

فصل دوم

ویژگی‌های استاتیکی دستگاه‌های اندازه‌گیری

مقدمه

ویژگی‌های کلی دستگاه‌های اندازه‌گیری به دو بخش استاتیکی و دینامیکی تقسیم می‌شوند. دلیل این تقسیم‌بندی این است که بعضی از وسایل اندازه‌گیری مقادیری را اندازه می‌گیرند که یا ثابت هستند و یا به کندی تغییر می‌کنند. لذا در مورد این وسایل احتیاجی به بررسی ویژگی‌های دینامیکی سیستم نمی‌باشد. اما بعضی از وسایل دیگر برای اندازه‌گیری کمیت‌هایی به کار می‌روند که با زمان بشدت تغییر می‌کنند. در مورد این وسایل بایستی ویژگی‌های سیستم در روابط بین ورودی و خروجی به صورت دینامیکی بررسی شود.

در این فصل به بررسی ویژگی‌های استاتیکی وسایل اندازه‌گیری پرداخته می‌شود. در ابتدا لازم است چند واژه مهم تعریف شوند. این نوع ویژگی‌ها مختص به مواردی است که اندازه‌گیری کمیت‌های ثابت و یا مقادیری که بسیار آهسته تغییر می‌کنند. اگرچه این ویژگی‌ها بر اندازه‌گیری دینامیکی هم تاثیر می‌گذارد، ولی برای فهم آن‌ها فعلاً اندازه‌گیری را استاتیکی فرض می‌شود.

۱. خوانایی درجه‌بندی (Scale Readability):

خوانایی درجه‌بندی بستگی به وسیله و خواننده درجه‌بندی دارد. معمولاً لازم است که اندازه‌گیرنده نظر خود را نسبت به توانایی دقیق خواندن درجه‌بندی بیان کند. وسایل اندازه‌گیری که نمایشگر آنالوگ دارند، محل پیکان عقربه باید به وسیله انسان از روی یک صفحه مدرج خوانده شود. معمولاً خوانایی یک درجه‌بندی به اندازه نصف کوچک‌ترین درجه آن است. برای نمایشگرهای دیجیتال کمترین رقم خوانایی را تعیین می‌کند. خوانایی تعیین‌کننده تعداد رقم‌های معنی‌دار است.

۲. تمایز (Threshold):

اگر ورودی یک وسیله اندازه‌گیری تدریجاً از صفر زیاد شود، تا یک مقدار کمینه‌ای هیچ خروجی از سیستم قابل رویت نخواهد بود. این مقدار کمینه را تمایز یا ترش‌هولد دستگاه می‌نامند.

۳. تفکیک (Resolution):

کمترین مقدار تغییر در ورودی که باعث تغییر کوچک اما ملاحظه شونده‌ای در خروجی شود. تفکیک برای کمیت‌های غیر صفر است و با مقدار کمیت می‌تواند تغییر کند.

۴. پسمانی (Hysteresis):

به‌خاطر اصطکاک داخلی دستگاه‌های اندازه‌گیری، وقتی که از بالا یا پایین به مقداری نزدیک می‌شویم در خواندنش اختلاف ایجاد می‌شود. پسمانی ناشی از اصطکاک مکانیکی، اثرات گرمایی، اثرات مغناطیسی و تغییر شکل‌های کشسانی است.

۵. فضای مرده (Dread Space):

گستره مقدار ورودی برای یک خروجی مشخص را فضای مرده می‌گویند. بنابراین فضای مرده دو برابر پسمانی ورودی است.

۶. گستره (Span):

حدود متغیری که یک سیستم برای اندازه‌گیری آن طراحی شده است را گستره آن دستگاه می‌نامند. معمولاً درجه‌بندی دستگاه و صفحه نمایشگر آن برای همین محدوده تنظیم شده است.

۷. دقت (Accuracy):

انحراف خواندن از ورودی معلومی را مشخص می‌کند. خطای دقت همیشه هنگامی وجود دارد که میانگین خواندن‌های متوالی متفاوت از مقدار صحیح و حقیقی کمیت باشد و این تفاوت همچنان اگر تعداد خواندن‌های متوالی را بیشتر کنید نیز وجود خواهد داشت.

۸. تنظیم یا صحت (Precision):

توانایی یک وسیله اندازه‌گیری برای دوبار خواندن مقدار مشخصی با دقت معلومی را نشان می‌دهد. خطای تنظیم همیشه هنگامی که اندازه‌گیری‌های متوالی یک کمیت ثابت منجر به مقادیر مختلف می‌شود، وجود خواهد داشت.

۹. اریب یا کجی (Bias):

خطای سیستماتیک یا وسیله اندازه‌گیری را اریب یا بایس می‌گویند. واژه بایس بیشتر در وسایل اندازه‌گیری الکتریکی استفاده می‌شود.

۱-۲ کالیبراسیون یا درجه‌بندی استاتیکی (Static Calibration)

درجه‌بندی استاتیکی حالتی است که در آن کلیه ورودی‌ها (مزاحم، تغییر دهنده و مطلوب) به‌جز یک ورودی مشخص ثابت نگه داشته شده و آنگاه ورودی مورد نظر در یک محدوده خاص تغییر داده می‌شود که باعث تغییر خروجی (خروجی‌ها) در یک بازه خواهد شد. رابطه به‌دست آمده بین ورودی مطلوب و خروجی‌ها در این حالت درجه‌بندی استاتیکی یا به عبارت دیگر درجه‌بندی استاتیکی تحت حالت ورودی‌های ثابت نامیده می‌شود. این روش ممکن است برای سایر ورودی‌ها نیز تکرار شود و بدین ترتیب رابطه‌ی بین تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌دست آید.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد در روش درجه‌بندی استاتیکی بایستی تمام ورودی‌ها ثابت نگه داشته شود و فقط یک ورودی تغییر کند. لذا ورودی تغییرکننده و خروجی متناظر با آن باید اندازه‌گیری شوند. برای اندازه‌گیری این پارامترها از وسایل اندازه‌گیری درجه‌بندی شده استاندارد دیگری استفاده می‌شود. در اندازه‌گیری ورودی‌های مزاحم و یا تغییردهنده دقت بالایی لازم نیست، زیرا نقش آنها در خروجی وسایل اندازه‌گیری خوب کم است.

برای روشن شدن این مطلب مثال فشارسنج را در نظر بگیرید. درجه حرارت به‌عنوان یک ورودی مزاحم در فشارسنج باعث ایجاد خطا در مقدار خروجی (چیزی که دستگاه نشان می‌دهد) می‌شود. اما به ازای هر 100°C اختلاف دما خطای حدود 0.1% درصد ایجاد می‌شود. حال اگر مقدار 100°C ورودی مزاحم به وسیله ترمومتری که دقت آن 2% درصد است اندازه گرفته شود، خطای ایجاد شده در خروجی سیستم $0.1/2\%$ درصد خواهد بود. همان‌طور که می‌دانیم در محاسبات مهندسی معمولی تفاوتی بین خطای $0.1/2\%$ درصد و 0.1% درصد نمی‌باشد.

