معادلات دیفرانسیل

تألیف

دکتر بهناز عمومی

استاد دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

فهرست مطالب

مقدمه

ریاضیات در حالت کلی هنر مدل کردن پدیده‌های طبیعی و سپس تجزیه و تحلیل آنهاست. بسیاری از اصول و قوانین حاکم بر طبیعت با استفاده از توابع مدل می‌شوند. در غالب پدیده‌ها یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته وجود دارد.
به عنوان مثال زمان یک متغیر مستقل و میزان افزایش یا کاهش جمعیت، میزان جریان در مدار الکتریکی، حرکت سیالات و میزان حرارت متغیرهای وابسته به زمان هستند. این ارتباط بین متغیر وابسته و متغیر مستقل را با تابع مدل می‌کنیم.
معمولاً متغیر مستقل را با t و متغیر وابسته را با $y = f(t)$ نمایش می‌دهیم. در اکثر مسائل هدف بررسی و یافتن میزان تغییرات متغیر وابسته نسبت به تغییرات متغیر مستقل است، که به این پارامتر نرخ تغییرات نیز گفته می‌شود. در ریاضی نرخ تغییرات، همان مشتق تابع است.

متغیرهای مستقل	$t_۲,\ t_۱$
متغیرهای وابسته نظیر	$f(t_۲),\ f(t_۱)$
	$\lim_{t_۲\to t_۱} \frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱} = \lim_{\Delta t\to ۰} \frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t)$

روابطی که بین یک متغیر مستقل، متغیر وابسته به آن و نرخ تغییرات آن وجود دارد، یک معادله است که به دلیل ظاهر شدن دیفرانسیل تابع (مشتق) معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود و موضوع مورد مطالعه این درس است.

تعریف ۱.۰. هر معادله شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل می‌گوییم. ▲

مثال ۲.۰. فرض کنید شی‌ای در جو نزدیک سطح دریا در حال سقوط است. متغیر مستقل زمان را با t و متغیر وابسته یعنی سرعت شی را با v نمایش می‌دهیم. طبق قانون دوم نیوتن می‌دانیم که

جرم شی × شتاب = نیروی خالص وارد بر شی

$$F = a \times m$$

همچنین می‌دانیم که

$$a = \frac{dv}{dt}$$

پس داریم

$$f = m\frac{dv}{dt}.$$

از طرف دیگر نیروی F به نیروی گرانش زمین و نیروی مقاومت شی نیز بستگی دارد. هر چه اندازه نیروی مقاومت بیشتر باشد نیروی گرانش کمتر است. در نتیجه

$$F = mg - \gamma v$$

که g شتاب گرانشی و برابر عدد ثابت $۹/۸\frac{m}{s^۲}$ است، γ ضریب مقاومت شی است و به جنس شی بستگی دارد و ثابت است. در نتیجه

$$mg - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$

و v تابع مجهول است. رابطه بالا یک معادله دیفرانسیل است. ▲

در حالت کلی برای مدل کردن یک پدیده طبیعی:

۱. متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص می‌کنیم و به هر یک نمادی نسبت می‌دهیم. (تعیین واحدهای متغیرها مهم است. مثلاً t ثانیه یا سانتیمتر یا ... .)

۲. قانون حاکم بر پدیده را بررسی می‌کنیم. این قانون از علم مربوط به مساله می‌آید. مثلا فیزیک، الکترونیک، بیولوژی و ...

۳. قانون را با در نظر گرفتن ثابت‌ها و متغیرهای کمکی به زبان متغیرهای مستقل و وابسته بیان می‌کنیم. (توجه به یکسان کردن واحد متغیرها مهم است)

۴. حاصل یک معادله دیفرانسیل است و ممکن است پیچیده باشد.

مثال ۳.۰.

(الف) فرض کنید گروهی موش در صحرا زندگی می‌کنند و شکارچی در کار نیست. جمعیت موش‌ها با نرخ متناسب با جمعیت فعلی افزایش می‌یابد.

متغیر مستقل=زمان= t، ثابت رشد نرخ= r و متغیر وابسته=جمعیت موش‌ها= $p(t)$.

$$\text{قانون رشد:}\quad \frac{dp}{dt} = rp(t)\ \text{(معادله دیفرانسیل)}$$

(ب) چند جغد در همان نزدیکی هستند و روزانه ۱۵ موش را می‌کشند.

$$\frac{dp}{dt} = rp(t) - ۴۵۰\ \text{(معادله دیفرانسیل)}$$

۴۵۰ تعداد موش‌های کشته شده در یک ماه، زیرا واحد t ماه است.

▲

مثال ۴.۰. قانون خنک‌سازی نیوتن: میزان تغییر درجه حرارت یک جسم با تفاضل درجه حرارت و محیط اطراف متناسب است.

t =متغیر مستقل=زمان و حرارت جسم=متغیر وابسته= y

معادله دیفرانسیل $y' = -K(y - f(t))$ که $f(t)$ میزان حرارت محیط است و K ثابت است.
▲

۱.۰ هدف این درس

حل معادله دیفرانسیل داده شده است که یک مهندس به روش‌های حل معادله دیفرانسیل نیاز دارد. علاوه بر این، این درس جایی است که می‌توان اهمیت و نقش ریاضی در سایر علوم مانند فیزیک و مهندسی را مشاهده کرد.
حل معادله یعنی یافتن توابعی که در معادله صدق می‌کنند و به آنها جواب معادله می‌گوییم.
اولین قدم در حل معادله دیفرانسیل دسته‌بندی آنها است.
معادلات دیفرانسیل را در اولین مرحله به دو دسته عادی (معمولی) و جزیی تقسیم می‌کنیم.

تعریف ۰.۵. اگر مشتق تابع مجهول نسبت به یک متغیر در معادله ظاهر شده باشد، معادله را معادله دیفرانسیل عادی و در غیر این صورت یعنی اگر مشتقات جزیی در معادله ظاهر شده باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی می‌نامیم. ▲

در این درس تنها به حل معادله دیفرانسیل عادی می‌پردازیم.

تعریف ۰.۶. به بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله، مرتبه معادله می‌گوییم ▲

مثال ۰.۷.

(الف) (خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول $mg-\gamma v=m\frac{dv}{dt}$

(ب) (خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول $\frac{dp}{dt}=rp-k$

(پ) (خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه سوم $f^{'''}+f^{'}=x\sin x$

(ت) (غیرخطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه دوم $y^{''}+e^{y}=e^{x}$

(ث) (غیرخطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول $yy^{'}=xe^{x}$

(ج) معادله دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰$

▲

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل عادی مرتبه nام به صورت زیر است.

$$F(x,y,y^{'},\dots,y^{(n)})=۰$$

در مرحله دوم، معادلات دیفرانسیل را به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می‌کنیم.

تعریف ۰.۸. اگر F یک رابطه خطی بر حسب $y,y^{'},\dots y^{(n)}$ باشد، یعنی به صورت

$$a_{۰}(x)y^{(n)}+a_{۱}(x)y^{(n-۱)}+\dots+a_n(x)y=g(x)$$

باشد (توجه کنید توان y و مشتقات آن یک است و ضرایب فقط بر حسب x است)، آنگاه معادله را خطی، در غیر این صورت آن را غیرخطی می‌نامیم. ▲

مثال ۰.۹.

۱. در مثال ۰.۷، معادلات الف تا پ، خطی و معادلات ت و ث غیرخطی است.

۲. $x^۲y'' + ۴xy' + ۲y = ۰$ (خطی) دوم مرتبه

۳. $y''' + ۲e^xy'' + yy' = x^۴$ (غیرخطی) سوم مرتبه

۴. $(۱ + y^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲} + x\frac{dx}{dy} + y = e^x$ (غیرخطی) دوم مرتبه

۵. $\frac{d^۲y}{dx^۲} + \sin(x + y) = \sin x$ (غیرخطی) دوم مرتبه

۶. $\frac{d^۳y}{dx^۳} + x\frac{dy}{dx} + (\cos^۲ x)y = x^۳$ (خطی) سوم مرتبه

▲

معرفی فصل‌های درس
فصل اول. روش‌های حل معادلات دیفرانسیل (عادی) مرتبه اول
فصل دوم. روش‌های حل معادلات دیفرانسیل (عادی) مرتبه دوم
فصل سوم. روش حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس
فصل چهارم. حل معادلات دیفرانسیل به شکل سری‌های توانی
فصل پنجم. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در این فصل با حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول شامل معادلات خطی، برنولی، جداشدنی، کامل، همگن و روش‌هایی برای تبدیل یک معادله دیفرانسیل به این دسته از معادلات، آشنا می‌شویم.

۱.۱ معادلات مرتبه اول خطی

شکل کلی یک معادله مرتبه اول خطی به صورت زیر است.

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = g(x)$$

یا

$$y' + p(x)y = g(x)$$

ساده‌ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی وقتی است که $p(x) = 0$ یعنی

$$y' = g(x)$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

و به راحتی با یک انتگرال‌گیری، جواب معادله به دست می‌آید.

$$y = \int g(x)dx + c$$

که c مقدار ثابت است.
جواب معادله که دارای پارامتر ثابت c است را جواب عمومی معادله می‌گوییم. اگر به دنبال جوابی از معادله باشیم که از یک نقطه مشخص می‌گذرد، شرط را به شکل $y(x_۰) = y_۰$ نمایش می‌دهیم و آن را یک شرط اولیه می‌گوییم. جوابی که در این شرط اولیه صدق کند را جواب خصوصی معادله می‌گوییم.

مثال ۱.۱.

$$\begin{aligned}
&y' = \sin ۲x, y(۰) = \tfrac{۱}{۲} \\
&y = \int \sin ۲x \ dx = -\frac{۱}{۲} \cos ۲x + c \\
&y(۰) = -\tfrac{۱}{۲} \cos ۲(۰) + c = -\tfrac{۱}{۲} + c = \tfrac{۱}{۲} \Rightarrow c = ۱ \\
&y(x) = -\tfrac{۱}{۲} \cos ۲x + ۱ \quad \text{جواب خصوصی معادله}
\end{aligned}$$

▲

مثال ۲.۱.

$$\begin{aligned}
&y' = \tfrac{e^x+۱}{e^x-۱} \\
&y = \int \frac{e^x+۱}{e^x-۱} \ dx = \int \frac{e^x-۱+۲}{e^x-۱} \ dx \\
&y = \int (۱ + \frac{۲}{e^x-۱}) \ dx = x + ۲\int \frac{dx}{e^x-۱} \\
&y = x + ۲\int \frac{e^{-x}}{۱-e^{-x}} \ dx \\
&۱ - e^{-x} = u \implies e^{-x}dx = du \\
&y = x + ۲\int \frac{du}{u} = x + ۲\ln|u| + c \\
&y = x + ۲\ln|۱ - e^{-x}| + c \quad \text{جواب عمومی معادله}
\end{aligned}$$

▲

معادلات مرتبه بالاتر به فرم $y^{(n)} = g(x)$ را نیز می‌توان با nبار انتگرالگیری حل نمود.

تمرین ۳.۱. معادله $y'' = xe^{-x}$ را حل کنید.

اکنون به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی در حالت کلی می‌پردازیم.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

که $p(x)$ و $g(x)$ توابعی معلوم و پیوسته هستند.
با توجه به ایده قبلی اگر بتوانیم این معادله را نیز به فرم مشتق یک تابع مساوی یک تابع دیگر بنویسیم، یعنی به صورت

$$\frac{d\Box}{dx} = g(x)$$

آنگاه می‌توانیم مانند قبل با یک انتگرال‌گیری معادله را حل کنیم.

مثال ۴.۱. معادله مرتبه اول خطی $y' + \frac{1}{x}y = 1$ را در نظر بگیرید.
اگر طرفین معادله را در x ضرب کنیم، داریم:

$$xy' + y = x$$

یا

$$x\frac{dy}{dx} + y = x$$

یا

$$\frac{xdy + ydx}{dx} = x$$

یا

$$\frac{d(xy)}{dx} = x$$

که همان فرم مطلوب است و با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$xy = \int xdx \Rightarrow xy = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x}$ جواب عمومی معادله

▲

حال معادله $\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$ را در حالت کلی در نظر می‌گیریم و مانند مثال قبل سعی می‌کنیم با ضرب کردن طرفین معادله در تابعی مانند $\mu(x)$ طرف چپ معادله را به مشتق تابع $\mu(x)y$ تبدیل کنیم.
به چنین تابع $\mu(x)$ که به دنبال آن هستیم عامل انتگرالساز معادله می‌گوییم.
پس هدف یافتن تابع $\mu(x)$ است.
قدم اول: معادله $\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$ را در نظر می‌گیریم.
قدم دوم: طرفین معادله را در $\mu(x)$ ضرب می‌کنیم.

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \qquad (۱.۱)$$

قدم سوم: تابع $\mu(x)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که طرف اول معادله ۱.۱ برابر $\frac{d(\mu(x)y)}{dx}$ شود.
طبق قانون مشتق حاصلضرب داریم:

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \frac{d\mu}{dx}y + \mu\frac{dy}{dx}$$

پس قرار می‌دهیم:

$$\frac{d\mu}{dx}y + \mu\frac{dy}{dx} \stackrel{?}{=} \mu\frac{dy}{dx} + \mu p(x)y, \quad y \neq ۰$$

پس از ساده‌سازی (حذف $\mu\frac{dy}{dx}$ و y از طرفین) داریم

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu p(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx$$

با انتگرالگیری از طرفین

$$\mu > 0 \text{ فرض کنید } \quad \Rightarrow \ln \mu(x) = \int p(x)dx + c_1$$

$$\text{تابع } e \text{ را بر طرفین تساوی اثر می‌دهیم} \quad \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx + c_1} = e^{\int p(x)dx} e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c \quad \Rightarrow \mu(x) = ce^{\int p(x)dx}$$

چون نیاز به یک تابع μ داریم، ضریب c را می‌توانیم مساوی یک قرار دهیم.

