که در این‌جا:

ΔA = مساحت سطح عمود بر بردار $\bar{n}$ است.

h = فاصله عمود از نقطه P تا سطح عمود بر بردار $\bar{n}$ است.

همین‌طور می‌دانیم که

$$\Delta F^{(-x)}=-\Delta F^{(x)}$$

پس

$$\overline{\Delta F}^{(n)}=\overline{\Delta F}^{(x)}+\overline{\Delta F}^{(y)}+\overline{\Delta F}^{(z)}-f\,\Delta V+\frac{1}{3}\rho h\Delta A\bar{a}$$

داریم که:

[1] *Body Force*

$$\Delta A_x = \Delta A \cos(n,x) = \Delta A(\bar{n}.\bar{e}_x)$$

$$\Delta A_y = \Delta A \cos(n,y) = \Delta A(\bar{n}.\bar{e}_y)$$

$$\Delta A_z = \Delta A \cos(n,z) = \Delta A(\bar{n}.\bar{e}_z)$$

دو طرف معادله را بر ΔA تقسیم کرده و در حد $\Delta A \to 0$، در نقطه P، رابطه بین $\bar{T}^{(n)}$ و $\bar{n}$ به‌دست می‌آید.

$$\lim_{\Delta A\to 0} \frac{\overline{\Delta F}^{(n)}}{\Delta A} = \lim_{\Delta A\to 0} \left\{\frac{\overline{\Delta F}^{(x)}(\bar{n}.\bar{e}_x)}{\Delta A_x} + \frac{\overline{\Delta F}^{(y)}(\bar{n}.\bar{e}_y)}{\Delta A_y} + \frac{\overline{\Delta F}^{(z)}(\bar{n}.\bar{e}_z)}{\Delta A_z} - \frac{f\frac{1}{3}\Delta Ah}{\Delta A} + \frac{\rho\frac{1}{3}\Delta Ah\bar{a}}{\Delta A}\right\}$$

$$\Delta A \to 0 \Rightarrow \Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z, h \to 0$$

$$\Rightarrow \bar{T}^{(n)} = \lim_{\Delta A\to 0} \frac{\overline{\Delta F}^{(n)}}{\Delta A} = (\bar{n}.\bar{e}_x)\bar{T}^{(x)} + (\bar{n}.\bar{e}_y)\bar{T}^{(y)} + (\bar{n}.\bar{e}_z)\bar{T}^{(z)}$$

$$\therefore \bar{T}^{(n)} = \bar{n}.[\bar{e}_x\bar{T}^{(x)} + \bar{e}_y\bar{T}^{(y)} + \bar{e}_z\bar{T}^{(z)}] \quad \text{Cauchy Formula}$$

این رابطه به عنوان فرمول کاشی معروف است. اگر تراکشن‌ها را برحسب مؤلفه‌های آن بنویسیم:

$$\bar{T}^{(x)} = \sigma_{xx}\bar{e}_x + \sigma_{xy}\bar{e}_y + \sigma_{xz}\bar{e}_z$$
$$\bar{T}^{(y)} = \sigma_{yx}\bar{e}_x + \sigma_{yy}\bar{e}_y + \sigma_{yz}\bar{e}_z$$
$$\bar{T}^{(z)} = \sigma_{zx}\bar{e}_x + \sigma_{zy}\bar{e}_y + \sigma_{zz}\bar{e}_z$$

$$\bar{T}^{(n)} = \bar{n}.\{\bar{e}_x\sigma_{xx}\bar{e}_x + \bar{e}_x\sigma_{xy}\bar{e}_y + \bar{e}_x\sigma_{xz}\bar{e}_z + \bar{e}_y\sigma_{yx}\bar{e}_x$$
$$+ \bar{e}_y\sigma_{yy}\bar{e}_y + \bar{e}_y\sigma_{yz}\bar{e}_z + \bar{e}_z\sigma_{zx}\bar{e}_x + \bar{e}_z\sigma_{zy}\bar{e}_y + \bar{e}_z\sigma_{zz}\bar{e}_z\}$$

که در این‌جا

$$\bar{n} = n_x\bar{e}_x + n_y\bar{e}_y + n_z\bar{e}_z$$

$$\Rightarrow \overline{T}^{(n)} = \overline{n}.\sigma$$

یا به این صورت

$$\left.\begin{aligned} \overline{T}_x^{(n)} &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ \overline{T}_y^{(n)} &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ \overline{T}_z^{(n)} &= \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$$

در نتیجه اگر $\overline{T}^{(x)}$، $\overline{T}^{(y)}$، $\overline{T}^{(z)}$ و $\overline{n}$ معلوم باشند، $\overline{T}^{(n)}$ به راحتی به‌دست می‌آید. در هر نقطه P تنش‌ها توسط تنش‌های سه صفحه عمود برهم کاملاً مشخص می‌شوند.