اما برای درجه‌بندی براساس متغیر ورودی مطلوب بایستی از وسایل با دقت بالا در اندازه‌گیری ورودی‌ها استفاده کرد. اگر فشارسنج با دقت 0.1% درصد مورد نظر باشد، باید مطمئن بود که اندازه‌گیری مقدار ورودی با دقت بالاتر از این صورت گرفته است. به عبارت دیگر نمی‌توان دستگاهی را با دقتی بالاتر از دقت استاندارد که با آن مقایسه شده است درجه‌بندی کرد. در عمل از قانون زیر برای درجه‌بندی یک دستگاه اندازه‌گیری استفاده می‌شود که:

دقت دستگاه‌های استفاده شده در درجه‌بندی یک دستگاه اندازه‌گیری جدید بایستی حداقل ۱۰ برابر دقت دستگاه اندازه‌گیری جدید باشد.

حال آماده هستیم تا ویژگی‌های استاتیکی را به‌طور دقیق‌تری بررسی کنیم. ویژگی‌های استاتیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: یکی ویژگی‌های استاتیکی کلی و دیگری ویژگی‌های استاتیکی خاص. ویژگی‌های استاتیکی کلی آن دسته از ویژگی‌ها می‌باشند که در کلیه دستگاه‌های اندازه‌گیری مشترک هستند. اما ویژگی‌های استاتیکی خاص مربوط به دستگاه‌های با دقت بالا می‌باشند. در اینجا تنها ویژگی‌های استاتیکی کلی را بررسی می‌شوند.

۲-۲ دقت - تنظیم (صحت) - کجی (اریب)

هنگام اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی توسط یک دستگاه اندازه‌گیری، همواره سعی بر آن است که مقدار اندازه گرفته شده به مقدار حقیقی نزدیک باشد. البته باید توجه داشته باشیم که آنچه را که معمولاً به عنوان مقدار حقیقی

می‌شناسیم نه قابل درک و نه قابل اندازه‌گیری می‌باشد. برای روشن‌شدن مطلب مثال زیر را آورده می‌شود. فرض کنید قرار است طول یک میله را اندازه شود. در اینجا این سؤالات مطرح می‌شود:

۱- آیا دو سطح انتهایی میله مسطح و صاف می‌باشند؟

۲- اگر این دو سطح صاف هستند آیا با هم موازیند؟

۳- اگر دو سطح انتهایی مسطح نیستند از چه دسته سطوحی می‌باشند؟

۴- وضعیت صافی و صیقلی بودن سطوح چگونه است؟

بنابراین مشاهده می‌شود مسایلی که در عمل اتفاق می‌افتند بسیار پیچیده‌تر از مسایل حالت ایده‌آل می‌باشند. همچنین باید دقت شود که آیا ویژگی‌های خواندن یک اندازه به‌تنهایی مورد نظر است یا اینکه این ویژگی‌ها مربوط به یک سری عملیات اندازه‌گیری می‌باشند. در مورد دسته‌ی اول خطای اندازه‌گیری تنها اختلاف مقدار حقیقی و مقدار قرائت شده می‌باشد که اگر مقدار اندازه‌گیری شده بیشتر از مقدار حقیقی باشد، خطا مقداری مثبت خواهد بود.

اما در هنگام استفاده از یک وسیله‌ی اندازه‌گیری ما با یک سری خواص اندازه‌گیری (نه یکی) مواجه هستیم. با اینکه شاید تنها یک عدد را می‌خوانیم ولی این عدد مجموعه‌ای از عملیات اندازه‌گیری را دربر می‌گیرد. حال اگر خواص تمام عملیات به‌کار رفته معلوم باشد، می‌توان خطای حاصل از تک تک عملیات اندازه‌گیری را به‌طور جداگانه حساب کرد. ولی هنوز نمی‌توان خطای کل مجموعه‌ی علمیات را حساب نمود. بنابراین باید به نحوی خطای کل را محاسبه کرد. این کار با قابلیت تنظیم‌پذیری (صحت) دستگاه اندازه‌گیری و خاصیت اریب (کجی) یک دستگاه حاصل می‌شود. در زیر به تعریف این دو اصطلاح پرداخته می‌شود.

۱- تنظیم (صحت): معرف توانایی یک وسیله‌ی اندازه‌گیری برای دوبار اندازه‌گیری مقداری مشخص با دقتی معلوم است.

۲- کجی (اریب): خطای سیستماتیک یک وسیله‌ی اندازه‌گیری را کجی آن گویند.

به‌طور مثال همان فشارسنج قبلی را در نظر بگیرید که برای اندازه‌گیری فشار ۱۰ kPa به‌کار می‌رود. با چند بار اندازه‌گیری این فشار جدول (۱-۲) (شامل اندازه‌های خوانده‌شده در هر مرتبه) به‌دست می‌آید که کمترین آن ۹/۸۱ و بیشترین مقدار آن ۱۰/۴۱ می‌باشد. نمودار چارتی این جدول در شکل (۱-۲-الف) رسم شده است. مقدار Z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(تعداد کل اندازه‌گیری) / (تعداد خواندن‌ها در هر بازه)

$$Z = \frac{\text{تعداد کل اندازه‌گیری}}{\text{پهنای هر بازه}}$$

اگر برای هر بازه‌ی تعریف‌شده مقدار Z را حساب کرده و نمودار میله‌ای Z را رسم کنیم نمودار حاصل مانند شکل (۱-۲-ب) خواهد شد که نمودار هیستوگرام نامیده می‌شود.

۲- ب) خواهد شد که نمودار هیستوگرام نامیده می‌شود.