نتیجه ۵.۱. عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

$$y' + p(x)y = g(x)$$

به صورت $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ است.

با توجه به فرمول $\mu(x)$، معادله داده شده به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\frac{(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)g(x)$$

و با انتگرالگیری داریم

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x)g(x)dx + c] \quad \text{جواب عمومی معادله}$$

نکته مهم. در فرمول $\mu(x)$، تابع $p(x)$ ضریب y است، وقتی که ضریب y' برابر یک باشد. پس قبل از استفاده از فرمول ضریب y' را یک می‌کنیم.

مثال ۶.۱. جواب عمومی معادله $y' - 2xy = x$ را بیابید.

حل: ضریب y'، یک است و $p(x) = -2x$

یافتن عامل انتگرالساز

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -۲x dx} = e^{-x^۲}$$

طرفین معادله را در $e^{-x^۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$e^{-x^۲}y' - ۲xe^{-x^۲}y = xe^{-x^۲}$$

طبق روش یافتن μ، طرف اول معادله برابر $\frac{d}{dx}(e^{-x^۲}y)$ است.

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^۲}y) = xe^{-x^۲}$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم.

$$e^{-x^۲}y = \int xe^{-x^۲}dx = -\frac{۱}{۲}e^{-x^۲} + c$$

جواب عمومی معادله $y = -\frac{۱}{۲} + ce^{x^۲}$. ▲

مثال ۷.۱. جواب عمومی معادله $x^۲y' + ۳xy = \frac{\sin x}{x}$ را بیابید.
حل: ابتدا باید ضریب y' را برابر یک کنیم.

$$\begin{aligned}
& y' + \tfrac{۳}{x}y = \tfrac{\sin x}{x^۳} \\
& \mu(x) = e^{\int \frac{۳}{x}dx} = e^{۳\ln x} = e^{\ln x^۳} = x^۳ \\
& x^۳y' + ۳x^۲y = \tfrac{d(x^۳y)}{dx} = \sin x \\
\Rightarrow\ & x^۳y = \int \sin x \, dx = \cos x + c \\
\Rightarrow\ & y = \tfrac{\cos x}{x^۳} + \tfrac{c}{x^۳} \quad \text{جواب عمومی معادله}
\end{aligned}$$

▲

مثال ۸.۱. جواب خصوصی معادله $x(\ln x)y' = x\ln x - y,\ y(e) = ۱$ را بیابید.

حل: ضریب $y^{'}$ را یک می‌کنیم و معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم.

$$y^{'} + \frac{۱}{x \ln x} y = ۱ \tag{۲.۱}$$

$$\begin{aligned} & p(x) = \tfrac{۱}{x \ln x} \\ & \mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x \ln x}} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x \end{aligned}$$

طرفین معادله ۲.۱ را در $\mu(x)$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & (\ln x)y^{'} + \tfrac{۱}{x} y = \ln x \\ & (\ln x)y^{'} + \tfrac{۱}{x} y = \tfrac{d[(\ln x)y]}{dx} = \ln x \\ & (\ln x)y = \int \ln x dx \\ & \ln x = u \Rightarrow \tfrac{dx}{x} = du \\ & dx = dv \Rightarrow x = v \\ & (\ln x)y = \int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c \\ & \Rightarrow y = x - \tfrac{x}{\ln x} + \tfrac{c}{\ln x} \quad \text{جواب عمومی معادله} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y(e) = e - e + c = ۱ \Rightarrow c = ۱ \\ & \Rightarrow y = x - \tfrac{x}{\ln x} + \tfrac{۱}{\ln x} \quad \text{جواب خصوصی معادله} \end{aligned}$$

▲

تمرین ۹.۱. جواب معادلات زیر را بیابید.

(الف) $x\frac{dy}{dx} + (۲y - xy + ۱) = ۰ \quad x > ۰$

(ب) $y^{'} = (-\cos x)y + ۶\cos x \quad y(۰) = ۱$

۲.۱ معادلات برنولی

گاهی یک معادله مرتبه اول خطی نیست، ولی با تغییری می‌توان معادله را خطی کرد. یکی از مهمترین دسته این معادلات، معادلات برنولی نام دارد و شکل کلی این معادلات به صورت زیر است.

$$y' + p(x)y = g(x)y^a$$

(a عدد حقیقی و ثابت است)
توجه: اگر $a = ۰$ یا $a = ۱$ معادله خطی است که حل آن را از بخش قبل می‌دانیم.
برای حل معادلات برنولی:
قدم اول: طرفین معادله را در y^{-a} ضرب می‌کنیم.

$$y^{-a}y' + p(x)y^{۱-a} = g(x)$$

قدم دوم: تغییر متغیر $z := y^{۱-a}$ را اعمال می‌کنیم.

$$z = y^{۱-a} \Rightarrow z' = (۱-a)y^{-a}y'$$

قدم سوم: معادله داده شده را برحسب متغیر جدید بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{z'}{۱-a} + p(x)z = g(x)$$

مشاهده می‌کنیم که معادله به دست آمده یک معادله خطی است و مطابق روش حل معادلات خطی مرتبه اول می‌توان حل نمود.

مثال ۱۰.۱. معادله $xy' + y = y^۲x^۲\ln x$ را حل کنید.
دقت می‌کنیم که معادله برنولی با $a = ۲$ است. طرفین را در $y^{-۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$xy^{-۲}y' + y^{-۱} = x^۲\ln x \tag{۳.۱}$$

تغیر متغیر $z := y^{-۱}$ می‌دهیم.

$$z' = -y'y^{-۲}$$

معادله ۳.۱ را بر حسب متغیر جدید می‌نویسیم.

$$-xz' + z = x^{2}\ln x \quad \text{معادله خطی مرتبه اول}$$

ضریب z' را یک می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
& z' - \tfrac{1}{x}z = -x\ln x \\
& \mu(x) = e^{\displaystyle\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \tfrac{1}{x} \\
& \tfrac{1}{x}z' - \tfrac{1}{x^{2}}z = \frac{d(\frac{1}{x}z)}{dx} = -\ln x \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{x}z = \int -\ln x dx \\
& \ln x = u, \quad dx = dv \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{x}z = \int -\ln x dx = -x\ln x + \int dx \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{x}z = -x\ln x + x + c \\
\Rightarrow\quad & z = -x^{2}\ln x + x^{2} + cx \\
\Rightarrow\quad & y^{-1} = -x^{2}\ln x + x^{2} + cx
\end{aligned}$$

▲

مثال ۱۱.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$2xyy' + (1+x)y^{2} = e^{x}$$

با کمی دقت و بازنویسی معادله می‌بینیم که معادله یک معادله برنولی است.

$$\begin{aligned}
& y' + \tfrac{1+x}{2x}y = \tfrac{e^{x}}{2x}y^{-1} \\
\times y \Rightarrow\quad & yy' + \tfrac{1+x}{2x}y^{2} = \tfrac{e^{x}}{2x} \\
z := y^{2} \Rightarrow\quad & z' = 2yy'
\end{aligned}$$

$$\frac{z'}{2} + \frac{1+x}{2x}z = \frac{e^{x}}{2x}$$

$$z' + \frac{۱+x}{x}z = \frac{e^x}{x} \qquad (۴.۱)$$

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\displaystyle\int \frac{۱+x}{x}dx} = e^{\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \int dx} = xe^x \\
۴.۱ \times \mu &\Rightarrow xe^x z' + e^x(۱+x)z = e^{۲x} \\
&\Rightarrow \tfrac{d(xe^x z)}{dx} = e^{۲x} \\
&\Rightarrow xe^x z = \int e^{۲x}dx \\
&\Rightarrow xe^x z = \tfrac{۱}{۲}e^{۲x} + c \\
&\Rightarrow z = \tfrac{۱}{۲x}e^x + \tfrac{c}{x}e^{-x} \\
&\Rightarrow y^۲ = \tfrac{۱}{۲x}e^x + \tfrac{c}{x}e^{-x}
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۱۲.۱. جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

(الف) $x^۲y' + ۲xy - y^۳ = ۰ \quad x > ۰$

(ب) $(۱+x^۲)y' - ۲xy = y^۲$

(ج) $y' = (a\cos x + b)y - y^۳$ ثابت است b, a

(د) $y'\cos x + y\sin x + y^۳ = ۰$

(ه) $۲xyy' = x^۲ + ۳y^۲$

(ی) $y' = \frac{x^۲ - ۲y^۲}{xy}$

(و) $x^۲\ln x - ۲xy^۳ + ۳x^۲y^۲y' = ۰$

۳.۱ معادلات جداشدنی

قبلا دیدیم که شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر است.

$$F(x, y, y') = ۰$$

در اغلب موارد می‌توانیم y' را به صورت فرمول صریح برحسب x و y بنویسیم. یعنی معادله را به صورت زیر بنویسیم.

$$y' = f(x, y)$$

می‌توانیم فرض کنیم $f(x, y) = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$. در این صورت می‌توان معادله دیفرانسیل زیر را

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)}$$

به صورت زیر نوشت

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = ۰$$

مثال ۱۳.۱. به عنوان مثال اگر $f(x, y) = \frac{۲x+e^y}{۲y+\sin x}$، آنگاه

$$M(x, y) = ۲x + e^y, \quad N(x, y) = -(۲y + \sin x)$$

$$y' = \frac{۲x + e^y}{۲y + \sin x} \Rightarrow (۲x + e^y)dx - (۲y + \sin x)dy = ۰.$$

یا اگر $f(x, y) = \sin(x + y)$، آنگاه $M(x, y) = \sin(x + y), \quad N(x, y) = -۱$

$$y' = \sin(x + y) \Rightarrow \sin(x + y)dx - dy = ۰.$$

▲

تعریف ۱۴.۱. اگر در معادله مرتبه اول $M(x, y)dx + N(x, y)dy = ۰$، تابع $M(x, y)$ فقط تابعی از x و $N(x, y)$ فقط تابعی از y باشد، یعنی معادله به فرم زیر باشد

$$M(x)dx + N(y)dy = ۰$$

این معادله را معادله جداشدنی می‌نامیم. ▲

با توجه به شکل ساده این معادلات، می‌بینیم که با انتگرال‌گیری از هر یک از جملات، می‌توانیم معادله را حل کنیم.

مثال ۱۵.۱. معادله $y' = e^{x+y+1}$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = e^{x+1}e^{y} = \frac{e^{x+1}}{e^{-y}} \\ \Rightarrow \quad & e^{x+1}dx = e^{-y}dy \\ \Rightarrow \quad & \int e^{x+1}dx = \int e^{-y}dy \\ \Rightarrow \quad & e^{x+1} = -e^{-y} + c \\ \Rightarrow \quad & e^{x+1} + e^{-y} = c \end{aligned}$$

▲

در حالت کلی

قضیه ۱۶.۱. برای معادله جداشدنی $M(x)dx + N(y)dy = 0$، اگر $H(x) = \int M(x)dx$ و $G(y) = \int N(y)dy$، آنگاه $H(x) + G(y) = c$ جواب عمومی معادله است.

اثبات. باید نشان دهیم تابع y که در رابطه $H(x) + G(y) = c$ صدق می‌کند، در معادله داده شده صادق است.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(H(x) + G(y)) = \frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dx} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \\ \text{فرض} \quad & \Rightarrow M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ & \Rightarrow M(x)dx + N(y)dy = 0. \end{aligned}$$

■

نتیجه ۱۷.۱. جواب عمومی معادله جداشدنی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ عبارتست از

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

مثال ۱۸.۱. جواب عمومی معادله $(e^x + 1)\frac{dy}{dx} = y - ye^x$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-e^x)}{e^x+1} \\
\Rightarrow\ & \frac{dy}{y} = \frac{(1-e^x)}{e^x+1}dx \\
\Rightarrow\ & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1-e^x)}{e^x+1}dx \\
\Rightarrow\ & \ln y = \int \frac{1}{e^x+1}dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \\
\Rightarrow\ & \ln y = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \\
\Rightarrow\ & \ln y = -\ln(1+e^{-x}) - \ln(1+e^x) + c_1 \\
\Rightarrow\ & y = e^{\ln(1+e^{-x})^{-1}} e^{\ln(1+e^x)^{-1}} c,\ c = e^{c_1} \\
\Rightarrow\ & y = c\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{1+e^x}.
\end{aligned}$$

▲

مثال ۱۹.۱. معادله $y' = xy^2 + y^2 + xy + y$ را حل کنید.

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = x(y^2+y) + y^2 + y = (y^2+y)(x+1) \\
\Rightarrow\ & \frac{dy}{y^2+y} = (x+1)dx \\
\Rightarrow\ & \int \frac{dy}{y^2+y} = \int (x+1)dx \\
& \frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{Ay+A+By}{y(y+1)} \\
& \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1 \\
& \frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \\
\Rightarrow\ & \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx \\
\Rightarrow\ & \ln y - \ln(y+1) = \tfrac{1}{2}x^2 + x + c_1 \\
\Rightarrow\ & \ln \frac{y}{y+1} = \tfrac{1}{2}x^2 + x + c_1 \\
\text{اثر می‌دهیم } e \Rightarrow\ & \frac{y}{y+1} = ce^{\frac{1}{2}x^2+x},\ c = e^{c_1}.
\end{aligned}$$

▲

مثال ۲۰.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy = \sin^{-1}x\ dx \quad y(0)=0$$

$$
\begin{aligned}
&y^{۲}dy = \tfrac{\sin^{-۱}x}{(۱-x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}dx\\
&\int y^{۲}dy = \int \frac{\sin^{-۱}x}{\sqrt{(۱-x^{۲})}}dx\\
&\sin^{-۱}x = u \Rightarrow \tfrac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = du\\
&\Rightarrow \tfrac{۱}{۳}y^{۳} = \int udu = \frac{۱}{۲}u^{۲} + c\\
&\Rightarrow \tfrac{۱}{۳}y^{۳} = \tfrac{۱}{۲}(\sin^{-۱}x)^{۲} + c\\
&y(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = \tfrac{۱}{۲}(\sin^{-۱}۰)^{۲} + c \Rightarrow c = ۰\\
&\Rightarrow \tfrac{۱}{۳}y^{۳} = \tfrac{۱}{۲}(\sin^{-۱}x)^{۲}.
\end{aligned}
$$

▲

تمرین ۲۱.۱. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $y' = \frac{۱+۳x^{۲}}{۳y^{۲}-۶y}$

(ب) $y' = xy^{۳}(۱+x^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$

(ج) $y' = x^{۲}+y^{۲}+x^{۲}y^{۲}+۱$

(د) $y' = (۳x^{۲}-۱)(۳+۲y)$

۴.۱ معادلات کامل

به عنوان یک مثال ساده معادله مرتبه اول $xdy + ydx = ۰$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که برای تابع $\psi(x,y) = xy$ داریم:

$$\text{مشتق تابع } \psi \text{ نسبت به } x = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\psi(x,y) = xy \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

نمادهای $\frac{d\psi}{dx}$ و ψ_x برای مشتق جزیی تابع نسبت به متغیر x استفاده می‌شوند.