در مختصات کارتزین (مستطیلی):

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

در مختصات استوانه‌ای (قطبی):

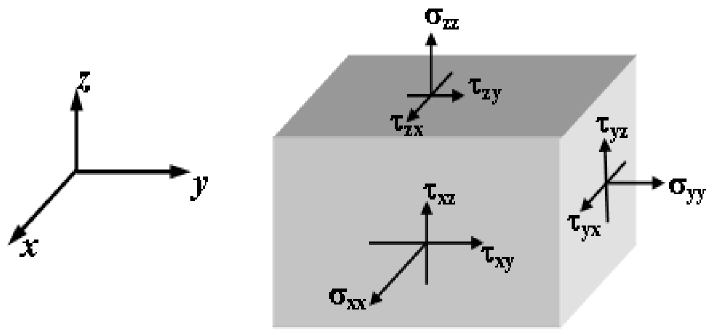
$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

در مختصات کروی:

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{RR} & \sigma_{R\theta} & \sigma_{R\phi} \\ \sigma_{\theta R} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi R} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

خصوصیات حالت تنش

۱) تقارن



$$\sum M_{zi} = 0 = [(\sigma_{xy}) d_z d_y] d_x - [(\sigma_{yx}) d_x d_z] d_y$$
$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

همچنین

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$
$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

تانسور تنش، یک تانسور متقارن مرتبه دو است. مقدار و جهات اصلی[1] را می‌توان بدین طریق به‌دست آورد.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

که معادله مشخصه آن:

$$\Rightarrow \sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0$$

که ریشه‌های $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ به‌دست آمده همان تنش‌های اصلی هستند. در اینجا $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ ضرایب ثابت تانسور تنش می باشند و بدین گونه داده شده‌اند:

[1] Eigen Values & Eigen Vectors

$$I_\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$II_\sigma = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$
$$III_\sigma = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

قسمت کروی[1] تانسور تنش بدین صورت داده شده است.

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

ضرایب متغیر تانسور تنش[2] را با S نشان می‌دهیم.

$$S_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma$$
$$S_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma$$
$$S_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma$$
$$S_{xy} = \sigma_{xy}$$
$$S_{yz} = \sigma_{yz}$$
$$S_{zx} = \sigma_{zx}$$

مثال: مقادیر تنش‌های اصلی و جهات آن‌ها را تعیین کنید.

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3$$
$$II_\sigma = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 = -6$$
$$III_\sigma = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} = -8$$
$$\therefore \sigma^3 - I_\sigma\sigma^2 + II_\sigma\sigma - III_\sigma = 0 = \sigma^3 - 3\sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0$$
$$\Rightarrow \sigma_1 = 4MPa \qquad \sigma_2 = 1MPa \qquad \sigma_3 = -2MPa$$

برای $\sigma_1 = 4MPa$

[1] Spherical Part
[2] Stress Deviator

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_1 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma_1 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -n_x+n_y+n_z=0 \\ n_x-4n_y+2n_z=0 \Rightarrow n_x=n_y+n_z \\ n_x+2n_y-4n_z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n_y+n_z-4n_y+2n_z=0$$

$$\Rightarrow n_y=n_z \Rightarrow n_x=2n_y=2n_z$$

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=1 \Rightarrow \left(2n_y\right)^2+n_y^2+n_y^2=1$$