جدول (۲-۱) داده‌های آزمایش با فشارسنج

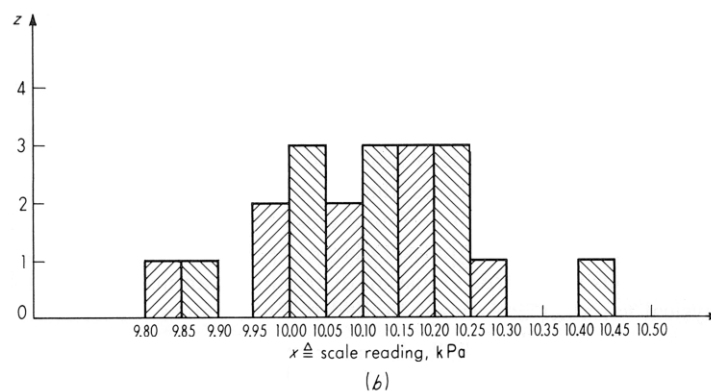
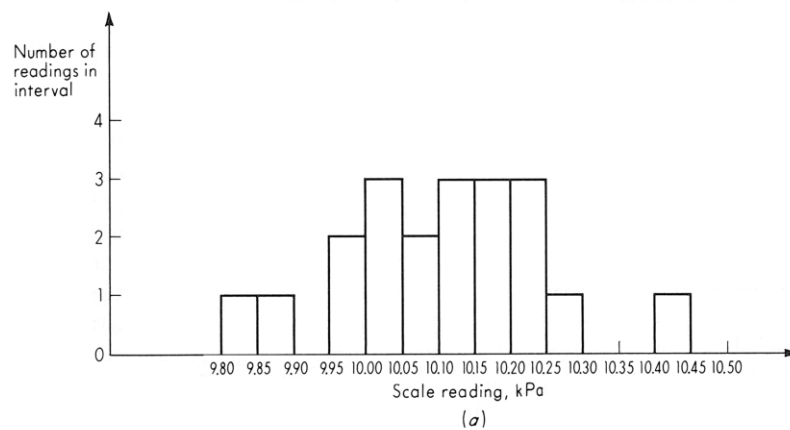
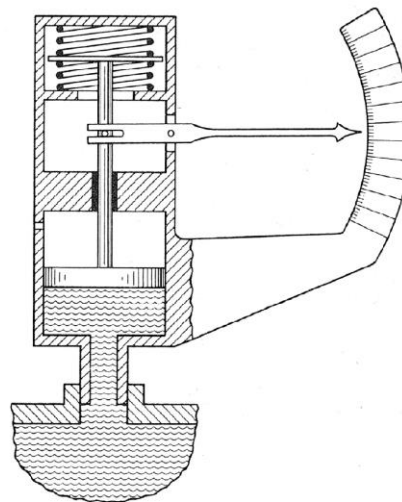
Trial number	Scale reading, kPa
1	10.02
2	10.20
3	10.26
4	10.20
5	10.22
6	10.13
7	9.97
8	10.12
9	10.09
10	9.90
11	10.05
12	10.17
13	10.42
14	10.21
15	10.23
16	10.11
17	9.98
18	10.10
19	10.04
20	9.81

True pressure = $10.000 \pm .001$ kPa

Acceleration = 0

Vibration level = 0

Ambient temperature = $20 \pm 1^\circ\text{C}$



شکل (۲-۱) توزیع داده‌ها

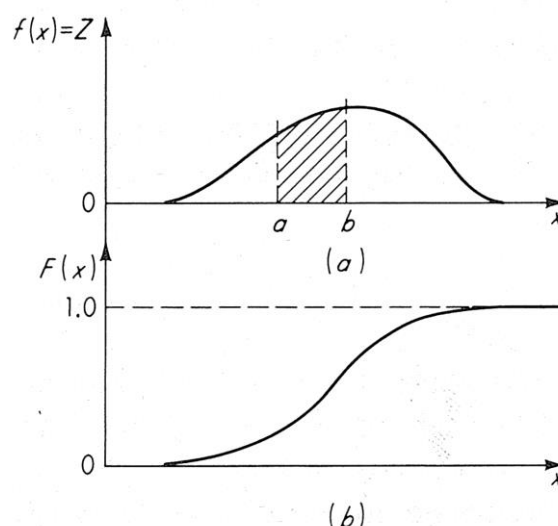
از فرمول (۲-۱) به آسانی می‌توان دریافت که مساحت زیر یک نمودار میله‌ای برای یک محدوده‌ی مشخص با احتمال خواندن عددی در آن محدوده مساوی است. به‌طور مثال مساحت زیر سطح کل نمودار هیستوگرام مساوی با ۱ یا ۱۰۰٪ می‌باشد. بنابراین احتمال اینکه عددی که ما با این دستگاه می‌خوانیم در محدوده‌ی کمترین عدد خوانده‌شده تا بیشترین عدد خوانده‌شده باشد ۱۰۰٪ می‌باشد، که امری واضح است.

حال اگر این امکان وجود داشته باشد که تعداد خواندن‌ها به‌قدری زیاد شود که هر بازه‌ی نمودار هیستوگرام به یک بازه‌ی خیلی کوچک با تعداد قرائت‌های زیاد تبدیل شود، نمودار هیستوگرام شکل (۲-۱-ب) به یک منحنی هموار تبدیل می‌شود. اگر از مدل ریاضی برای حل مسایل فیزیکی استفاده کنیم تابع $Z = f(x)$ را تابع چگالی احتمالات می‌نامیم. از تعریف Z داریم:

$$\Delta P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (2-2)$$

احتمال خواندن عددی بین محدوده‌ی a و b

نمودار مربوطه در شکل (۲-۲-الف) رسم شده است.



شکل (۲-۲) تابع توزیع احتمالات

تابع چگالی تجمعی احتمالات $F(x)$ را می‌توان به‌صورت احتمال خواندن عددی کوچکتر از مقدار x به‌صورت زیر تعریف کرد.

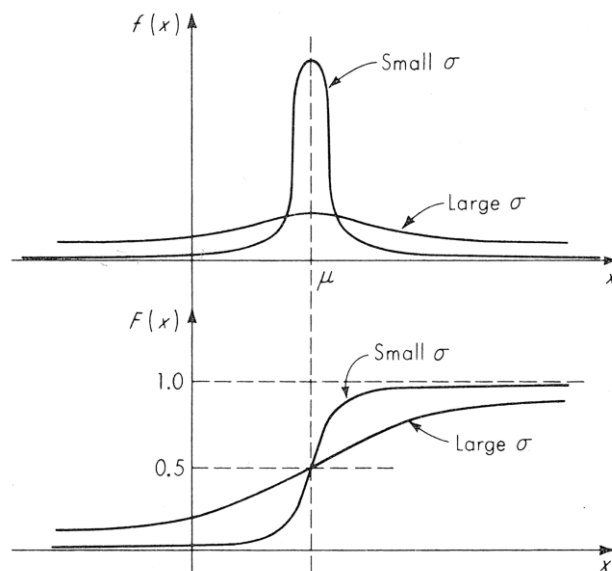
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (2-3)$$

در این صورت نمودار شکل (۲-۲-ب) به‌دست می‌آید.

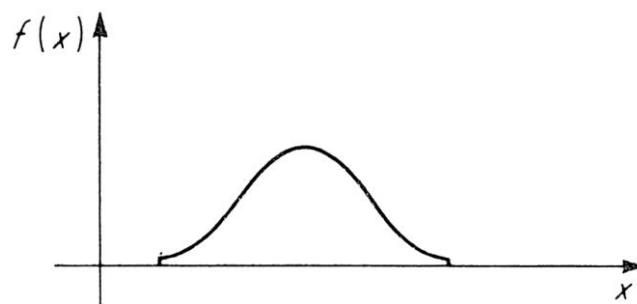
یکی از توابع چگالی احتمالات، چگالی مفید تابع گاؤوسی^۱ یا نرمال می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (2-4)$$

که در آن μ مقدار میانگین داده‌ها و σ مقدار انحراف معیار می‌باشد. شکل و گستردگی منحنی تنها با عامل انحراف معیار مشخص می‌شود و این در حالی است که مقدار میانگین μ محل منحنی را در روی محور x ها مشخص می‌کند. تابع $F(x)$ را که به صورت انتگرال تابع گاؤوسی تعریف می‌کنیم نمی‌توان با روش‌های ریاضی حساب کرد. ولی می‌توان برای محاسبه‌ی آن از روش‌های عددی استفاده کرد. شکل (۳-۲) نشان می‌دهد که به ازای مقادیر کم σ احتمال اینکه مقدار خوانده‌شده از دستگاه نزدیک مقادیر میانگین درجه‌بندی باشد زیاد است. همچنین از معادله‌ی (۴-۲) چنین برمی‌آید که احتمال اینکه مقدار خوانده‌شده به وسیله‌ی دستگاه به سمت $\pm\infty$ میل کند کم باشد. همین عامل باعث می‌شود که یک توزیع حقیقی از نمودار گاؤوسی در عمل وجود نداشته باشد. زیرا به طور مثال احتمال اینکه فشارسنجی عدد 100 kPa را نشان دهد در حالی که محدوده‌ی فشار آن تا 20 kPa را نشان دهد صفر می‌باشد. بنابراین در عمل نمودار گاؤوسی به صورت شکل (۴-۲) درمی‌آید.