پس برای تابع $\psi(x,y)=xy=c$ داریم

$$\frac{d\psi}{dx}=\circ \Rightarrow ydx+xdy=\circ$$

و $\psi(x,y)=xy$ در معادله صدق می‌کند.
تابع $\psi(x,y)=xy=c$ چه خاصیتی داشت که جواب معادله $ydx+xdy=\circ$ شد؟

$$\left.\begin{array}{l} ydx+xdy=\circ \\ M(x,y)dx+N(x,y)dy=\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M(x,y)=y \\ N(x,y)=x \end{array}$$

$$\psi(x,y)=xy \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\psi}{\partial x}=y=M(x,y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=x=N(x,y) \end{array}\right.$$

در حالت کلی

تعریف ۲۲.۱. معادله مرتبه اول $M(x,y)dx+N(x,y)dy=\circ$ را معادله کامل گوییم هرگاه تابعی مانند $\psi(x,y)$ وجود داشته باشد، به طوری که $\psi_x=M(x,y)$ و $\psi_y=N(x,y)$. ▲

با استفاده از تعریف معادله کامل به راحتی می‌توان دید که $\psi(x,y)=c$ جواب معادله است.

قضیه ۲۳.۱. اگر معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=\circ$ یک معادله کامل باشد، آنگاه $\psi(x,y)=c$ جواب معادله است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که $\psi(x,y)=c$ در معادله صدق می‌کند.

$$\psi(x,y)=c \Rightarrow \frac{d}{dx}\psi(x,y)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\circ$$

طبق تعریف

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=M(x,y), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=N(x,y)$$

$$\Rightarrow M(x,y) + N(x,y)\cdot \frac{dy}{dx} = ۰$$
$$\Rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰.$$

■

حال سؤال طبیعی این است که (۱) از کجا تشخیص بدهیم که یک معادله کامل است؟ (۲) در یک معادله کامل چگونه تابع $\psi(x,y)$ را پیدا کنیم؟

قضیه زیر محکی برای کامل بودن یک معادله مرتبه اول است و به سوال بالا قسمت (۱) پاسخ می‌دهد.

قضیه ۲۴.۱. معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$ یک معادله کامل است اگر و تنها اگر $M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = N_x$.

اثبات. اثبات یک طرف قضیه بالا به راحتی دیده می‌شود.

$$\text{معادله کامل باشد} \overset{\text{طبق تعریف}}{\Rightarrow} \exists\ \psi(x,y)\ \begin{array}{l}\psi_x = M\\ \psi_y = N\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = \psi_{x,y} = \frac{\partial M}{\partial y}\\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = \psi_{y,x} = \frac{\partial N}{\partial x}\end{cases}$$

$$\psi_{x,y} = \psi_{y,x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

از اثبات طرف دوم، صرف نظر می‌کنیم. ■

پس با توجه به قضیه قبل به راحتی می‌توانیم تشخیص بدهیم که یک معادله کامل هست یا نه.

مثال ۲۵.۱. کدامیک از معادلات زیر کامل هستند؟

(الف) $(y\sin x + xy\cos x)dx + (x\sin x + ۱)dy = ۰$

$$\begin{array}{ll} M(x,y) = y\sin x + xy\cos x & \Rightarrow M_y = \sin x + x\cos x\\ N(x,y) = x\sin x + ۱ & \Rightarrow N_x = \sin x + x\cos x\end{array}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow \text{معادله کامل است}$$

(ب) $(y^{۲} + xy)dx - x^{۲}dy = ۰$

$$\begin{aligned} M(x,y) &= y^{۲} + xy &\Rightarrow M_y &= ۲y + x \\ N(x,y) &= -x^{۲} &\Rightarrow N_x &= -۲x \end{aligned}$$

$$M_y \neq N_x \Rightarrow \text{معادله کامل نیست}$$

▲

حال به پاسخ قسمت دوم سؤال بالا می‌پردازیم، که چگونه در یک معادله کامل، تابع $\psi(x,y)$ به عبارت دیگر جواب معادله را بیابیم.
ابتدا این روش را در حل یک مثال، بیان می‌کنیم و بعد به بیان روش حل در حالت کلی می‌پردازیم.

مثال ۲۶.۱. معادله $(y\sin x + xy\cos x)dx + (x\sin x + ۱)dy = ۰$ را حل کنید.
قبلاً دیدیم که معادله کامل است، زیرا دیدیم که $M_y = N_x$.

$$\text{معادله کامل} \overset{\text{تعریف}}{\Rightarrow} \exists\, \psi(x,y) \begin{array}{l} \psi_x = M(x,y) \\ \psi_y = N(x,y) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \psi_x = y\sin x + xy\cos x \\ \psi_y = x\sin x + ۱ \end{array}$$

و به دنبال یافتن ψ هستیم.
قدم اول.

$$\psi_y = x\sin x + ۱ \Rightarrow \psi(x,y) = \int (x\sin x + ۱)dy \Rightarrow$$

$$\psi(x,y) = xy\sin x + y + h(x) \qquad (۵.۱)$$

$h(x)$ تابعی که نسبت به y ثابت است پس فقط به x بستگی دارد. **قدم دوم.** از

$\psi(x,y)$ در ۵.۱ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\psi_x = M \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \psi_x = y\sin x + xy\cos x + h^{'}(x) \\ &\Rightarrow y\sin x + xy\cos x + h^{'}(x) = y\sin x + xy\cos x \\ &\Rightarrow h^{'}(x) = \circ \end{aligned}$$

$$h(x) = c_۱ \tag{۶.۱}$$

قدم سوم.

$$۶.۱ ، ۵.۱ \Rightarrow \psi(x,y) = xy\sin x + y + c_۱$$

$$\psi(x,y) = c \Rightarrow xy\sin x + y = c \quad \text{.جواب عمومی معادله}$$

▲

در حالت کلی برای یافتن پاسخ معادله مرتبه کامل $Mdx + Ndy = \circ$ که در آن بنا به تعریف تابع ψ وجود دارد که $\psi_y = N, \psi_x = M$. می‌توانیم به یکی از سه روش زیر تابع ψ را پیدا کنیم.

(الف) (۱) از رابطه $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال بگیریم.
(۲) از ψ به دست آمده نسبت به y مشتق بگیریم.
(۳) حاصل مرحله (۲) را مساوی N قرار دهیم تا تابع $h^{'}(y)$ که از مرحله (۲) ایجاد می‌شود به دست بیاید. در نتیجه $h(y)$ به دست می‌آید.
(۴) $\psi(x,y) = c$ جواب عمومی معادله

(ب) (۱) از رابطه $\psi_y = N$ نسبت به y انتگرال بگیریم.
(۲) از ψ به دست آمده نسبت به x مشتق بگیریم.
(۳) حاصل مرحله (۲) را مساوی M قرار دهیم تا $h^{'}(x)$ که در مرحله (۲) ایجاد می‌شود به دست بیاید. در نتیجه $h(x)$ به دست می‌آید.
(۴) $\psi(x,y) = c$ جواب عمومی معادله

(ج) (۱) از رابطه $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال بگیریم.

(۲) از رابطه $\psi_y = N$ نسبت به y انتگرال بگیریم.
(۳) دو تابع ψ به دست آمده از مراحل (۱) و (۲) را مساوی قرار دهیم تا $h(x)$ و $h(y)$ معلوم شود.
(۴) $\psi(x,y) = c$ جواب عمومی معادله

مثال ۲۷.۱. معادله $(۳y + e^x)dx + (۳x + \cos y)dy = ۰$ را حل کنید.

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = ۳y + e^x & \Rightarrow M_y = ۳ \\ N(x,y) = ۳x + \cos y & \Rightarrow N_x = ۳ \end{array}\right. \Rightarrow M_y = N_x$$

$$\text{معادله کامل} \overset{\text{تعریف}}{\Rightarrow} \exists\, \psi(x,y) \quad \begin{array}{l} \psi_x = ۳y + e^x \\ \psi_y = ۳x + \cos y \end{array}$$

۱. از رابطه $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$\Rightarrow \psi(x,y) = ۳xy + e^x + h(y)$$

۲. از $\psi_y = N$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

$$\Rightarrow \psi(x,y) = \int (۳x + \cos y)dy$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) = ۳xy + \sin y + h(x)$$

۳. ψ به دست آمده از (۱) و (۲) را مساوی قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{l} \Rightarrow ۳xy + e^x + h(y) = ۳xy + \sin y + h(x) \\ \Rightarrow h(x) = e^x, \quad h(y) = \sin y \end{array}$$

۴.

$$\text{جواب عمومی معادله} \quad \psi(x,y) = ۳xy + e^x + \sin y = c$$

▲

مثال ۲۸.۱. معادله $(۴x^۳y+y^۴)dx+(x^۴+۴xy^۳)dy=۰$ را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} M(x,y)=۴x^۳y+y^۴ & \Rightarrow M_y=۴x^۳+۴y^۳ \\ N(x,y)=x^۴+۴xy^۳ & \Rightarrow N_x=۴x^۳+۴y^۳ \end{array} \Rightarrow M_y=N_x$$

$$\text{معادله کامل} \overset{\text{تعریف}}{\Rightarrow} \exists\, \psi(x,y) \begin{array}{ll} \psi_x=۴x^۳y+y^۴ & (۱) \\ \psi_y=x^۴+۴xy^۳ & (۲) \end{array}$$

۱. از رابطه $\psi_x=M$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$(۱) \Rightarrow \psi(x,y)=\int(۴x^۳y+y^۴)dx$$

$$\Rightarrow \psi(x,y)=x^۴y+xy^۴+h(y) \qquad (۷.۱)$$

۲. از ψ نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$۷.۱ \Rightarrow \psi_y=x^۴+۴xy^۳+h^{'}(y)$$

۳. ψ_y را مساوی N قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{ll} (۲) & \Rightarrow x^۴+۴xy^۳+h^{'}(y)=x^۴+۴xy^۳ \\ & \Rightarrow h^{'}(y)=۰ \\ & \Rightarrow h(y)=c_۱ \end{array}$$

۴.

$$\begin{array}{l} \psi(x,y)=x^۴y+xy^۴+c_۱=c_۲ \\ \Rightarrow x^۴y+xy^۴=c \quad \text{جواب عمومی معادله} \end{array}$$

▲

تمرین ۲۹.۱. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $(x^۲+y^۲)^۲(xdx+ydy)+۲dx+۳dy=۰$

(ب) $(۲+۲x^۲y^{\frac{۱}{۲}})ydx+(x^۲y^{\frac{۱}{۲}}+۲)xdy=۰$

(ج) $y^۲e^{-y}dx+(۲x-xy+۲)ye^{-y}=۰$

۵.۱ عامل انتگرال‌ساز

معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ را در نظر بگیرید دیدیم که برای اینکه این معادله کامل باشد باید تعادلی در معادله برقرار باشد $(M_y=N_x)$. بسیاری از معادلات این خاصیت را ندارند، ولی می‌توانیم با تغییراتی آنها را به معادله کامل تبدیل کنیم.

مثال ۳۰.۱. معادله $(y^۲+xy)dx-x^۲dy=۰$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} M(x,y)=y^۲+xy & \Rightarrow M_y=۲y+x \\ N(x,y)=-x^۲ & \Rightarrow N_x=-۲x \end{array} \Rightarrow M_y\neq N_x$$

معادله کامل نیست. حال معادله را در تابع $\mu(x,y)=\frac{۱}{xy^۲}$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{array}{ll} \times\frac{۱}{xy^۲} & \Rightarrow \frac{۱}{xy^۲}(y^۲+xy)dx-\frac{۱}{xy^۲}x^۲dy=۰ \\ & \Rightarrow (\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y})dx-\frac{x}{y^۲}dy=۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} M(x,y)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} & \Rightarrow M_y=-\frac{۱}{y^۲} \\ N(x,y)=-\frac{x}{y^۲} & \Rightarrow N_x=-\frac{۱}{y^۲} \end{array} \Rightarrow M_y=N_x$$

معادله کامل است. ▲

به چنین توابعی که معادله مرتبه اول را تبدیل به معادله کامل می‌کند، عامل انتگرال‌ساز می‌گوییم. عامل انتگرال‌ساز مثال بالا تابع $\frac{۱}{xy^۲}$ است.

سؤال. چگونه تابع عامل انتگرال‌ساز را پیدا کنیم.