$$\Rightarrow n_y=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

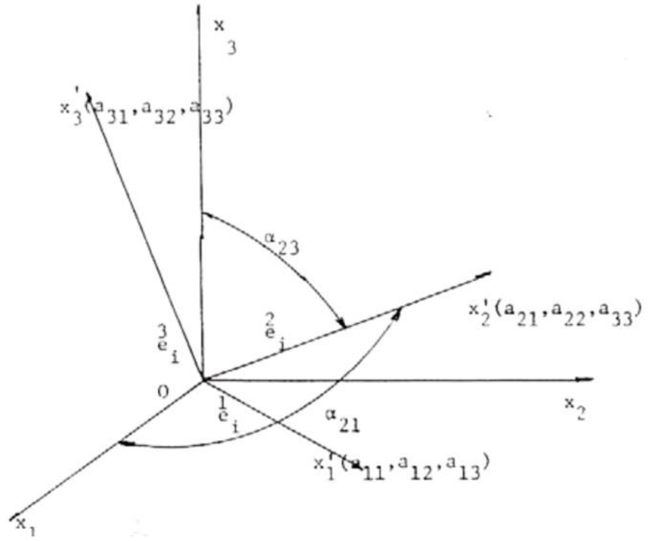
همچنین برای $\sigma_2=1MPa$

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

و برای $\sigma_3=-2MPa$

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

۱-۲-۵- انتقال تنش: (شکل A-1-4)



اگر a_{ij} کوسینوس‌های جهتی بین دو سیستم مختصات عمود بر هم باشند، پس:

$$\sigma'_{ij}(\bar{x}') = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}(\bar{x}) \qquad i,j,p,q=1,2,3$$

یا

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} a_{11}^2 + \sigma_{22} a_{12}^2 + \sigma_{33} a_{13}^2 + 2\sigma_{12} a_{11} a_{12} + 2\sigma_{13} a_{11} a_{13} + 2\sigma_{23} a_{12} a_{13}$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} a_{21}^2 + \sigma_{22} a_{22}^2 + \sigma_{33} a_{23}^2 + 2\sigma_{12} a_{21} a_{22} + 2\sigma_{13} a_{21} a_{23} + 2\sigma_{23} a_{22} a_{23}$$

$$\sigma'_{33} = \sigma_{11} a_{31}^2 + \sigma_{22} a_{32}^2 + \sigma_{33} a_{33}^2 + 2\sigma_{12} a_{31} a_{32} + 2\sigma_{13} a_{31} a_{33} + 2\sigma_{23} a_{32} a_{33}$$

$$\sigma'_{12} = (\sigma_{11} a_{11} + \sigma_{21} a_{12} + \sigma_{31} a_{13}) a_{21} + (\sigma_{12} a_{11} + \sigma_{22} a_{12} + \sigma_{32} a_{13}) a_{22} + (\sigma_{13} a_{11} + \sigma_{23} a_{12} + \sigma_{33} a_{13}) a_{23}$$

$$\sigma'_{23} = (\sigma_{11} a_{21} + \sigma_{21} a_{22} + \sigma_{31} a_{23}) a_{31} + (\sigma_{12} a_{21} + \sigma_{22} a_{22} + \sigma_{32} a_{23}) a_{32} + (\sigma_{13} a_{21} + \sigma_{23} a_{22} + \sigma_{33} a_{23}) a_{33}$$

$$\sigma'_{13} = (\sigma_{11} a_{11} + \sigma_{21} a_{12} + \sigma_{31} a_{13}) a_{31} + (\sigma_{12} a_{11} + \sigma_{22} a_{12} + \sigma_{32} a_{13}) a_{32} + (\sigma_{13} a_{11} + \sigma_{23} a_{12} + \sigma_{33} a_{13}) a_{33}$$

انتقال تنش بین مختصات عمودی کارتزین و مختصات استوانه‌ای:

a_{ij}	r	θ	z
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
z	0	0	1

در نتیجه

$$\sigma_{rr}=\cos^2\theta\sigma_{xx}+\sin 2\theta\sigma_{xy}+\sin^2\theta\sigma_{yy}$$

$$\sigma_{r\theta}=\frac{\sin 2\theta}{2}(\sigma_{yy}-\sigma_{xx})+\cos^2\theta\sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\sin^2\theta\sigma_{xx}-\sin 2\theta\sigma_{xy}+\cos 2\theta\sigma_{yy}$$