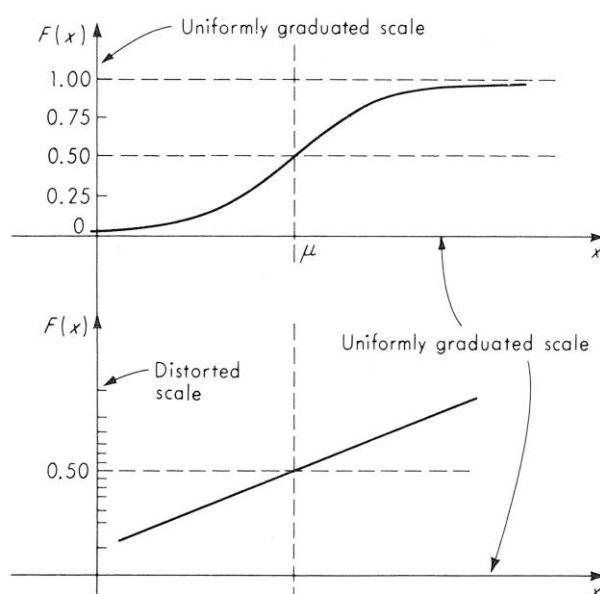


شکل (۳-۲) توزیع گاؤوسی



شکل (۴-۲) توزیع غیر گاؤوسی

در عمل داده‌های به‌دست آمده از تجربه دقیقاً با نمودار گاؤوسی مطابقت نمی‌کنند. اما در اغلب موارد آنها به اندازه‌ی کافی با نمودار گاؤوسی مطابقت دارند که بتوان از مدل گاؤوسی برای حل آنها استفاده کرد. بنابراین باید روشی برای امتحان کردن اینکه آیا داده‌های به‌دست آمده با نمودار گاؤوسی مطابقت دارند یا خیر، وجود داشته باشد (تست نرمالیت). اولین روش برای مقایسه توزیع حقیقی با توزیع گاؤوسی استفاده از کاغذ احتمالات می‌باشد. اگر برای توزیع تجمعی از توزیع گاؤوسی استفاده کنیم و محور عمودی را هم به نحو مناسبی تقسیم‌بندی کنیم، منحنی گاؤوسی به‌صورت یک خط مستقیم در مختصات تعریف شده رسم می‌شود (شکل ۲-۵). برای مثال داده‌های جدول (۲-۱) را در نظر بگیرید. این داده‌ها را می‌توان بر روی صفحه‌ی کاغذ احتمالات گاؤوسی به‌صورت زیر رسم کرد:



شکل (۲-۵) توزیع گاؤوسی بر روی مختصات احتمالات

اول محور افقی را به نحوی درجه‌بندی کرده که تمام فشارهای خوانده‌شده را در بر گیرد و محور عمودی درصد مقادیر خوانده‌شده را که کمتر یا مساوی با مقدار متغیر محور افقی می‌باشد، نشان دهد.

همچنین این نمودار طوری رسم می‌شود که نقطه‌ی معادل ۵۰٪، میانگین حسابی داده‌ها را روی محور افقی قطع کند. توجه داشته باشید که به این ترتیب بزرگترین مقدار خوانده‌شده را هیچگاه نمی‌توان بر روی این نمودار نمایش داد. چون کاغذ احتمالات مقدار ۱۰۰٪ را شامل نمی‌شود.

برای رسم خط احتمالات گاؤوسی بایستی دو نقطه از صفحه را داشته باشیم. این دو نقطه عبارتند از (۵۰٪ و $\bar{X}$) و (۸۵٪ و $\bar{X} + S$) که $\bar{X}$ و S از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

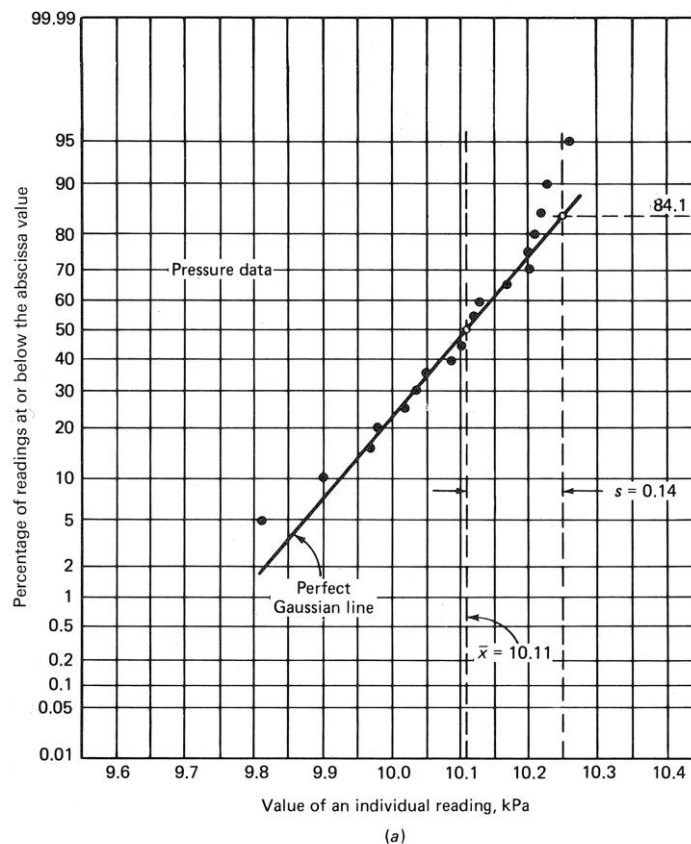
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}} \quad (۲-۵)$$