به دنبال عامل انتگرال‌ساز $\mu(x,y)$ هستیم به طوری که با ضرب کردن آن در طرفین معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$، معادله جدید یک معادله کامل باشد.

$$\begin{array}{rl} & M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰ \\ \times\mu(x,y)\Rightarrow & (\mu M)dx+(\mu N)dy=۰ \end{array}$$

باید μ را به گونه‌ای پیدا کنیم که تساوی $(\mu N)_x \stackrel{?}{=} (\mu M)_y$ برقرار باشد.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \\
&\Rightarrow \mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \quad (*) \\
&\Rightarrow \mu(x,y) = \text{تابعی است که در معادله دیفرانسیل فوق صدق می‌کند}
\end{aligned}$$

متاسفانه حل معادله $(*)$ در حالت کلی آسان نیست ($(*)$ معادله دیفرانسیل جزیی است) ولی می‌توانیم با اضافه کردن شرایطی بر μ، در حالت‌های خاص عامل انتگرالساز را بیابیم.
حالت اول. اگر μ فقط به x بستگی داشته باشد.

$$\begin{aligned}
\mu = \mu(x) \Rightarrow \quad & \mu_x = \tfrac{d\mu}{dx} \\
& \mu_y = \circ \\
& \mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \\
\mu_y = \circ \Rightarrow \quad & \mu(M_y - N_x) = \tfrac{d\mu}{dx} N \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{d\mu}{\mu} = \tfrac{M_y - N_x}{N} dx
\end{aligned}$$

اگر تابع $\frac{M_y-N_x}{N}$ فقط تابعی از x باشد، معادله بالا یک معادله جداشدنی است و از آن می‌توان به راحتی تابع $\mu(x)$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned}
R(x) &= \tfrac{M_y - N_x}{N} \\
&\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int R(x)dx \\
&\Rightarrow \ln \mu = \int R(x)dx \\
&\Rightarrow \mu(x) = e^{\int R(x)dx}
\end{aligned}$$

نتیجه ۳۱.۱. اگر $R(x) = \frac{M_y-N_x}{N}$ فقط به x بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx}$$

عامل انتگرال‌ساز است.

حالت دوم. اگر μ فقط به y بستگی داشته باشد.

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_x = \circ \\ \mu_y = \frac{d\mu}{dy} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \\ \mu_x = \circ \Rightarrow & \mu(M_y - N_x) = -\frac{d\mu}{dy} M \\ \Rightarrow & \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{-M} dy \end{array}$$

اگر تابع $\frac{M_y - N_x}{-M}$ فقط تابعی از y باشد، معادله بالا یک معادله جداشدنی است و از آن می‌توان به راحتی تابع $\mu(y)$ را به دست آورد.

$$\begin{array}{rl} R(y) & = \frac{M_y - N_x}{-M} \\ & \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int R(y)dy \\ & \Rightarrow \ln \mu = \int R(y)dy \\ & \Rightarrow \mu(y) = e^{\int R(y)dy} \end{array}$$

نتیجه ۳۲.۱. اگر $R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M}$ فقط به y بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\mu(y) = e^{\int R(y)dy}$$

عامل انتگرالساز است.

حالت سوم. اگر μ تابعی از ترکیب خاصی از متغیرهای x و y باشد.

$$\mu = \mu(z(x, y))$$

برای مثال تابع $z(x, y)$ به صورت زیر باشد

$$z = xy, \quad z = \frac{x}{y}, \quad z = x + y, \quad z = x^۲ + y^۲$$

در این حالت هم باید تابع $\mu(x,y)$ را به صورت تابعی از متغیر z تبدیل کنیم.

$$\mu(x,y)=\mu(z)\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mu_x=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ \mu_y=\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \mu(M_y-N_x)=\mu_x N-\mu_y M \\ \Rightarrow\quad & \mu(M_y-N_x)=\frac{d\mu}{dz}\left(\frac{\partial z}{\partial x}N-\frac{\partial z}{\partial y}M\right) \\ \Rightarrow\quad & \frac{d\mu}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{z_xN-z_yM}dz \end{aligned}$$

اگر μ تابعی از ترکیب خاصی از x و y مانند z باشد، باید تابع $R(z)=\frac{M_y-N_x}{z_xN-z_yM}$ فقط تابعی از z باشد، در این صورت

$$\mu(z)=e^{\int R(z)dz}$$

عامل انتگرالساز است.

نتیجه ۳۳.۱. شرط اینکه معادله داری عامل انتگرال‌ساز بر حسب xy باشد، این است که

$$z=xy\Rightarrow z_x=y,\quad z_y=x$$

$$\Rightarrow R(xy)=\frac{M_y-N_x}{yN-xM}$$

فقط به xy بستگی داشته باشد.

مثال ۳۴.۱. معادله دیفرانسیل $(۱+y^۲)dx+xydy=۰$ را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} M(x,y)=۱+y^۲ & \Rightarrow M_y=۲y \\ N(x,y)=xy & \Rightarrow N_x=y \end{array} \quad \Rightarrow M_y\neq N_x$$

معادله کامل نیست. $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{x}=R(x)$ فقط به x بستگی دارد.

$$\Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int R(x)dx} \quad \text{عامل انتگرال‌ساز است}$$

$$\mu(x)=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

$$\times x \quad \Rightarrow x(1+y^2)dx+x^2ydy=0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} M(x,y)=x(1+y^2) & \Rightarrow M_y=2xy \\ N(x,y)=x^2y & \Rightarrow N_x=2xy \end{array} \Rightarrow M_y=N_x$$

معادله کامل است. در نتیجه

$$\exists\psi(x,y) \quad \begin{array}{ll} \psi_x=x(1+y^2) & (1) \\ \psi_y=x^2y & (2) \end{array}$$

از (۱) نسبت به x انتگرال‌گیری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \int x(1+y^2)dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2(1+y^2)+h(y) \\ &\Rightarrow \psi_y=x^2y+h'(y) \overset{(2)}{=} x^2y \\ &\Rightarrow h'(y)=0 \\ &\Rightarrow h(y)=c_1 \\ &\Rightarrow \psi(x,y)=\tfrac{1}{2}x^2(1+y^2)=c \quad \text{جواب عمومی معادله} \end{aligned}$$

▲

مثال ۱.۳۵. معادله دیفرانسیل $ydx+(2x-xy+2)dy=0$ را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} M(x,y)=y & \Rightarrow M_y=1 \\ N(x,y)=2x-xy+2 & \Rightarrow N_x=2-y \end{array} \Rightarrow M_y\neq N_x$$

معادله کامل نیست. تابع $\frac{M_y-N_x}{-M}=\frac{1-2+y}{-y}=\frac{1-y}{y}=\frac{1}{y}-1=R(y)$ فقط به y

بستگی دارد.

$$\Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int R(y)dy} \text{ عامل انتگرال‌ساز است}$$
$$\mu(y) = e^{\int (\frac{۱}{y} - ۱)dy} = e^{\ln y - y} = ye^{-y}$$

$$\times ye^{-y} \quad \Rightarrow y^۲e^{-y}dx + ye^{-y}(۲x - xy + ۲)dy = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{array}{ll} M(x,y) = y^۲e^{-y} & \Rightarrow M_y = ۲ye^{-y} - y^۲e^{-y} \\ N(x,y) = ye^{-y}(۲x - xy + ۲) & \Rightarrow N_x = ۲ye^{-y} - y^۲e^{-y} \end{array}$$

$M_y = N_x$ معادله کامل است. در نتیجه

$$\exists\psi(x,y) \quad \begin{array}{ll} \psi_x = y^۲e^{-y} & (۱) \\ \psi_y = ye^{-y}(۲x - xy + ۲) & (۲) \end{array}$$

از (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) &= y^۲xe^{-y} + h(y) \\
&\Rightarrow \psi_y = ۲xye^{-y} - y^۲xe^{-y} + h'(y) \\
\psi_y = N &\overset{(۲)}{\Rightarrow} ۲xye^{-y} - y^۲xe^{-y} + h'(y) = ye^{-y}(۲x - xy + ۲) \\
&\Rightarrow h'(y) = ۲ye^{-y} \\
&\Rightarrow h(y) = \int ۲ye^{-y}dy \\
&y = u \Rightarrow dy = du \\
&e^{-y}dy = dv \Rightarrow v = -e^{-y} \\
&\Rightarrow h(y) = \int ۲ye^{-y}dy = -۲ye^{-y} + ۲\int e^{-y}dy \\
&\Rightarrow h(y) = -۲ye^{-y} - ۲e^{-y} \\
&\Rightarrow \psi(x,y) = y^۲xe^{-y} - ۲ye^{-y} - ۲e^{-y} = c
\end{aligned}$$

▲

مثال ۳۶.۱. معادله $x(1-xy)dy = y(1+xy)dx$ را حل کنید.

$$y(1+xy)dx - x(1-xy)dy = 0$$

$$\begin{array}{ll} M(x,y) = y(1+xy) & \Rightarrow M_y = 1+2xy \\ N(x,y) = -x(1-xy) & \Rightarrow N_x = -1+2xy \end{array} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

معادله کامل نیست.

$$M_y - N_x = 1 + 2xy + 1 - 2xy = 2$$

$$R(xy) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{2}{-xy(1-xy) - xy(1+xy)} = \frac{-1}{xy}$$

در نتیجه معادله دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu(x,y)$ تابعی از xy است و

$$\mu(xy) = e^{\int R(xy)d(xy)}$$

$$\mu(xy) = e^{\int \frac{-d(xy)}{xy}} = e^{-\ln(xy)} = \frac{1}{xy}$$

معادله داده شده $y(1+xy)dx - x(1-xy)dy = 0$

$$\times \frac{1}{xy} \quad \Rightarrow \frac{1}{x}(1+xy)dx - \frac{1}{y}(1-xy)dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} M(x,y) = \frac{1}{x}(1+xy) & \Rightarrow M_y = 1 \\ N(x,y) = -\frac{1}{y}(1-xy) & \Rightarrow N_x = 1 \end{array} \Rightarrow M_y = N_x$$

معادله کامل است. در نتیجه

$$\exists \psi(x,y) \quad \begin{array}{ll} \psi_x = \frac{1}{x} + y & (1) \\ \psi_y = -\frac{1}{y} + x & (2) \end{array}$$

از (۱) بر حسب x انتگرال می‌گیریم

$$\psi(x,y) = \ln x + xy + h(y)$$

از ψ نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \psi_y = x + h^{'}(y) \\ \psi_y = N \quad & \overset{(۲)}{\Rightarrow} x + h^{'}(y) = -\tfrac{۱}{y} + x \\ & \Rightarrow h^{'}(y) = -\tfrac{۱}{y} \\ & \Rightarrow h(y) = -\ln y \\ & \Rightarrow \psi(x,y) = \ln x + xy - \ln y = c. \end{aligned}$$

▲

تمرین ۳۷.۱.

(الف) $(e^{-x} + \sin y)dx + \cos y dy = ۰$

(ب) $(\frac{y}{x}\ln(\ln y) + \frac{۲}{۳}xy^{۴})dx + (\frac{\ln x}{\ln y} + x^{۲}y^{۳})dy = ۰$

(ج) $(۱ + y^{۲})dx + xydy = ۰$

(د) $(x - \cos y)dx - \sin y dy = ۰$

(ه) $xdy - ydx = x^{۲}ydy$

(ی) $xy^{'} + y - x(۱ - x^{۲}y^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = ۰$

تمرین ۳۸.۱. شرط داشتن عامل انتگرال‌ساز به صورت تابعی از $z = x + y$ را بیابید.

۶.۱ معادلات همگن

به یاد داریم که شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل $y' = f(x,y)$ است. حال اگر بتوانیم تابع $f(x,y)$ را به شکل تابعی برحسب $\frac{y}{x}$ بنویسیم، به این معادله، معادله همگن گوییم. در این صورت با یک تغییر متغیر ساده به فرم زیر می‌توان معادله را به یک معادله جداشدنی تبدیل و حل کنیم.
قرار می‌دهیم $z := \frac{y}{x}$. پس داریم:

$$y = xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

در نتیجه معادله $y' = f(\frac{y}{x})$ به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} y' = f(\tfrac{y}{x}) \quad &\Longrightarrow z + x\tfrac{dz}{dx} = f(z) \\ &\Longrightarrow x\tfrac{dz}{dx} = f(z) - z \\ &\Longrightarrow \tfrac{dz}{f(z)-z} = \tfrac{dx}{x} \end{aligned}$$

که یک معادله جداشدنی است.

مثال ۳۹.۱. معادلات (الف) و (ب) همگن هستند و معادله (ج) همگن نیست.

(الف) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^۲+۲xy}{x^۲} = (\frac{y}{x})^۲ + ۲(\frac{y}{x})$

(ب) $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\frac{x}{y} + \frac{۱+\frac{y}{x}}{۱-\frac{y}{x}}$

(ج) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^۳+۲xy}{x^۲}$

▲

مثال ۴۰.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} &۲xyy' = ۳y^۲ - x^۲ \\ &y' = \tfrac{۳}{۲}\tfrac{y}{x} - \tfrac{۱}{۲}\tfrac{x}{y} = \tfrac{۳}{۲}\tfrac{y}{x} - \tfrac{۱}{۲}\tfrac{۱}{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

تغییر متغیر $z := \frac{y}{x}$. در نتیجه

$$y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow z + xz' = \frac{۳}{۲}z - \frac{۱}{۲z}$$

با انجام ساده‌سازی و نوشتن معادله جداشدنی، داریم:

$$\begin{aligned} &xz' = \tfrac{۳}{۲}z - \tfrac{۱}{۲z} - z = \tfrac{z^۲-۱}{۲z} \\ &\Rightarrow \tfrac{۲zdz}{z^۲-۱} = \tfrac{dx}{x} \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین z به دست می‌آید.

$$\int \frac{۲zdz}{z^۲-۱} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z^۲-۱| = \ln|x| + c_۱$$

برای از بین بردن $\ln$ به طرفین تابع e را اثر می‌دهیم.

$$z^{۲} - ۱ = cx \quad (c = e^{c_۱})$$

حال z را همان $\frac{y}{x}$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(\frac{y}{x})^{۲} - ۱ = cx \Rightarrow y^{۲} = cx^{۳} + x^{۲}.$$

▲

تمرین ۴۱.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$(x - \sqrt{xy})y' = y$$

حال این پرسش مطرح می‌شود که آیا می‌توان بعضی معادلات غیرهمگن را با تغییر متغیر مناسب به معادله همگن تبدیل کرد؟ به عنوان مثال آیا می‌توان معادله $y' = \frac{x+y+۱}{x-y+۳}$ را همگن کرد؟ جواب این سؤال مثبت است.