$$\sigma_{rz}=\cos\theta\sigma_{xz}+\sin\theta\sigma_{yz}$$

$$\sigma_{\theta z}=-\sin\theta\sigma_{xz}+\cos\theta\sigma_{yz}$$

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}$$

و برعکس

$$\sigma_{xx}=\cos^2\theta\sigma_{rr}+\sin^2\theta\sigma_{\theta\theta}-\sin 2\theta\sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_{yy}=\sin^2\theta\sigma_{rr}+\cos^2\theta\sigma_{\theta\theta}+\sin 2\theta\sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}$$

$$\sigma_{xy}=\frac{\sin 2\theta}{2}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+\cos 2\theta\sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_{zx}=\cos\theta\sigma_{zr}-\sin\theta\sigma_{z\theta}$$

$$\sigma_{zy}=\sin\theta\sigma_{zr}-\cos\theta\sigma_{z\theta}$$

ضرایب انتقال بین مختصات کروی و عمودی:

a_{ij}	R	θ	φ
x	$\sin\varphi\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\varphi\cos\theta$
y	$\sin\varphi\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\varphi\sin\theta$
z	$\cos\varphi$	0	$-\sin\varphi$

ضرایب انتقال بین مختصات کروی و استوانه‌ای

a_{ij}	R	θ	φ
r	$\sin\varphi$	0	$\cos\varphi$
θ	0	1	0
z	$\cos\varphi$	0	$-\sin\varphi$

مثال: ماتریس تنش در مختصات دکارتی به‌صورت روبه‌رو است. این تنش را به مختصات قطبی با زاویه 45° انتقال دهید. ثابت های تانسور تنش را در هر دو مختصات تعیین کنید.

$$\left[\tilde{\sigma}_{ij}\right]=\begin{bmatrix}4&1&2\\1&6&0\\2&0&8\end{bmatrix}$$

$$\sigma_{rr}=\cos^2\theta\sigma_{xx}+\sin 2\theta\sigma_{xy}+\sin^2\theta\sigma_{yy}=6MPa$$
$$\sigma_{r\theta}=\frac{\sin 2\theta}{2}\left(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}\right)+\cos^2\theta\sigma_{xy}=1MPa$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\sin^2\theta\sigma_{xx}-\sin 2\theta\sigma_{xy}+\cos 2\theta\sigma_{yy}=4MPa$$
$$\sigma_{rz}=\cos\theta\sigma_{xz}+\sin\theta\sigma_{yz}=\sqrt{2}MPa$$
$$\sigma_{\theta z}=-\sin\theta\sigma_{xz}+\cos\theta\sigma_{yz}=-\sqrt{2}MPa$$
$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}=8MPa$$

$$\Rightarrow\left[\tilde{\sigma}_{ij}\right]=\begin{bmatrix}6&1&\sqrt{2}\\1&4&-\sqrt{2}\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&8\end{bmatrix}$$

در مختصات دکارتی:

$$I_{\sigma}=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=4+6+8=18MPa$$
$$II_{\sigma}=\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx}-\sigma_{xy}^2-\sigma_{yz}^2-\sigma_{zx}^2$$
$$=4(6)+6(8)+8(4)-1-0-4=99MPa$$
$$III_{\sigma}=\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\sigma_{yz}^2-\sigma_{yy}\sigma_{zx}^2-\sigma_{zz}\sigma_{xy}^2+2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx}$$
$$=4(6\times 8)-6(2)^2-8(1)^2=160MPa$$

در مختصات قطبی:

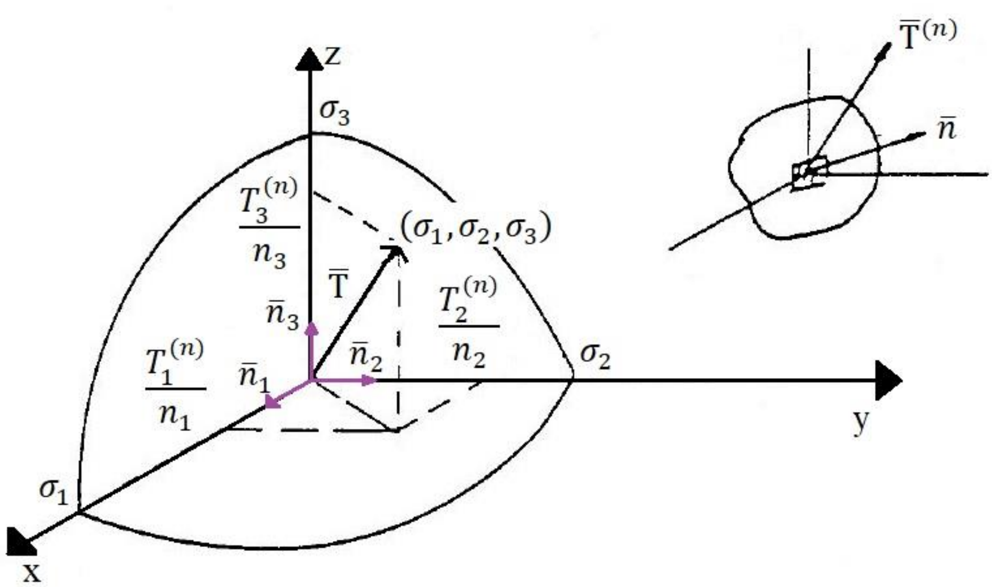
$$I_{\sigma}=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz}=18MPa$$
$$II_{\sigma}=\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{rr}-\sigma_{r\theta}^2-\sigma_{\theta z}^2-\sigma_{zr}^2$$
$$=6(4)+4(8)+6(8)-1-2-2=99MPa$$
$$III_{\sigma}=\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}-\sigma_{rr}\sigma_{\theta z}^2-\sigma_{\theta\theta}\sigma_{zr}^2-\sigma_{zz}\sigma_{r\theta}^2+2\sigma_{r\theta}\sigma_{\theta z}\sigma_{zr}$$
$$=6(4\times 8)-6(2)-4(2)-8(1)^2+2(1\times -\sqrt{2}\times\sqrt{2})=160MPa$$

تنش بیضوی لیم[1]

اگر صفحات I, II, III هم‌راستا با جهات (مختصات) اصلی تانسور تنش باشند پس می‌توان نوشت:

$$\left[\frac{\overline{T}_I^{(n)}}{\sigma_I}\right]^2+\left[\frac{\overline{T}_{II}^{(n)}}{\sigma_{II}}\right]^2+\left[\frac{\overline{T}_{III}^{(n)}}{\sigma_{III}}\right]^2=1$$

که این رابطه، سطح یک حجم بیضوی را معرفی می‌کند که به وسیله نوک بردار تراکشن به‌دست می‌آید.



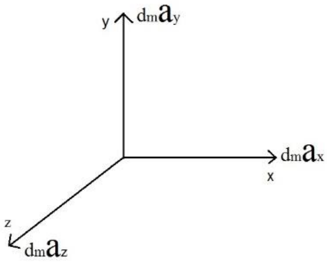
معادلات تعادل

قانون اول نیوتن:

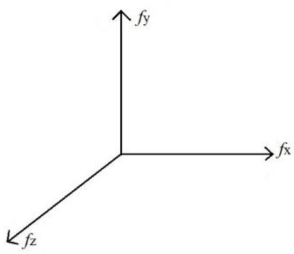
$$\sum F_x = m a_x$$
$$\sum F_y = m a_y$$
$$\sum F_z = m a_z$$

۱) تعادل در جهت x را درنظر بگیرید.

[1] Lame Stress Ellipsoid



نیروی شتاب[1]



نیروهای جسمی[2]

$$\left[(\sigma_{xx}-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx)-\sigma_{xx}\right]dydz+\left[(\sigma_{yx}-\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dy)-\sigma_{yx}\right]dxdz$$
$$+\left[(\sigma_{zx}-\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz)-\sigma_{zx}\right]dydx+f_x dxdydz=dm\,a_x$$

با استفاده از $dm=\rho dxdydz$

و با ساده کردن معادله:

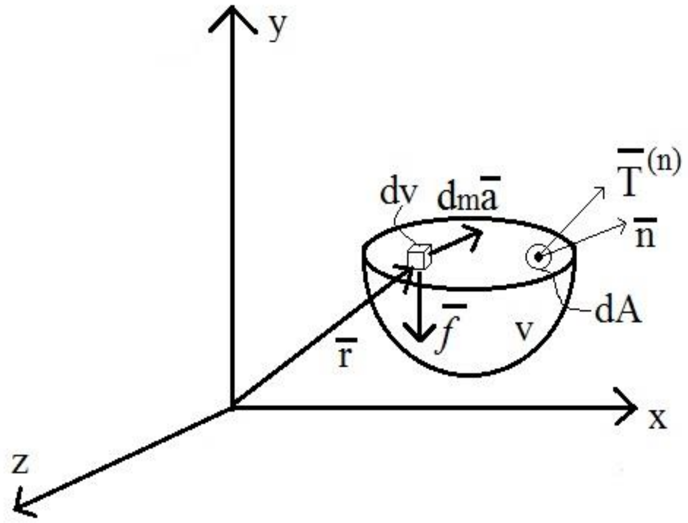
$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+f_x=\rho a_x$$

به همین ترتیب برای تعادل در جهات y و z معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}+f_y=\rho a_y$$
$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+f_z=\rho a_z$$

[1] Acceleration Force
[2] Body Forces

معادله تعادل (فرم انتگرالی):



$$dm = \rho dv$$

نیروی جسمی $= \bar{f}$

شتاب $= \bar{a}$

$$\iiint_v (\bar{f} - \rho \bar{a}) dv + \oiint_s \bar{T}^{(n)} dA = 0$$

یا

$$\iiint_v (f_i - \rho a_i) dv + \oiint_s \bar{T}_i^{(n)} dA = 0$$

اگر $\bar{u}$ بردار جابه‌جایی باشد پس $\bar{a} = \ddot{\bar{u}}$ و $\rho \bar{a} dv = \rho \ddot{\bar{u}} dv$ و همچنین داریم که $T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ پس می توان نوشت:

$$\oiint T_i^{(n)} dA = \oiint n_j \sigma_{ji} dA = \iiint \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dv$$

و یا:

$$\therefore \iiint (f_i - \rho \ddot{u}_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}) dv = 0$$

چون‌که dv به‌طور دلخواه انتخاب شده و صفر نیست پس:

$$f_i - \rho \ddot{u}_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

برداری: $(\bar{\nabla} \tilde{\sigma} + \bar{f} = \rho \ddot{\bar{u}})$

برای مثال اگر i=1:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u}_x$$

شرط تعادل ممان:

$$\sum M_O = 0$$

$$\iiint_v \bar{r} \times (\bar{f} - \rho \bar{\ddot{u}}) dv + \oiint_s \bar{r} \times \bar{T}^{(n)} dA = 0$$

که در این‌جا $\bar{r}$ بردار مکان است.

$$\bar{r} \times \bar{f} \Rightarrow e_{ijk} x_j f_k$$
$$\bar{r} \times \rho \bar{\ddot{u}} \Rightarrow e_{ijk} x_j \rho \ddot{u}_k$$
$$\bar{r} \times \bar{T}^{(n)} \Rightarrow e_{ijk} x_j T_k^{(n)} = e_{ijk} x_j n_p \sigma_{pk}$$

$$\oiint_s [e_{ijk} x_j n_p \sigma_{pk}] dA = \iiint_v [e_{ijk} \delta_{pj} \sigma_{pk} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{pk}}{\partial x_p}] dv$$

$$\therefore \iiint_v \{e_{ijk} x_j [f_k - \rho \ddot{u}_k + \frac{\partial \sigma_{pk}}{\partial x_p}] + e_{ijk} \sigma_{jk}\} dv = 0$$

$$\Rightarrow e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} & i = 3 \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} & i = 1 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} & i = 2 \end{cases}$$

یا

$$e_{123}\sigma_{23} + e_{132}\sigma_{32} = 0 \quad i = 1$$

پس نتیجه می‌گیریم که $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ یا $\tilde{\sigma}$ متقارن است.

که در این‌جا e_{ijk} تانسور جایگشت (گردش[1]) می‌باشد.

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{گردش زوج } ijk \text{ ،1، 2 و 3 باشد} \\ 0 & \text{اگر هر اندیسی تکرار شود} \\ -1 & \text{گردش فرد } ijk \text{ ،1، 2 و 3 باشد} \end{cases}$$

[1] Permutation

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

که δ_{ij} تانسور ایزوتروپیک یا دلتای کرونیکل است.

$$e_{ijk}e_{pjk} = 2\delta_{ip}$$
$$e_{ijk}e_{ijk} = 6$$