N : تعداد خواندن‌ها

X_i : مقدار خوانده شده در هر مرتبه

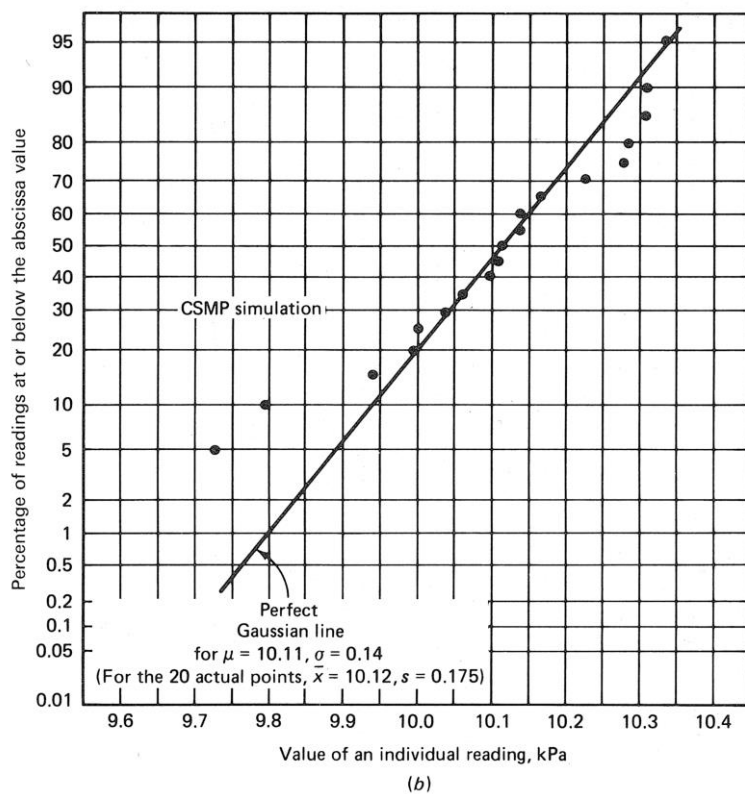
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad (۲-۶)$$

مقادیر $\bar{X}$ و S برای مثال مورد نظر ما (داده‌های جدول ۲-۱) به ترتیب ۱۰/۱۴ kPa و ۱۰/۱۱ می‌باشد. حال با رسم خط گاؤوسی و نمایش نقاط تجربی بر روی کاغذ احتمالات و مقایسه ی این دو می‌توان دریافت که داده‌های تجربی از توزیع گاؤوسی پیروی می‌کنند یا نه؛ اما همان طور که در شکل (۲-۶) نیز مشخص می‌باشد نقاط ابتدایی و انتهایی قابل اطمینان نیستند و برای مقایسه باید از نقاط میانی استفاده کرد.

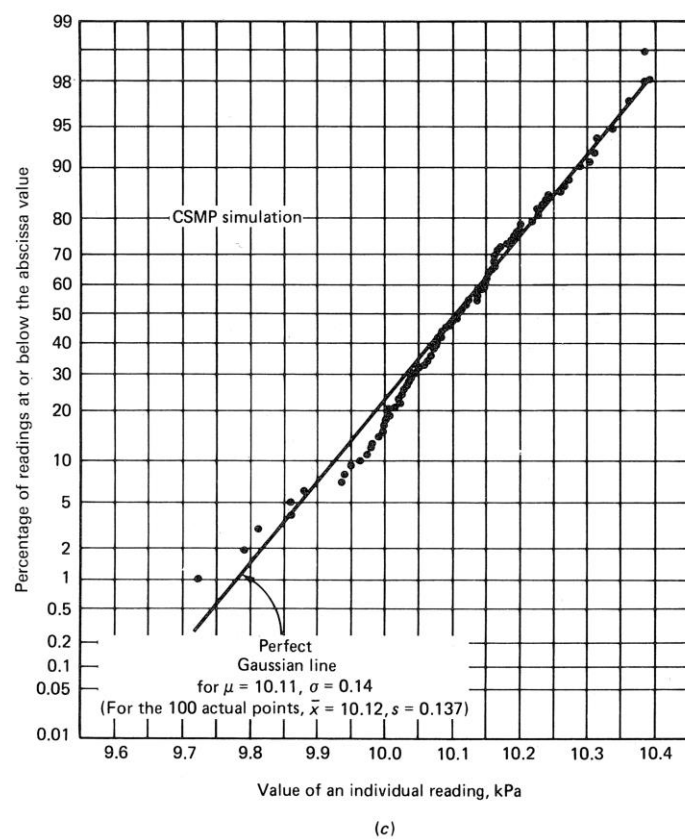


شکل (۲-۶) تست نرمالیت برای داده‌های آزمایش

به دلیل اینکه تست گرافیکی کاملاً به صورت ذهنی انجام می‌گیرد بهتر است که از داده‌های اضافی برای کمک گرفتن استفاده کنیم. منحنی شکل‌های (۲-۷) و (۲-۸) دو نمونه از داده‌های اضافی را نشان می‌دهند که از برنامه ی CSMP شرکت IBM به دست آمده‌اند. در شکل (۲-۷) با دادن $\mu = 10 / 11$ و $\sigma = 0 / 14$ تعداد ۲۰ داده برای مثال از برنامه گرفته شده است. برای به دست آوردن ویژگی‌های استاتیکی یک وسیله ی اندازه گیری تعداد ۲۰ داده (آزمایش) بسیار کم است. در شکل (۲-۸) این تعداد به ۱۰۰ آزمایش رسیده است که بهتر از حالت قبل می‌باشد ولی هنوز در حد مطلوب نیست.

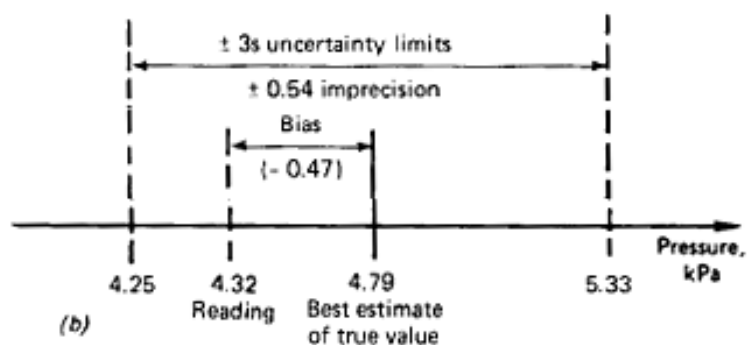
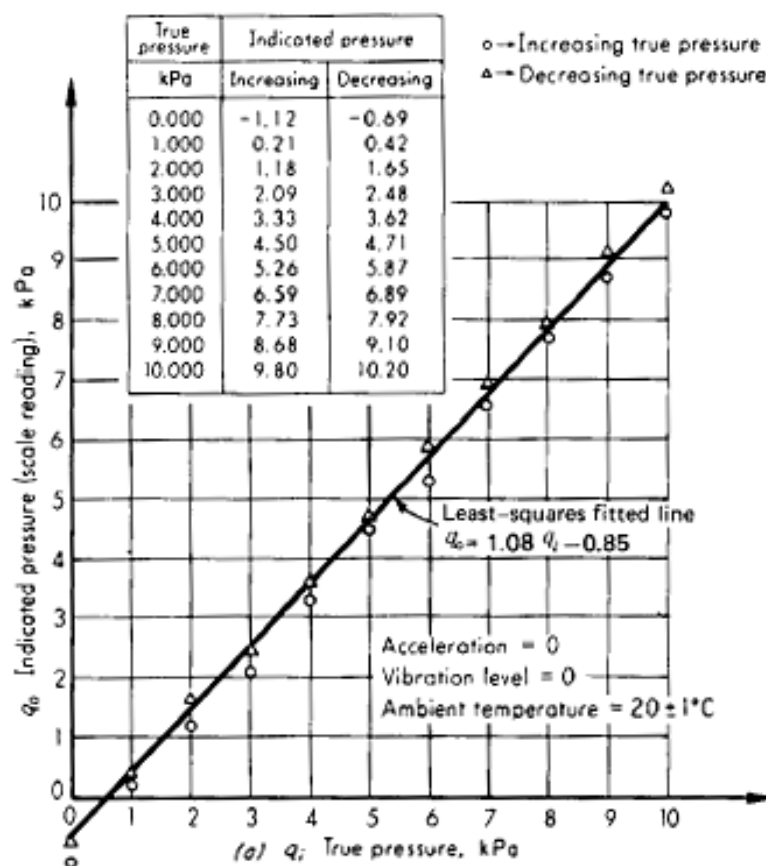