در حالت کلی گاهی معادله $y' = f(x, y)$ همگن نیست ولی با تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را همگن کرد.

معادله $y' = F(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f})$ را در نظر بگیرید. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول. $c = ۰$ و $f = ۰$. در این صورت داریم

$$y' = F(\frac{a + b\frac{y}{x}}{d + e\frac{y}{x}})$$

که یک معادله همگن است.

حالت دوم. $c \neq ۰$ یا $f \neq ۰$ و $ae = bd$.

در این صورت یک ترکیب خطی مناسب از x و y به صورت $\alpha x + \beta y$ را می‌توانیم متغیر جدیدی تعریف کنیم و معادله را ساده کنیم. (مقادیر α و β به مقادیر a، b، c و d بستگی دارد.

مثال ۴۲.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + ۱}{۲x + ۲y + ۳}$$

در این معادله $ae = bd$. قرار می‌دهیم $z := x + y$ پس داریم:

$$z' = 1 + y'$$

و پس از بازنویسی معادله داریم:

$$z' - 1 = \frac{z+1}{2z+3}$$

که یک معادله جداشدنی است.

$$\begin{aligned}
&z' = \tfrac{z+1}{2z+3} + 1 = \tfrac{3z+4}{2z+3} \Rightarrow \tfrac{2z+3}{3z+4} dz = dx \\
&\Rightarrow \int \frac{2z+3}{3z+4} dz = \int dx \\
&\Rightarrow \tfrac{2}{3} \int \frac{z+\frac{3}{2}}{z+\frac{4}{3}} dz = x + c \\
&\Rightarrow \tfrac{2}{3} \int \frac{z+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}{z+\frac{4}{3}} dz = x + c \\
&\Rightarrow \tfrac{2}{3} z + \tfrac{1}{9} \ln |z + \tfrac{4}{3}| = x + c \\
&\Rightarrow \tfrac{2}{3}(x+y) + \tfrac{1}{9} \ln |x + y + \tfrac{4}{3}| = x + c.
\end{aligned}$$

▲

حالت سوم. $c \neq 0$ یا $f \neq 0$ و $ae \neq bd$.

در این حالت با تغییر متغیرهای مناسب $x = X + h$ و $y = Y + k$ که h و k به ضرایب a, b, c, d, e, f بستگی دارد، معادله را همگن می‌کنیم. توجه داریم که در این صورت:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

مثال ۴۳.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+3}, \quad ae \neq bd$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{l} x = X + h \\ y = Y + k \end{array} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X + Y + h + k + ۱}{X - Y + h - k + ۳}$$

برای اینکه معادله همگن شود باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} h + k + ۱ = ۰ \\ h - k + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} h = -۲ \\ k = ۱ \end{array}$$

با بازنویسی معادله داریم:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y}{X - Y} = \frac{۱ + \frac{Y}{X}}{۱ - \frac{Y}{X}}$$

که معادله همگن است.

$$\begin{aligned} z = \tfrac{Y}{X} \quad & \Rightarrow Y = Xz \\ & \Rightarrow Y' = Xz' + z \\ & \Rightarrow Xz' + z = \tfrac{۱+z}{۱-z} \\ & \Rightarrow Xz' = \tfrac{۱+z}{۱-z} - z \\ & \Rightarrow Xz' = \tfrac{z^۲+۱}{۱-z} \\ & \Rightarrow \tfrac{۱-z}{z^۲+۱} dz = \tfrac{dX}{X} \\ & \Rightarrow \int \frac{dz}{z^۲ + ۱} - \int \frac{z}{z^۲ + ۱} dz = \ln|X| + c \\ & \Rightarrow \tan^{-۱} z - \tfrac{۱}{۲} \ln(۱ + z^۲) = \ln|X| + c. \end{aligned}$$

چون $z = \frac{Y}{X} = \frac{y-۱}{x+۲}$ داریم:

$$\tan^{-۱}(\frac{y - ۱}{x + ۲}) - \frac{۱}{۲} \ln(۱ + (\frac{y - ۱}{x + ۲})^۲) = \ln|x + ۲| + c.$$

▲

تمرین ۴۴.۱. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $۲xyy' + x^۲ - y^۲ = ۰$

(ب) $(x - ۳y + ۳)dx - (۲x - ۶y + ۱)dy = ۰$

۷.۱ تغییر متغیر

گاهی برای حل معادله دیفرانسیل کافی است یک تغییر متغیر مناسب اعمال کنیم و معادله را به معادله ساده‌تری تبدیل کنیم. قبلاً در حل معادلات برنولی و معادلات همگن از تغییر متغیر استفاده کرده‌ایم.

در زیر چند مثال حل می‌کنیم که از تغییر متغیر برای ساده‌سازی معادله استفاده کرده‌ایم. باید توجه داشته باشیم که در حالت کلی برای این روش فرمول مشخصی وجود ندارد و اینکه چه تغییر متغیری اعمال کنیم، کاملا به شکل معادله بستگی دارد.

مثال ۴۵.۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x(۲yy' + ۲x) = xe^{\frac{x^۲+y^۲}{x}} + (x^۲ + y^۲) \tag{۸.۱}$$

قرار می‌دهیم $z := \frac{x^۲+y^۲}{x}$ در نتیجه داریم:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{x(۲x + ۲yy') - (x^۲ + y^۲)}{x^۲}$$

با بازنویسی معادله ۸.۱، داریم:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{x(۲x+۲yy')-(x^۲+y^۲)}{x^۲} = \tfrac{e^{\frac{x^۲+y^۲}{x}}}{x} \\
&\Rightarrow z' = \tfrac{e^z}{x} \Rightarrow e^{-z}dz = \tfrac{dx}{x} \\
&\Rightarrow -e^{-z} = \ln|x| + c \Rightarrow -e^{-\frac{x^۲+y^۲}{x}} = \ln|x| + c.
\end{aligned}$$

▲

مثال ۴۶.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$y' = ۲\frac{y}{x} + x\tan\frac{y}{x^۲}$$

قرار می‌دهیم $z := \frac{y}{x^۲}$، در نتیجه $y = zx^۲$. بنابراین $y' = x^۲z' + ۲xz$.
با بازنویسی معادله داریم:

$$\begin{aligned}
&x^۲z' + ۲xz = ۲zx + x\tan z \Rightarrow xz' = \tan z\\
&\Rightarrow \tfrac{dz}{\tan z} = \tfrac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos z}{\sin z}dz = \ln|x| + c_۱\\
&\Rightarrow \ln|\sin z| = \ln|x| + c_۱\\
&\Rightarrow |\sin z| = cx \quad (c = e^{c_۱})\\
&\Rightarrow |\sin \tfrac{y}{x^۲}| = cx.
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۴۷.۱.

(الف) $yy'\sin x = \cos(\sin x - y^۲)$

(ب) $(۱ + y^۲) + (x - e^{\tan^{-۱}y})y' = ۰$

(ج) $xy' = e^{-xy} - y$

(د) $y' = xy + ۲y\ln y \quad y(۰) = ۱$

۸.۱ تغییر نقش متغیر مستقل و وابسته

اگر متغیر مستقل را با x و متغیر وابسته را با y نمایش دهیم، یعنی $y = f(x)$، آنگاه با فرض معکوس‌پذیری تابع y می‌توانیم بنویسیم $x = f^{-۱}(y)$. به عبارت دیگر نقش متغیر مستقل و وابسته را عوض می‌کنیم. در بعضی از موارد برای حل معادله دیفرانسیل این کار باعث می‌شود، معادله به یکی از فرم‌هایی تبدیل شود که حل آن را می‌دانیم.
برای این کار کافی است به جای $\frac{dy}{dx}$، با ضرب طرفین معادله در $\frac{dx}{dy}$ تابع مجهول را x و متغیر مستقل را y در نظر بگیریم و معادله را حل کنیم.

مثال ۴۸.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
& y' = \frac{1}{x(1+xe^y)} \\
& x(1+xe^y)y' = 1 \\
\times\frac{dx}{dy} \Longrightarrow \quad & x(1+xe^y) = \frac{dx}{dy} \\
& x' - x = x^2 e^y \qquad \text{معادله برنولی}
\end{aligned}
$$

حل را ادامه بدهید

۱. ضرب طرفین در x^{-2}، $x^2x' - x^{-1} = e^y$.

۲. **تغییر متغیر** $z = x^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = z' = -x^{-2}x'$

۳. معادله جدید $-z' - z = e^y$ که یک معادله خطی مرتبه اول است.

▲

مثال ۴۹.۱. معادله زیر را حل کنید.

$$
ydx + x(xy^3 + 1)dy = 0
$$

معادله نسبت به y' خطی نیست. سعی می‌کنیم معادله را نسبت به $\frac{dx}{dy}$ در نظر بگیریم.

$$
\begin{aligned}
& y\frac{dx}{dy} + x(xy^3 + 1) = 0 \\
& \Rightarrow yx' + x + x^2y^3 = 0 \\
& \Rightarrow x' + \frac{1}{y}x = -x^2y^2 \qquad \text{معادله برنولی}
\end{aligned}
$$

۱. ضرب طرفین در x^{-2}. $x^{-2}x' + \frac{1}{y}x^{-1} = -y^2$.

۲. **تغییر متغیر** $z = x^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -x^2x'$

۳. معادله جدید $-z' + \frac{1}{y}z = -y^2$ که یک معادله خطی مرتبه اول است.

▲

مثال ۵۰.۱. معادله $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2-4}$ را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
\times\frac{dx}{dy} \Longrightarrow \quad & (x^2 - y^2 - 4)y' = 2xy \\
& x^2 - y^2 - 4 = 2xyx'
\end{aligned}
$$

با تغییر متغیر $z=x^2$، داریم $\frac{dz}{dy}=z'=2xx'$. پس داریم $z-y^2-4=yz'$. در نتیجه $z'-\frac{1}{y}z=-y^2-4$ که یک معادله خطی مرتبه اول است.

$$\begin{array}{ll} \mu(y)=e^{\int -\frac{1}{y}dy}=\frac{1}{y} & \Rightarrow \frac{d(z\frac{1}{y})}{dy}=-y-4y^{-1}\Rightarrow \\ z\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}y^2-4\ln y+c & \Rightarrow \frac{x^2}{y}=-\frac{1}{2}y^2-\ln y^4+c \end{array}$$

▲

تمرین ۵۱.۱. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $xy'+y=2x^2y'\ln y \quad y(1)=e$

(ب) $xy'(x-1+xe^y)=1$

(ج) $ydx-(2xy-e^{2y})dy=0$

۹.۱ تمرین‌های مروری

معادلات زیر را به هر روش که مناسب است حل نمایید.

(الف) $xdy=(x^2y^2(1+e^x)-y)dx$

(ب) $ye^y=(y^3+2xe^y)y'$

(پ) $(xy+y^2)dx+(xy-x^2)dy=0$

(ت) $2xyy'+(1+x)y^2=e^x$

(ث) $y^2+(x^2-xy+y^2)y'=0$

(ج) $(2+2x^2y^{\frac{1}{2}})ydx+(x^2y^{\frac{1}{2}}+2)xdy=0$

(چ) $(x-\ln y+y\ln x)dx+x(\ln y-\ln x)dy=0$

(ح) $ydx+(2x-xy+2)dy=0$

(خ) $2yy'+y^2\sin x-\sin x=0$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

در این فصل با حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی آشنا می‌شویم. برای این منظور ابتدا ساختار جواب‌های چنین معادلاتی را معرفی می‌کنیم. سپس روش کاهش مرتبه را بیان می‌کنیم. همچنین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرائب ثابت را بیان کرده و در نهایت با دو روش تغییر پارامتر و ضرائب نامعین برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرهمگن آشنا می‌شویم. به دلیل نیاز به محاسبات اعداد مختلط، در ادامه یادآوری مختصری از آشنایی با اعداد مختلط بیان می‌کنیم.

۱.۲ آشنایی با اعداد مختلط

با مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، صحیح $\mathbb{Z}$، گویا $\mathbb{Q}$ و اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ آشنا هستیم. در اینجا با مجموعه‌ای از اعداد به نام اعداد مختلط[۱] آشنا می‌شویم که مجموعه همه اعداد حقیقی را به عنوان زیرمجموعه دربردارد.
مجموعه اعداد مختلط که آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم عبارتست از مجموعه همه زوج‌های مرتب

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

برای عدد مختلط $z = (x, y) \in \mathbb{C}$، عدد x را قسمت حقیقی z می‌نامیم و با $\mathrm{Re}(z) = x$ نمایش می‌دهیم. همچنین عدد y را قسمت موهومی می‌نامیم و با

[۱] Compelex Number

$\mathrm{Im}(z) = y$ نمایش می‌دهیم.
واضح است که هر عدد حقیقی را می‌توان یک عدد مختلط با قسمت موهومی صفر در نظر گرفت، یعنی $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. از نظر هندسی هر عدد مختلط در حقیقت یک نقطه در صفحه مختصات است.

در زیر برای اعداد مختلط دو عمل جمع و ضرب را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. برای هر دو عدد مختلط z_1, z_2 دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

▲

خواص جمع و ضرب عدد مختلط

با توجه به تعریف جمع و ضرب اعداد مختلط و خواص اعمال جمع و ضرب اعداد حقیقی به راحتی می‌توان دید که خواص زیر برقرار است.

(الف) خاصیت جابه‌جایی

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

(ب) خاصیت شرکت‌پذیری

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{aligned}$$

(ج) خاصیت پخشی

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

(د) عضو خنثی

$$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C} \qquad \begin{array}{l} z + (0, 0) = (x, y) + (0, 0) = z, \quad (0, 0) = \text{عضو خنثی جمع} \\ z \cdot (1, 0) = z, \quad (1, 0) = \text{عضو خنثی ضرب} \end{array}$$

(ه) عضو قرینه

$$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C} \qquad \begin{array}{l} -z = (-x, -y) \\ z + (-z) = (0, 0) \end{array}$$

مثال ۲.۲. به راحتی می‌توان دید که

$$(0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \times y - 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times y) = (0, y) \tag{۱.۲}$$

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) \tag{۲.۲}$$

با توجه به دو مثال بالا عدد مختلط (x, y) را بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll} (x, y) = (x, 0) + (0, y) & \\ (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) & \text{طبق ۱.۲} \end{array} \tag{۳.۲}$$

▲

قرارداد: عدد مختلط $(0, 1)$ را با نماد i نمایش می‌دهیم.

$$\mathrm{i} := (0, 1)$$

با این قرارداد رابطه ۲.۲ نشان می‌دهد که

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$$

و رابطه ۳.۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$$

قرارداد: هر عدد مختلط $z=(x,y)$ را با $x+\mathrm{i}y$ نمایش می‌دهیم.
جمع و ضرب دو عدد مختلط را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned}
&(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)\\
&(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2).
\end{aligned}$$

مثال ۳.۲.

$$\begin{aligned}
&(-1+3\mathrm{i})+(2-5\mathrm{i})=1-2\mathrm{i}\\
&(-1+3\mathrm{i})\cdot(2-5\mathrm{i})=(-2+15)+\mathrm{i}((-1)(-5)+3\times 2)=13+11\mathrm{i}\\
&(1+\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=\mathrm{i}-1
\end{aligned}$$

▲

نکته ۴.۲. در حقیقت ضرب دو عدد مختلط را می‌توان مانند ضرب اعداد حقیقی و با استفاده از خواص آن انجام داد و به جای i^2، عدد -1 قرار دهیم.

$$\begin{aligned}
(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)&=x_1(x_2+\mathrm{i}y_2)+\mathrm{i}y_1(x_2+\mathrm{i}y_2)\\
&=x_1x_2+\mathrm{i}x_1y_2+\mathrm{i}y_1x_2+\mathrm{i}^2y_1y_2\\
&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)
\end{aligned}$$

تعریف ۵.۲. برای هر عدد مختلط $z=x+\mathrm{i}y$، مزدوج z را با نماد $\overline{z}$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.
▲

تعریف ۶.۲. برای هر عدد مختلط غیر صفر $z=x+\mathrm{i}y$، وارون z را با نماد z^{-1} نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $z^{-1}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$. مقدار $\sqrt{x^2+y^2}$ را قدر مطلق z می‌نامیم و با $|z|$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت

$$zz^{-1}=(x+\mathrm{i}y)\cdot\frac{(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}[(x^2+y^2)+\mathrm{i}0]=1$$

▲

مثال ۷.۲. عدد $\frac{-۱+۳\mathrm{i}}{۲+۵\mathrm{i}}$ را به فرم $x+\mathrm{i}y$ بنویسید.

$$\begin{aligned} z=\frac{-۱+۳\mathrm{i}}{۲+۵\mathrm{i}} &= (-۱+۳\mathrm{i})(۲+۵\mathrm{i})^{-۱} \\ &= (-۱+۳\mathrm{i})\frac{۲-۵\mathrm{i}}{۲۹} = \frac{۱}{۲۹}(-۱+۳\mathrm{i})(۲-۵\mathrm{i}) \\ &= \frac{۱}{۲۹}(۱۳+۱۱\mathrm{i}) = \frac{۱۳}{۲۹}+\frac{۱۱}{۲۹}\mathrm{i} \end{aligned}$$

در حالت کلی می‌توان تقسیم دو عدد مختلط را به صورت زیر به دست آورد.

$$\frac{z}{w} = zw^{-۱} = \frac{z\overline{w}}{|w|^۲}.$$

▲

نکته ۸.۲. به راحتی از تعاریف بالا خواص زیر نتیجه می‌شود.

(الف) $(\overline{z+w}) = \overline{z}+\overline{w}$

(ب) $(\overline{zw}) = \overline{z}\cdot\overline{w}$

(ج) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

(د) $z\overline{z} = |z|^۲$

(ه) $\overline{(\frac{z_۱}{z_۲})} = \frac{\overline{z_۱}}{\overline{z_۲}}$

(و) $|z_۱+z_۲| \leq |z_۱|+|z_۲|$

(ی) $|z_۱z_۲| = |z_۱|\cdot|z_۲|$

نتیجه ۹.۲. دیدیم که $\mathrm{i}^۲=-۱$. به عبارت دیگر می‌توان i را ریشه دوم -۱ در نظر گرفت. همچنین داریم $(-\mathrm{i})^۲=\mathrm{i}^۲=-۱$ یعنی $-\mathrm{i}$ نیز ریشه دوم -۱ است، در حالت کلی برای عدد حقیقی مثبت c می‌توانیم بنویسیم

$$\sqrt{-c} = \sqrt{-۱}\sqrt{c} = \pm\sqrt{c}\cdot\mathrm{i}$$

در نتیجه در معادله $ax^۲+by+c=۰$ که ریشه‌ها به صورت

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

است، اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$، داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

و در این حالت معادله دارای دو ریشه مختلط $x_1 = \frac{-b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ است و دو ریشه مزدوج یکدیگر هستند.

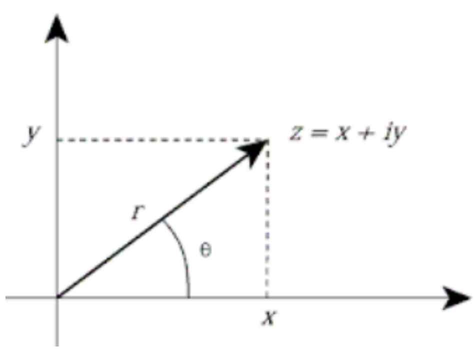
مثال ۱۰.۲. ریشه‌های معادله $x^2 - x + 1 = 0$ را بیابید.

$$\begin{aligned}
&\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 = -3 < 0 \\
&x = \tfrac{-b}{2a} \pm \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
&x_1 = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

▲

مختصات قطبی

همانطور که دیدیم هر عدد مختلط در حقیقت یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^2$ است. در اینجا هر عدد مختلط را با مختصات (r, θ) نمایش می‌دهیم که مختصات قطبی نام دارد.



$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} & \text{قدر مطلق است } r \\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} & \text{را آرگومان } z \text{ می‌نامیم } \theta \end{cases}$$

$$z=x+\mathrm{i}y=r\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

مثال ۱۱.۲. اعداد زیر را بر حسب مختصات قطبی بنویسید.

(الف) $z=\mathrm{i}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=1\\\theta=\tan^{-1}\frac{1}{0}=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow z=i=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$

(ب) $z=1+\mathrm{i}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{2}\\\theta=\tan^{-1}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow z=1+i=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$

▲

تابع نمایی مختلط

تعریف ۱۲.۲. تابع نمایی مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

▲

تابع نمایی مختلط نیز مانند تابع نمایی حقیقی دارای خاصیت زیر است.

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

همچنین می‌دانیم $\mathrm{i}^2=-1$، $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$، $\mathrm{i}^4=1$، $\mathrm{i}^5=-\mathrm{i}$ و .... در نتیجه اگر $z=x+\mathrm{i}y$ آنگاه

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+\mathrm{i}y}=e^x\cdot e^{\mathrm{i}y}\\ e^{\mathrm{i}y} &= 1+\mathrm{i}y+\tfrac{(\mathrm{i}y)^2}{2!}+\tfrac{(\mathrm{i}y)^3}{3!}+\cdots\\ &= 1+\mathrm{i}y-\tfrac{y^2}{2!}-\mathrm{i}\tfrac{y^3}{3!}+\tfrac{y^4}{4!}+\mathrm{i}\tfrac{y^5}{5!}-\cdots\\ &= (1-\tfrac{y^2}{2!}+\tfrac{y^4}{4!}-\cdots)+\mathrm{i}(y-\tfrac{y^3}{3!}+\tfrac{y^5}{5!}-\cdots) \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\cdots - \frac{y^۲}{۲!} + \frac{y^۴}{۴!} - ۱$ بسط تیلور تابع $\cos y$ و $\cdots - \frac{y^۳}{۳!} + \frac{y^۵}{۵!} - y$ بسط تیلور تابع $\sin y$ است. در نتیجه $e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$ و $e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$. به فرمول $e^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ فرمول اویلر گفته می‌شود.

$$\boxed{\text{فرمول اویلر}\quad e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

نتیجه ۱۳.۲. هر عدد مختلط را می‌توان به فرم نمایی نمایش داد. دیدیم که اگر $z = (x, y)$، θ, r مختصات قطبی z باشد، آنگاه

$$\begin{array}{ll} r = \sqrt{x^۲ + y^۲}, & \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} \\ x = r\cos\theta, & y = r\sin\theta \end{array}$$

در نتیجه

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

و با توجه به فرمول اویلر $z = re^{\mathrm{i}\theta}$.

مثال ۱۴.۲.

(الف) $e^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -۱ \Rightarrow\ e^{\mathrm{i}\pi} = -۱$

(ب) $z = e^{-۱+\mathrm{i}\frac{\pi}{۲}} = e^{-۱}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{۲}} = e^{-۱}(\cos\frac{\pi}{۲} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow z = \frac{\mathrm{i}}{e}$

▲

نتیجه ۱۵.۲. اعمال روی اعداد مختلط بر حسب مختصات قطبی:

(الف) $z_۱ \cdot z_۲ = r_۱e^{\mathrm{i}\theta_۱} \cdot r_۲e^{\mathrm{i}\theta_۲} = r_۱r_۲e^{\mathrm{i}(\theta_۱+\theta_۲)}$

(ب) $z^n = (re^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$

(ج) $\overline{z} = (\overline{re^{\mathrm{i}\theta}}) = re^{-\mathrm{i}\theta}$

(د) $z^{-۱} = (re^{\mathrm{i}\theta})^{-۱} = \frac{۱}{r}e^{-\mathrm{i}\theta}$

تمرین ۱۶.۲.

(الف) ضرب دو عدد $۱ + \mathrm{i}$ و $\sqrt{۳} - \mathrm{i}$ را در مختصات قطبی بنویسید.

(ب) عدد $(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{i})^{۱۰}$ را بیابید.

(ج) ریشه‌های معادله $z^{۴} = ۱$ را بیابید.

جدول ۱.۲: خلاصه اطلاعات مورد نیاز برای اعداد مختلط.

تعریف	مختصات حقیقی و موهومی	مختصات قطبی
نمایش	$x + \mathrm{i}y$	$re^{\mathrm{i}\theta}$
ارتباط	$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$	$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}},\ \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$
ضرب	$(x_{۱} + \mathrm{i}y_{۱}) \cdot (x_{۲} + \mathrm{i}y_{۲}) =$ $(x_{۱}x_{۲} - y_{۱}y_{۲}) + \mathrm{i}(y_{۱}x_{۲} + x_{۱}y_{۲})$	$r_{۱}e^{\mathrm{i}\theta_{۱}} \cdot r_{۲}e^{\mathrm{i}\theta_{۲}} = r_{۱}r_{۲}e^{\mathrm{i}(\theta_{۱}+\theta_{۲})}$
مزدوج	$x - \mathrm{i}y$	$re^{-\mathrm{i}\theta}$
وارون	$\frac{x-\mathrm{i}y}{x^{۲}+y^{۲}}$	$\frac{۱}{r}e^{-\mathrm{i}\theta}$
قدرمطلق	$\|z\| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$	r
تقسیم	$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{\|w\|^{۲}}$	$\frac{r_{۱}}{r_{۲}}e^{\mathrm{i}(\theta_{۱}-\theta_{۲})}$

تمرین ۱۷.۲. محاسبات زیر را انجام دهید. (یعنی حاصل عبارت‌ها را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.)

(الف) $(۵ - ۶\mathrm{i}) + (۳ + ۲\mathrm{i})$

(ب) $(۴ - \frac{۱}{۲}\mathrm{i}) - (۹ + \frac{۵}{۲})\mathrm{i}$

(پ) $(۲ - ۵\mathrm{i})(۴ - \mathrm{i})$

(ت) $(۱ - ۲\mathrm{i})(۸ - ۳\mathrm{i})$

(ث) $\frac{۱+۴\mathrm{i}}{۳+۲\mathrm{i}}$

(ج) $\frac{۳+۲\mathrm{i}}{۱-۴\mathrm{i}}$

(چ) $\frac{۱}{۱+\mathrm{i}}$

(ح) $\frac{۳}{۴-۳\mathrm{i}}$

(خ) $\mathrm{i}^{۱۹۹۹}$

(د) $\sqrt{-۲۵}$

(ذ) $\sqrt{-۳}\sqrt{-۱۲}$

(ر) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}-۲\mathrm{i}}$

(ز) $(۱-\sqrt{۳}\mathrm{i})^{۵}$

(ژ) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{۳}}$

(س) $e^{۲\pi\mathrm{i}}$

(ش) $e^{-\mathrm{i}\pi}$

(ص) $e^{\mathrm{i}+\pi}$

(ض) $(۱-\mathrm{i})^{۸}$

(ط) $(۱+\mathrm{i})^{۲۰}$

۲.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت $F(x,y,y',y'')=۰$ است. اگر بتوانیم y'' را بر حسب x، y و y' بنویسیم به فرم $y''=f(x,y,y')$ است.
مانند معادلات مرتبه اول، در اینجا هم معادلات مرتبه دوم را به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌کنیم. از اینجا به بعد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را در نظر می‌گیریم.

۳.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی

همانطور که می‌دانید فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به شکل زیر است.