شکل (۷-۲) آزمایش توزیع گاؤوسی توسط CSMP



شکل (۸-۲) آزمایش توزیع گاؤوسی با استفاده از ۱۰۰ داده تجربی

تا اینجا توضیح داده شد که چگونه می‌توان مقادیری را که از آزمایش به دست می‌آید تحلیل کرد تا نتیجه‌گیری صحیحی به دست آید. اما در وسایل حقیقی مقادیر صحیح حاصل از درجه‌بندی در یک محدوده‌ی خاصی تغییر می‌کنند. در اغلب موارد ما دستگاه را برای دو حالت تغییر صعودی مطلوب و تغییر نزولی مطلوب درجه‌بندی می‌کنیم. بنابراین در این حالت دارای دو دسته عدد خوانده‌شده (خروجی) می‌باشیم. به طور مثال فرض کنید می‌خواهیم فشارسنج جدول (۲-۱) را برای به دست آوردن رابطه‌ی بین متغیر ورودی (فشار) و مقدار خوانده‌شده از صفحه‌ی فشارسنج درجه‌بندی کنیم. شکل (۲-۹ الف) داده‌های این درجه‌بندی را نشان می‌دهد که منحنی مربوطه خطی بوده و در دو دسته، یکی برای مقادیر افزایشنده و دیگری برای مقادیر کاهشنده، مرتب شده است.



شکل (۲-۹) درجه‌بندی استاتیکی فشارسنج

روش LSM

یکی از دقیق‌ترین روش‌های رسم بهترین خط و یا نزدیک‌ترین خط به مقدار اصلی در یک مختصات q_i ، q_o روش حداقل مجزورات (LSM) می‌باشد.

فرض کنید که ما یک متغیر مانند q_i که در محدوده‌ی خاص خود قابل تغییر است را داریم و مقدار وابسته q_o را از روی دستگاه می‌خوانیم. همچنین فرض کنید که q_i و q_o هر دو دارای میزان خاصی خطا می‌باشند که میزان آن در محدوده‌ی کوچک آنها زیاد می‌باشد و با کاهش میزان q_i و q_o نیز افزایش می‌یابد. اگر ما برای تمامی مقادیر ممکن q_i ، مقادیر q_o را تا زمانی که یک دسته مقدار محدود که بتواند منحنی q_i ، q_o را پر کند بخوانیم، به این وسیله یک گسترش دوبعدی از منحنی q_i ، q_o خواهیم داشت که براساس مقادیر خوانده شده‌ی q_o خواهد بود. با رسم مقادیر نرمال خوانده شده در هر بازه‌ی خاص در مقابل مقادیر غیرنرمال، می‌توانیم نمودار $(2-10)$ را تهیه کنیم (شکل $(2-8)$). روش LSM براساس این واقعیت است که باید خطی رسم شود که میزان مجموع مربعات فاصله نقاط پراکنده بر روی نمودار از آن خط کمترین مقدار باشد. با فرض اینکه مدل ما دارای نموداری شبیه شکل $(2-8)$ می‌باشد و مقدار LSM یک خط راست می‌باشد که معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$q_{oc} = mq_i + b$$

و با توجه به این فرض که q_{oc} دارای کمترین میزان مجموع مربعات از مقادیر پراکنده q_o می‌باشد، در نتیجه باید

$$\sum (q_o - q_{oc})$$

دارای کمترین مقدار باشد. پس باید مقادیرهای

$$\frac{\partial \sum (q_o - mq_i - b)^2}{\partial b} = 0$$

باشد.

و اگر میزان b متوسط برای تعداد n مقدار خوانده شده به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\sum b = nb$$

$$nm + a \sum q_i = \sum q_o$$

و در نتیجه داریم:

$$b \sum q_i + a \sum q_i^2 = \sum q_i q_o$$

و با حل همزمان دو معادله برای a و b خواهیم داشت:

$$b = \frac{\sum q_i^2 \sum q_o - \sum q_i \sum q_i q_o}{n \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

$$m = \frac{n \sum q_i q_o - \sum q_i \sum q_o}{n \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

در شرایطی که خط از نقطه $(0, 0)$ بگذرد میزان b صفر خواهد بود و میزان $m = \frac{\sum q_i q_o}{\sum q_i^2}$ خواهد بود.

معادله‌ی خط مستقیم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$q_o = mq_i + b \quad (2-7)$$

که در آن:

q_o = (مقدار وابسته) مقدار خروجی

q_i = (مقدار مستقل) مقدار ورودی

m = شیب خط

مقدار m و b از فرمول زیر حساب می‌شود.

$$m = \frac{N \sum q_i q_o - [\sum q_i][\sum q_o]}{N \sum q_i^2 - [\sum q_i]^2} \quad (2-8)$$

$$b = \frac{[\sum q_o][\sum q_i^2] - [\sum q_i q_o][\sum q_i]}{N \sum q_i^2 - [\sum q_i]^2} \quad (2-9)$$

که N تعداد کل نقاط به دست آمده از آزمایش می‌باشد. در مثال شکل (۲-۱۰) مقادیر محاسبه شده برای m و b به ترتیب $۱/۰۸$ و $-۰/۸۵$ kPa می‌باشند. به دلیل اینکه مقادیر محاسبه شده از یک سری داده‌های پراکنده به دست آمده‌اند می‌توان انحراف معیار m و b را از روابط زیر به دست آورد.

$$S_{q_o}^2 = \frac{1}{N} \sum (mq_i + b - q_o)^2 \quad (2-10)$$

که S_{q_o} عبارت است از انحراف معیار q_o و به این معنی است که مقدار q_i را ثابت نگه داشته و چندین بار مقدار خروجی (q_o) را به ازای q_i ثابت بخوانیم. در این حالت مقادیر مختلفی را برای q_o به دست می‌آوریم که با S_{q_o} مقدار این پراکندگی مشخص می‌شود. اگر این S_{q_o} برای تمام مقادیر q_i ثابت باشد می‌توان از تمام داده‌های شکل (۲-۱۰ الف) استفاده کرد، بدون اینکه لازم باشد برای هر داده چند بار آزمایش را انجام بدهیم. همین تعریف برای S_m و S_b نیز صادق می‌باشد.

$$S_m \triangleq \frac{n S_{q_o}^2}{N \sum q_i^2 - [\sum q_i]^2} \quad (2-11)$$

$$S_b \triangleq \frac{S_{q_o}^2 \sum q_i^2}{N \sum q_i^2 - [\sum q_i]^2} \quad (2-12)$$

برای این مثال مقدار $S_{q_o} = ۰/۲$ kPa، $S_m = ۰/۰۱۳۴$ و $S_b = ۰/۰۷۸$ kPa می‌باشد و با فرض خطای $S \pm ۳$ می‌توان $m = ۱/۰۸ \pm ۰/۰۴$ و $b = -۰/۸۵ \pm ۰/۲۴$ kPa را به دست آورد.

در هنگام استفاده از نتایج درجه‌بندی استاتیکی، می‌توان با داشتن مقادیر خوانده شده q_o (خروجی) مقدار q_i (ورودی) را به دست آورد. برای این منظور بایستی q_i برحسب q_o حساب شود.

$$q_i = \frac{q_o + ۰/۸۵}{۱/۰۸} \quad (2-13)$$

اما q_i حساب شده از این راه دارای خطای مثبت یا منفی می‌باشد که باید در q_i محاسبه شده تاثیر داده شوند. برای این

منظور می‌توان مقدار Sq_i را از رابطه‌ی زیر حساب کرد.

$$Sq_i^2 = \frac{1}{N} \sum \left[\frac{q_o - b}{m} - q_i \right]^2 = \frac{Sq_o^2}{m^2} \quad (2-14)$$

در مثال بالا مقدار $Sq_i = 0.18 \text{ kPa}$ به دست می‌آید. بنابراین اگر با این فشارسنج، فشاری نامعلوم را اندازه گرفته و مقدار $4/79$ را بخوانیم، مقدار فشار واقعی $0.54 \text{ kPa} \pm 4/79$ می‌باشد (با فرض $3 \pm S$).

۳-۲ تحلیل خطاهای مرکب

یک دستگاه اندازه‌گیری معمولاً از یک سری اجزاء تشکیل شده است که هر کدام خطایی مخصوص به خود دارند. سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که اگر هر کدام از خطاهای جزئی را بتوان به تنهایی حساب کرد، چگونه می‌توان خطای کل دستگاه را که ترکیبی از همه‌ی این خطاها می‌باشد محاسبه نمود؟ همین سوال در مورد حالتی که ترکیبی از چند دستگاه اندازه‌گیری را برای محاسبه‌ی مقدار یا مقادیری به کار می‌بریم مطرح می‌شود. اگر خطای هر کدام از دستگاه‌های اندازه‌گیری معلوم باشد، چگونه می‌توان خطای کل را محاسبه کرد؟ می‌توان این سوال را به صورت برعکس مطرح کرد که اگر در مقدار اندازه‌گیری نهایی دقت خاصی مورد نظر باشد، دقت هر کدام از دستگاه‌های به کار رفته بایستی چقدر باشد؟

برای پاسخ به این سوال مقدار N را در نظر بگیرید که خود N تابعی است از متغیرهای مستقل $u_1, u_2, \dots, u_n$ و u_n که به صورت زیر نشان داده شده است:

$$N = f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2-15)$$

u_i ها خود مقادیر اندازه‌گیری شده هستند و خطاهای آنها به ترتیب $\pm \Delta u_1$ و $\pm \Delta u_2$ و $\dots$ و $\pm \Delta u_n$ می‌باشند. ترکیب این خطاها باعث ایجاد یک خطای کلی ΔN در محاسبه‌ی مقدار N می‌شود. Δu_i ها ممکن است به عنوان یک محدودیت روی سیستم مطرح شوند.

اگر مقدار Δu_i را داشته باشیم و بخواهیم مقدار خطای N را حساب کنیم داریم:

$$N \pm \Delta N = f(u_1 \pm \Delta u_1, u_2 \pm \Delta u_2, \dots, u_n \pm \Delta u_n) \quad (2-16)$$

با کم کردن معادله‌ی (۲-۱۵) از معادله‌ی (۲-۱۶) مقدار $\pm \Delta N$ را به دست می‌آوریم. از طرفی با استفاده از بسط تیلور برای محاسبه‌ی $f(u_1 \pm \Delta u_1, u_2 \pm \Delta u_2, \dots, u_n \pm \Delta u_n)$ داریم:

$$f(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_n + \Delta u_n) = f(u_1, u_2, \dots, u_n) + \Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots + \Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} + \frac{1}{2} \left[(\Delta u_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + (\Delta u_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} + \dots + (\Delta u_n)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_n^2} \right] + \dots \quad (2-17)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های Δu_i^2 خواهیم داشت:

$$f(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_n + \Delta u_n) = f(u_1, u_2, \dots, u_n) + \Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \dots + \Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \quad (2-18)$$

با کم کردن $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ از دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$\Delta N = \left| \Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} \right| + \left| \Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} \right| + \dots + \left| \Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right| \quad (2-19)$$

چون ممکن است بعضی از Δu_i ها منفی باشند و از مقدار خطای کل ΔN بکاهند، لذا از جمع قدرمطلق های Δu ها استفاده کرده ایم. بیان خطای ΔN به شکل معادله ی (۲-۱۹) می تواند روشن کند که کدام یک از u_i ها نقش بیشتری در خطای کلی ΔN می تواند داشته باشد. به طور مثال اگر $\frac{\partial f}{\partial u_p}$ مقدار زیادتری نسبت به سایر $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ ها داشته باشد بنابراین حتی مقدار Δu_p کوچک می تواند تاثیر بیشتری در خطای کلی داشته باشد. می توان مقدار خطا را به صورت نسبی و برحسب درصد بیان کرد.

$$E_v = \frac{\Delta N}{N} \times 100 = \frac{E_a \times 100}{N} \quad (2-20)$$

E_a : خطای کلی مطلق

E_v : خطای نسبی برحسب درصد

بنابراین مقدار نهایی می تواند به صورت $N \pm E_a$ و (درصد) $N \pm E_v$ بیان شود. در ادامه، در مورد ارقام معنی دار و نحوه ی گرد کردن اعداد بحث خواهد شد.

ارقام معنی دار عبارتند از اعداد ۱، ۲، ۳ و ... و عدد صفر بجز در مواردی که برای نشان دادن ممیز اعشار یا برای پر کردن جای اعداد نامعلوم یا از قلم افتاده به کار می رود. بر این اساس تعداد ارقام معنی دار عدد 0.000532 ، سه تا می باشد و عبارتند از ۵، ۳ و ۲ و برای عدد 2.076 تمام اعداد و از جمله صفر جزو ارقام معنی دار هستند. ولی برای اعداد 2300 صفرها می توانند جزو ارقام معنی دار به حساب آیند و یا به حساب نیایند. اگر بخواهیم این عدد دارای دو رقم معنی دار باشد می توان نوشت 2.3×10^3 و اگر بخواهیم دارای سه رقم معنی دار باشد می توان نوشت 2.30×10^3 و به همین ترتیب برای ۴ یا ۵ رقم معنی دار.