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=G(x)$$

که P، Q، R و G توابعی بر حسب x هستند. به عبارت دیگر اگر طرفین را بر $P(x)$ تقسیم کنیم، معادله به فرم زیر در می‌آید.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x).$$

اگر برای هر x، $g(x) = ۰$، معادله را همگن و در غیر این صورت معادله را غیرهمگن می‌نامیم.
در ادامه به حل معادله مرتبه دوم خطی همگن می‌پردازیم. یعنی داریم:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰.$$

۴.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن

در ابتدا در طی چند قضیه و نکته به چگونگی شکل جواب عمومی این دسته از معادلات می‌پردازیم و خواهیم دید که برای یافتن جواب عمومی به چه جواب‌هایی نیاز داریم.
قرارداد. برای راحتی طرف چپ معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$ را با $D[y]$ نمایش می‌دهیم و آن را عملگر دیفرانسیل می‌نامیم. پس معادله به شکل زیر است.

$$D[y] := y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰.$$

مثال ۱۸.۲. اگر $p(x) = x^۲$ و $q(x) = ۱ + x$، آنگاه

$$D[y] = y'' + x^۲y' + (۱ + x)y$$

به عنوان مثال برای $y = \sin x$، داریم:

$$\begin{aligned} D[\sin ۳x] &= (\sin ۳x)'' + x^۲(\sin ۳x)' + (۱ + x)\sin ۳x \\ &= -۹\sin ۳x + ۳x^۲\cos ۳x + (۱ + x)\sin ۳x. \end{aligned}$$

▲

قضیه ۱۹.۲. عملگر D یک عملگر خطی است. به عبارت دیگر عملگر D ترکیب خطی چند تابعی را به ترکیب خطی اثر D بر روی تک تک توابع می‌برد.

به عبارت دیگر برای هر دو تابع y_1 و y_2 و مقادیر ثابت c_1 و c_2، داریم

$$D[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1D[y_1] + c_2D[y_2].$$

اثبات. می‌دانیم که $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$. پس

$$\begin{aligned} D[c_1y_1 + c_2y_2] &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1p(x)y_1' + c_2p(x)y_2' + c_1q(x)y_1 + c_2q(x)y_2 \\ &= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)) \\ &= c_1D[y_1] + c_2D[y_2]. \end{aligned}$$

■

نتیجه ۲۰.۲. اگر y_1 و y_2 جواب معادله $D[y] = 0$ باشند، آنگاه هر ترکیب خطی y_1 و y_2 نیز جواب معادله $D[y] = 0$ است.

اثبات. طبق فرض y_1 و y_2 جواب معادله $D[y] = 0$ است. یعنی $D[y_1] = 0$ و $D[y_2] = 0$. اما در قضیه قبل دیدیم که

$$\begin{aligned} D[c_1y_1 + c_2y_2] &= c_1D[y_1] + c_2D[y_2] \\ &= c_1 0 + c_2 0 = 0. \end{aligned}$$

یعنی $D[c_1y_1 + c_2y_2]$ و این یعنی $c_1y_1 + c_2y_2$ در معادله صدق می‌کند، یعنی جواب است. ■

تا اینجا به این نتیجه رسیدیم که با داشتن دو جواب از معادله $D[y] = 0$، بی‌نهایت جواب به فرم $c_1y_1 + c_2y_2$ برای معادله به دست می‌آید. پس به طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که آیا این جواب‌ها همه جواب‌های معادله هستند.

تعریف ۲۱.۲. دو جواب y_1 و y_2 از معادله $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را یک مجموعه اساسی جواب می‌نامیم هرگاه هر جواب از معادله را بتوان به فرم یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 نوشت. به عبارت دیگر برای هر جواب y، مقادیر ثابت c_1 و c_2 وجود داشته باشند به طوری که $y = c_1y_1 + c_2y_2$. ▲

مثال ۲۲.۲. معادله $D[y] = y'' - y' - 6y = 0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1 = e^{3x}$

و $y_2 = 2e^{3x}$ به راحتی می‌بینیم که y_1 و y_2 در معادله صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} D[e^{3x}] &= \quad 9e^{3x} - 3e^{3x} - 6e^{3x} = 0 \\ D[2e^{3x}] &= \quad \cdots = 0 \end{aligned}$$

همچنین اگر $y = e^{-2x}$، آنگاه $D[e^{-2x}] = 4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$ یعنی y هم جواب است. اما هرگز نمی‌توان نوشت $e^{-2x} = c_1e^{3x} + 2c_2e^{3x}$. پس y_1 و y_2 مجموعه اساسی جواب نیست. ▲

سؤال ۲۳.۲. آیا همیشه یک مجموعه اساسی جواب وجود دارد؟

سؤال ۲۴.۲. چگونه می‌توان یک مجموعه اساسی جواب پیدا کرد؟

تعریف ۲۵.۲. اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر بر بازه I باشند. رنسکین f و g را با $W(f,g)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از تابع $fg' - gf'$.

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$$

▲

مثال ۲۶.۲. اگر $f = \sin x$ و $g = \cos x$، آنگاه

$$W(f,g)(x) = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1.$$

▲

قضیه ۲۷.۲. اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $D[y] = 0$ باشند و به ازای یک نقطه $x_0 \in I$، $W(y_1, y_2) \neq 0$، آنگاه y_1 و y_2 یک مجموعه اساسی جواب است.

قضیه ۲۸.۲. اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ در بازه I پیوسته باشند، آنگاه همواره یک مجموعه اساسی جواب برای معادله $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ وجود دارد.

نتیجه ۲۹.۲. برای حل یک معادله مرتبه دوم خطی همگن کافی است دو جواب آن را پیدا کنیم که رنسکین آنها در یک نقطه ناصفر باشد.

قضیه ۳۰.۲. اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $D[y]=0$ باشند، آنگاه $W(y_1,y_2)$ روی بازه I یا همه جا صفر است یا هرگز صفر نیست.

اثبات.

$$D[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

$$\begin{array}{ll} y_1 \text{جواب است} & \Rightarrow D[y_1]=y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0 \\ y_2 \text{ جواب است} & \Rightarrow D[y_2]=y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0 \end{array}$$

$$(-y_2)\times D[y_1]+(y_1)\times D[y_2]=(y_1y_2''-y_2y_1'')+p(x)(y_1y_2'-y_2y_1')=0 \quad (۴.۲)$$

اما می‌دانیم که:

$$\begin{array}{l} W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1' \\ W'(y_1,y_2)=y_1y_2''+y_1'y_2'-y_2'y_1'-y_2y_1''=y_1y_2''-y_2y_1'' \end{array}$$

پس معادله ۴.۲ این است:

$$W'(y_1,y_2)+p(x)W(y_1,y_2)=0$$

از حل این معادله که یک معادله خطی مرتبه اول است، نتیجه می‌شود

$$W(x):=W(y_1,y_2)(x)=ce^{-\int p(x)dx}$$

چون $e^{-\int p(x)dx}\neq 0$، $W(x)=0$، هرگاه $c=0$. یعنی اگر W در یک نقطه صفر شود، همه جا صفر می‌شود و برعکس اگر در یک نقطه صفر نباشد، در هیچ نقطه‌ای صفر نیست. ■

حال که دیدیم برای یافتن جواب عمومی معادله مرتبه دوم خطی همگن یافتن دو جواب که رنسکین آنها مخالف صفر باشد (مجموعه اساسی جواب) کافی است، در ادامه محکی معرفی کنیم که به راحتی تشخیص دهیم رنسکین دو جواب صفر هست یا نه؟

تعریف ۳۱.۲. دو تابع f و g را در بازه I وابسته خطی گوییم، هرگاه اعداد ثابت $c_۱$ و $c_۲$ وجود داشته باشند که حداقل یکی مخالف صفر باشد و برای هر $x \in I$ داشته باشیم $c_۱ f(x) + c_۲ g(x) = ۰$.
به عبارت دیگر در این صورت یکی از توابع ضریبی از دیگری است.

$$f(x) = -\frac{c_۲}{c_۱} g(x)$$

دو تابع f و g را مستقل خطی گوییم، هرگاه وابسته خطی نباشند. یعنی اگر برای هر $x \in I$، $c_۱ f(x) + c_۲ g(x) = ۰$، آنگاه $c_۱ = c_۲ = ۰$. ▲

مثال ۳۲.۲. اگر $f(x) = e^{۳x}$ و $g(x) = ۲e^{۳x}$، واضح است که $-۲f(x) + g(x) = ۰$ یا $g(x) = ۲f(x)$. پس طبق تعریف f و g وابسته خطی هستند. اما اگر $g_۱(x) = e^{۲x}$، $\frac{f(x)}{g_۱(x)} = e^x \neq c$ پس f و $g_۱$ مستقل خطی هستند. ▲

نکته ۳۳.۲. اگر دو تابع f و g وابسته خطی باشند، آنگاه $W(f,g) = ۰$. این مطلب واضح است. زیرا اگر f و g وابسته خطی باشند، یعنی یکی ضریبی از دیگری است، مثلاً $f(x) = cg(x)$. آنگاه

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cg & g \\ cg' & g' \end{vmatrix} = cgg' - cgg' = ۰.$$

قضیه ۳۴.۲. اگر $y_۱$ و $y_۲$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $D[y] = ۰$ باشند، آنگاه $y_۱$ و $y_۲$ وابسته خطی است اگر و فقط اگر به ازای یک $x_۰ \in I$، $W(y_۱, y_۲)(x_۰) = ۰$.

توجه کنید که قضیه فوق در حقیقت نشان می‌دهد اگر $y_۱$ و $y_۲$ جواب معادله $D[y] = ۰$ باشند، آنگاه عکس نکته ۳۳.۲ نیز درست است. در حالی که در حالت کلی چنین نیست. به عنوان مثال به راحتی می‌توانید بررسی کنید که برای دو تابع $f(x) = x^۳$ و $g(x) = x^۲|x|$ به ازای هر x داریم $W(f,g) = ۰$. اما f و g ضریب ثابتی از یکدیگر نیستند، یعنی وابسته خطی نیستند.

نتیجه ۳۵.۲. برای یافتن جواب عمومی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ کافی است دو جواب مستقل خطی برای معادله بیابیم.

مثال ۳۶.۲.

(الف) فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله $D[y] = 0$ است و $W(y_1, y_2)$ برابر e^{-x^2}. آیا y_1 و y_2 مستقل خطی هستند؟

(ب) اگر $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}$، جواب عمومی معادله را بیابید.

▲

حل. الف) $W(y_1, y_2) = e^{-x^2} \neq 0$، در نتیجه طبق قضیه ۳۴.۲، y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. ب) $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}$ جواب معادله $D[y] = 0$ است و y_2 جواب دیگری از معادله است که $W(y_1, y_2) = e^{-x^2}$. چون y_1 و y_2 مستقل خطی هستند برای یافتن جواب عمومی معادله کافی است y_2 را پیدا کنیم.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & y_2 \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & y_2' \end{vmatrix} = x^{-\frac{1}{2}}y_2' + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y_2$$

$$W(y_1, y_2) = e^{-x^2} \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}y_2' + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y_2 = e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned}
y_2' + \tfrac{1}{2}x^{-1}y_2 &= x^{\frac{1}{2}}e^{-x^2} \\
\Rightarrow \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2}x^{-1}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = x^{\frac{1}{2}} \\
x^{\frac{1}{2}} \times \text{معادله} &\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}y_2' + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y_2 = xe^{-x^2} \\
&\Rightarrow \tfrac{d(x^{\frac{1}{2}}y_2)}{dx} = xe^{-x^2} \\
&\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}y_2 = \int xe^{-x^2}dx \\
&\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}y_2 = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} \\
&\Rightarrow y_2 = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}
\end{aligned}$$

جواب عمومی معادله

$$y = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2}.$$

در ادامه به پاسخ به این سؤال می‌پردازیم که چگونه دو جواب مستقل خطی برای معادله $D[y] = 0$ بیابیم؟

۵.۲ روش کاهش مرتبه

در بخش قبل دیدیم که برای یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن کافی است دو جواب مستقل خطی برای معادله پیدا کنیم. در این روش نشان می‌دهیم با داشتن یک جواب از معادله

$$D[y] = y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \qquad (5.2)$$

چگونه یک جواب دیگر مستقل خطی با اولی پیدا کنیم.
فرض کنید y_1 یک جواب از معادله ۵.۲ است. جواب دیگر را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که با y_1 وابسته خطی نباشد. پس y_2 نباید ضریب ثابتی از y_1 باشد.
برای این منظور قرار می‌دهیم $y_2 = v(x)y_1(x)$ که $v(x)$ یک تابع مجهول غیر ثابت است. کافی است $v(x)$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که y_2 جواب معادله باشد، یعنی در معادله صدق کند.

$$\begin{aligned}
y_2 = v(x)y_1(x) \quad &\Rightarrow y_2' = v'y_1 + vy_1' \\
&\Rightarrow y_2'' = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1'' \\
D[y_2] \quad &= y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0
\end{aligned}$$

با جای‌گذاری y_2'', y_2', y_2 در معادله داریم:

$$\begin{aligned}
D[y_2] \qquad &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(x)v'y_1 + p(x)vy_1' + q(x)vy_1 = 0 \\
&\Rightarrow v''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)v = 0 \\
D[y_1] = 0 \quad &\Rightarrow v''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' = 0
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $z := v'$. داریم:

$$z'y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)z = 0$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow z' + (2\frac{y_1'}{y_1} + p(x))z = 0\\
&\Rightarrow v' = z = e^{-\int (2\frac{y_1'}{y_1} + p(x))dx}\\
&\Rightarrow v' = e^{-\int 2\frac{y_1'}{y_1}dx} e^{-\int p(x)dx}\\
&\Rightarrow v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه $v(x)$ و در نتیجه $y_2 = vy_1$ به دست می‌آید.

مثال ۳۷.۲.

(الف) نشان دهید $y_1 = x\sec x$ جواب معادله زیر است.