در محاسبات معمولاً با اعدادی سروکار داریم که از نظر تعداد ارقام معنی دار با هم مساوی نیستند. مانند ضرب دو عدد 0.317856 و 4.62 که عدد اول دارای ۶ رقم معنی دار و عدد دوم دارای سه رقم معنی دار می باشد. می توان نشان داد که در این مورد بهتر است که جواب به صورت سه رقم معنی دار نوشته شود. بنابراین برای کم کردن حجم کار بهتر است که عددی با ۶ رقم معنی دار به عددی با سه رقم معنی دار گرد شود. برای دانستن اینکه کدام یک از اعداد را باید گرد کرد از قاعده ی کلی زیر پیروی کنید:

- عمل جمع کردن

برای جمع کردن چند عدد با دقت های متفاوت، اعداد با تعداد ارقام بیشتر (دقت بیشتر) را به یک رقم بیشتر از دقت عدد با کمترین دقت گرد کرده و محاسبات را انجام می دهیم و نتیجه ی جمع را با دقتی معادل کمترین دقت اعداد بیان می کنیم. به طور مثال:

$$\begin{array}{r} 2.635 \\ 2.64 \\ \hline 5.275 \\ \rightarrow 5.28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1/52 \\
 +0/7345 \\
 \hline
 5/79 \rightarrow 5/8
 \end{array}$$

- عمل تفریق

برای عمل تفریق، گرد کردن اعداد با دقت بیشتر به کمترین دقت موجود در اعداد باعث می شود نتیجه ی تفریق براساس کمترین دقت اعداد بیان شود.

$$\begin{array}{r}
 7/6345 \rightarrow 7/634 \\
 -0/031 \\
 \hline
 7/603 \rightarrow 7/603
 \end{array}$$

- عمل ضرب و تقسیم

برای عملیات ضرب و تقسیم نیز مانند عملیات جمع، اعداد با دقت بیشتر را به یک رقم بیشتر از کمترین دقت موجود در اعداد گرد کرده و نتیجه ی ضرب و تقسیم را به کمترین دقت موجود در اعداد گرد می کنیم:

$$\frac{(1/2)(6/335)(0/0072)}{3/14159} = \frac{(1/2)(6/34)(0/0072)}{3/14} = 0/0174 \rightarrow 0/017$$

با توجه به بحث های قبل می توان محاسبه ی خطای کل را به ۴ قسمت مهم زیر تقسیم کرد:

۱- جدول بندی تمام داده ها و خطاهای آنها. تمام خطاها باید تا دو رقم معنی دار بیان شوند. علت آن هم این است که مقادیر دقیق خطاهای جزئی، قابل محاسبه نمی باشند.

۲- اگر مقدار محاسبه شده ی کل مانند N براساس تابع f محاسبه می شود $N = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ترم های

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \text{ و } \frac{\partial f}{\partial u_n} \text{ را محاسبه کنید و تا سه رقم معنی دار گرد کنید.}$$

۳- از رابطه ی (۱۹-۲) استفاده کرده و خطای کل E_a را محاسبه کنید و آنرا تا دو رقم معنی دار گرد کنید.

۴- از معادله ی $N, N = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ را تا یک رقم اعشار بیشتر از خطای E_a که در مرحله قبل محاسبه شد، حساب کنید. یعنی اگر مقدار خطا $\pm 0/062$ حساب شده مقدار N را تا چهار رقم اعشار حساب می کنیم $7/0516 = N$. سپس مقدار N را تا دقت خطای E_a گرد می کنیم که در مثال بالا به $7/052$ گرد می شود. همچنین در محاسبه ی N با استفاده از $u_1, u_2, \dots, u_n$ بایستی توجه شود که هر کدام از این داده ها بایستی از نظر تعداد ارقام معنی دار به نحوی باشند که مقدار محاسبه شده ی N در آخر دارای دقت کافی در مقایسه با دقت E_a باشد. نتیجه محاسبه ممکن است به دو صورت نوشته شود که هر دو صحیح می باشند.

$$7/052 \pm 0/062 \text{ مقدار مطلق}$$

$$7/052 \pm 0/881 \text{ مقدار نسبی}$$

هرگاه مقدار خطای نهایی مشخص باشد و بخواهیم مقدار خطای حداکثر ممکن هر ترم را به دست آوریم بایستی به نحو دیگری عمل کنیم. برای حل این مسئله از روش تاثیر برابر استفاده می کنیم. یعنی فرض می کنیم که تاثیر خطای ایجاد شده حاصل از ترم های مختلف، در مقدار خطای نهایی مساوی است. بنابراین:

$$\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial u_1} \Delta u_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial u_2} \Delta u_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial u_n} \Delta u_n \right|$$

اگر فرض کنیم که سهم تمام ترم های خطا با هم برابر است داریم:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u_1} \Delta u_1 \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial u_2} \Delta u_2 \right| = \dots = \left| \frac{\partial f}{\partial u_n} \Delta u_n \right|$$

حال با داشتن مقدار خطای کل ΔN و n و $u_1, u_2, \dots, u_n$ می توان خطای هر ترم را حساب کرد.

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} \Delta u_i = \frac{\Delta N}{n} \Rightarrow \Delta u_i = \frac{\Delta N}{n \left[\frac{\partial f}{\partial u_i} \right]} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-21)$$

و به این ترتیب مقدار خطاهای مجاز در هر اندازه گیری می توانند محاسبه شوند.

اگر مقدار خطاهای Δu_i ها به طور دقیق معلوم نباشد و فقط به صورت تغییرات استاتیکی در u_i ها مانند $3 \pm S$ باشد و یا خطاهای احتمالی و نامعلوم را شامل شود، فرمول ارائه شده برای محاسبه ی خطای کلی E_a فرق می کند و از رابطه ی زیر حساب می شود.

$$E_{a_{rss}} = \sqrt{\left[\Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} \right]^2 + \left[\Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} \right]^2 + \dots + \left[\Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right]^2} \quad (2-22)$$

خطای $E_{a_{rss}}$ که به این طریق محاسبه می شود همان معنی خطاهای انفرادی را می دهد. به این معنی که اگر Δu_i مقدار $3 \pm S$ را برای محدوده ی تغییرات u_i مشخص کند آنگاه $E_{a_{rss}}$ هم مقدار $3 \pm S$ را برای محدوده ی تغییرات N مشخص می کند و 99.7% از مقادیر N به دست آمده در این محدوده قرار می گیرد. معادله ی (2-22) معمولاً مقادیر خطای کمتری را نسبت به معادله ی (2-19) نشان می دهد. همچنین برای این حالت معادله ی (2-21) به شکل زیر در می آید:

$$\Delta u_i = \frac{\Delta N}{\sqrt{n} \left[\frac{\partial f}{\partial u_i} \right]} \quad (2-23)$$