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = 0$$

(ب) جواب عمومی معادله بالا را بیابید.

حل:

(الف) کافی است y_1 را در معادله جای‌گذاری کنید. (به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.)

(ب) با استفاده از روش کاهش مرتبه کافی است $v(x)$ را پیدا کنیم. قرار می‌دهیم $y_2 = v(x)y_1(x)$. برای یافتن $v(x)$ فرمول داشتیم

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

$$
\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{1}{x^2\sec^2 x}e^{-\int(-\frac{2}{x})dx} = \frac{1}{\sec^2 x}\\
&\Rightarrow v(x) = \int \frac{1}{\sec^2 x}dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx\\
&\Rightarrow v(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x\\
&\Rightarrow y_2 = (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x)x\sec x\\
&\Rightarrow y_2 = \tfrac{1}{2}x^2\sec x + \tfrac{1}{2}x\sin x\\
&\Rightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{جواب عمومی معادله}\\
&\Rightarrow y = c_1x\sec x + c_2(\tfrac{1}{2}x^2\sec x + \tfrac{1}{2}x\sin x).
\end{aligned}
$$

▲

نکته ۳۸.۲.

۱. توجه کنید که در فرمول به دست آمده برای v' یعنی $v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$، $p(x)$ تابعی در معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ است وقتی ضریب y'' برابر یک است. پس حتماً برای استفاده از این فرمول ضریب y'' را یک کنیم.

۲. در انتگرال‌گیری برای به دست آوردن $v(x)$، مقدار ثابت مهم نیست، زیرا ما تنها به یک جواب دیگر برای معادله نیاز داریم.

۳. در فرمول v'، علامت $p(x)$ منفی دارد. با فرمول عامل انتگرال‌ساز معادلات خطی مرتبه اول که $e^{\int p(x)dx}$ اشتباه نکنیم.

سؤال طبیعی برای استفاده از روش کاهش مرتبه این است که چگونه جواب y_1 را پیدا کنیم؟

مثال ۳۹.۲. معادله $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$ را حل کنید.

حل: با دقت در ضرایب معادله می‌توانیم ببینیم که تابع $y_1 = e^x$ در معادله صدق می‌کند.

$$y_1' = e^x,\quad y_1'' = e^x,\quad e^x(x + 2(1-x) + (x-2)) = 0$$

حالا می‌توانیم y_2 را با روش کاهش مرتبه پیدا کنیم. قبل از هر چیز معادله را بازنویسی

می‌کنیم که ضریب y'' یک شود. پس داریم

$$\begin{aligned}&y'' + \tfrac{۲}{x}(۱-x) + \tfrac{x-۲}{x}y = ۰\\&y_۲ = v(x)y_۱,\quad v'(x) = \tfrac{۱}{y_۱^۲}e^{-\int p(x)dx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow v' = \tfrac{۱}{e^{۲x}}e^{-\int(\frac{۲}{x}-۲)dx} = \tfrac{۱}{x^۲}\\&\Rightarrow v(x) = \tfrac{-۱}{x}\\&\Rightarrow y_۲ = \tfrac{-۱}{x}e^x\\&\Rightarrow y = c_۱e^x + c_۲x^{-۱}e^x.\end{aligned}$$

▲

مثال ۴۰.۲. معادله $x^۲(x+۲)y'' + ۲xy' - ۲y = ۰$ را حل کنید.

حل: با دقت در ضرایب معادله می‌توانیم ببینیم که $y_۱ = x$ در معادله صدق می‌کند. حال $y_۲ = vx$ که

$$v' = \frac{۱}{y_۱^۲}e^{-\int p(x)dx} \quad (\text{وقتی ضریب } y'' = ۱)$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow y'' + \tfrac{۲}{x(x+۲)}y' - \tfrac{۲}{x^۲(x+۲)}y = ۰\\&\Rightarrow v' = \tfrac{۱}{x^۲}e^{-\int \frac{۲}{x(x+۲)}dx}\end{aligned}$$

انتگرال $\int \frac{-۲}{x(x+۲)}dx$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\int \frac{-۲}{x(x+۲)}dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x+۲)}dx = -\ln x + \ln(x+۲) = \ln\frac{x+۲}{x}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{x^2}e^{\ln(\frac{x+2}{x})} = \frac{x+2}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$
$$\Rightarrow v(x) = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow y_2 = (-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})x$$
$$\Rightarrow y_2 = (-1 - \frac{1}{x})$$
$$\Rightarrow y = c_1 x + c_2(1 + \frac{1}{x})$$

▲

نکته ۴۱.۲. در معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

(الف) اگر $P(x) + Q(x) + R(x) = 0$، آنگاه $y_1 = e^x$ یک جواب است.

(ب) اگر $P(x) - Q(x) + R(x) = 0$، آنگاه $y_1 = e^{-x}$ یک جواب است.

(ج) اگر $Q(x) + xR(x) = 0$، آنگاه $y_1 = x$ یک جواب است.

تمرین ۴۲.۲. معادلات زیر را با استفاده از روش کاهش مرتبه حل کنید.

(الف) $2xy'' + (1 - 4x)y' + (2x - 1)y = 0$

(ب) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -4$

(ج) $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$

(د) $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}$

(ه) $x^2y'' - xy' + y = 0$

(و) $xy'' - y' + x^3y = 0, \quad y_1 = \cos\frac{x^2}{2}$

۶.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر است.

$$D[y] = ay'' + by' + cy = 0 \tag{6.2}$$

که a، b و c اعداد حقیقی ثابت هستند.
می‌دانیم که برای حل چنین معادلاتی به دو جواب مستقل خطی نیاز داریم. همچنین می‌دانیم که با داشتن یک جواب از معادله، می‌توانیم با استفاده از روش کاهش مرتبه جواب دوم را نیز به دست آوریم.
پس سعی می‌کنیم جوابی از معادله را حدس بزنیم. با توجه به اینکه از شکل معادله پیدا است، جواب معادله باید به فرمی باشد که مشتقات آن در مقادیر ثابت اختلاف دارند. از طرفی می‌دانیم تابع نمایی دارای این خاصیت است. بنابراین سعی می‌کنیم تابع $y = e^{rx}$، (r مقدار مجهول) را به گونه‌ای تعیین کنیم که جواب معادله ۶.۲ باشد. یعنی باید $y = e^{rx}$ در معادله صدق کند.

$$\begin{aligned} & y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^۲ e^{rx} \\ & \Rightarrow D[y] = ar^۲ e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = ۰ \end{aligned}$$

پس باید $(ar^۲ + br + c)e^{rx} = ۰$ اما $e^{rx} \neq ۰$، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$ar^۲ + br + c = ۰$$

نتیجه ۴۳.۲. اگر r ریشه معادله $ar^۲ + br + c = ۰$ باشد، آنگاه تابع $y = e^{rx}$ جواب معادله $ay'' + by' + cy = ۰$ است.

تعریف ۴۴.۲. به معادله $ar^۲ + br + c = ۰$ معادله شاخص معادله‌ی $ay'' + by' + cy = ۰$ می‌گوییم. ▲

از آن جایی که معادله شاخص یک معادله درجه دوم است که باید ریشه‌های آن را به دست آوریم، باید حالت‌های مختلف برای ریشه‌های یک معادله درجه دوم را بررسی کنیم. به یاد داریم که ریشه‌های معادله درجه دوم $ar^۲ + br + c = ۰$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & r = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \\ & \Delta = b^۲ - ۴ac \end{aligned}$$

حالت اول. $\Delta > ۰$.

در این صورت ریشه‌های معادله، دو ریشه حقیقی متمایز هستند، مثلاً r_1 و r_2.

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

در نتیجه با توجه به مطالب گفته شده در بالا جواب‌های معادله به صورت $y_1 = e^{r_1 x}$ و $y_2 = e^{r_2 x}$ است و چون $r_1 \neq r_2$، y_1 و y_2 مستقل خطی هستند.
بنابراین در این حالت، جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

مثال ۴۵.۲. جواب عمومی معادله $y'' - y' - 6y = 0$ را بیابید.
حل: ابتدا معادله شاخص را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2 - r - 6 = 0$$

سپس ریشه‌های این معادله را پیدا می‌کنیم.

$$r = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$\Rightarrow r_1 = 3, r_2 = -2$$

به ازای هر ریشه یک جواب به دست می‌آید. پس

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-2x}$$

و در نهایت جواب عمومی معادله $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$ است. ▲

تمرین ۴۶.۲. جواب عمومی معادله $y'' - y = 0$ را بیابید.

تمرین ۴۷.۲. جواب عمومی معادله $y'' - 4y' - 5 = 0$ را بیابید.

حالت دوم. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
اگر $\Delta = 0$، آنگاه معادله شاخص $ar^2 + br + c = 0$ دارای یک ریشه مضاعف حقیقی است و داریم $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$. در نتیجه تنها یک جواب $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}$ برای معادله

$ay'' + by' + cy = 0$ به دست می‌آید. حالا برای یافتن جواب دوم از روش کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم. پس قرار می‌دهیم $y_2 = v(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$ که

$$\begin{aligned}
&v'(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{e^{-\frac{b}{2a}x}}e^{-\int \frac{b}{a}dx}\\
&\Rightarrow v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x\\
&\Rightarrow y_2 = xe^{-\frac{b}{a}x}
\end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی معادله در این حالت به فرم $y = c_1e^{-\frac{b}{a}x} + c_2xe^{-\frac{b}{a}x}$ است.

مثال ۴۸.۲. معادله $4y'' - 12y' + 9y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله شاخص را تشکیل می‌دهیم.

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

ریشه‌های معادله شاخص را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&r = \frac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 16\times 9}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\\
&y = c_1e^{\frac{3}{2}x} + c_2xe^{\frac{3}{2}x}.
\end{aligned}$$

▲

مثال ۴۹.۲. معادله $y'' - 2y' + y = 0$، $y(2) = 1$ و $y'(2) = -1$ را حل کنید.

حل: معادله شاخص را تشکیل می‌دهیم $r^2 - 2r + 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1\\
&\Rightarrow y = c_1e^x + c_2xe^x
\end{aligned}$$

در این مسأله چون شرایط اولیه داده شده باید در نقطه $x = 2$، $y(2)$ و $y'(2)$ را حساب کنیم و ضرایب ثابت c_1 و c_2 را به دست آوریم.
حالا برای اینکه محاسبات کوتاه‌تر شود می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که اثبات آن را به عنوان تمرین ساده به شما واگذار می‌کنیم. ▲

نکته ۵۰.۲. اگر r ریشه مضاعف معادله شاخص $ay'' + by' + cy = 0$ باشد، آنگاه برای

هر نقطه x_0، $y_1 = e^{r(x-x_0)}$ و $y_2 = (x-x_0)e^{r(x-x_0)}$ نیز جواب‌های معادله هستند.

در نتیجه در این مثال می‌توانیم جواب عمومی را به فرم

$$y = c_1 e^{(x-2)} + c_2 (x-2) e^{(x-2)}$$

بنویسیم که محاسبه c_1 و c_2 را آسان‌تر می‌کند.

$$\begin{aligned}
y(2) = 1 \quad & \Rightarrow c_1 = 1 \\
y'(2) = -1 \quad & \Rightarrow y' = c_1 e^{(x-2)} + c_2 e^{(x-2)} + c_2 (x-2) e^{(x-2)} \\
& \Rightarrow y'(2) = c_1 + c_2 = -1 \\
& \Rightarrow c_2 = -2 \\
& \Rightarrow y = e^{(x-2)} - 2(x-2)e^{(x-2)} = e^{(x-2)}(5-2x).
\end{aligned}$$

حالت سوم. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

در این حالت معادله شاخص ریشه حقیقی ندارد. در این حالت ریشه‌های معادله دو جواب مختلط مزدوج یکدیگر هستند.

$$\begin{aligned}
& r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2a} \\
\Rightarrow \quad & r = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.
\end{aligned}$$

برای راحتی قرار می‌دهیم $\mu := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $\lambda := \frac{-b}{2a}$. پس می‌توان گفت جواب معادله شاخص به صورت $r = \lambda \pm \mathrm{i}\mu$ است. اما قبلاً دیدیم که اگر r ریشه معادله شاخص باشد، آنگاه $y = e^{rx}$ جواب معادله $ay'' + by' + cy = 0$ است.

حالا سعی می‌کنیم تابع $y = e^{rx}$ را به صورت تابعی با قسمت حقیقی و قسمت موهومی مشخص بنویسیم.

$$\begin{aligned}
& y = e^{rx} = e^{(\lambda \pm \mathrm{i}\mu)x} = e^{\lambda x \pm \mathrm{i}\mu x} \\
\Rightarrow \quad & y = e^{\lambda x} e^{\pm \mathrm{i}\mu x} = e^{\lambda x}(\cos \mu x \pm \mathrm{i} \sin \mu x)
\end{aligned}$$

یادآوری: فرمول اویلر $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ پس دو جواب مختلط برای معادله به صورت $y_1 = e^{\lambda x}(\cos \mu x + \mathrm{i}\sin \mu x)$ و $y_2 = e^{\lambda x}(\cos \mu x - \mathrm{i}\sin \mu x)$ پیدا کردیم.

اما چون مقادیر a، b و c در معادله $ay'' + by' + cy = 0$ حقیقی هستند به دنبال

جواب‌های حقیقی معادله هستیم.
قضیه زیر برای رسیدن به این هدف به ما کمک می‌کند.

قضیه ۵۱.۲. اگر تابع $y = f(x) + \mathrm{i}g(x)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی $y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$ باشد، که $p(x)$ و $q(x)$ توابع حقیقی هستند، آنگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ نیز جواب‌های حقیقی معادله هستند.

اثبات. قبلاً دیدیم که عملگر $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$ یک عملگر خطی است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} &D[y] = D[f(x) + \mathrm{i}g(x)] = D[f(x)] + \mathrm{i}D[g(x)] = ۰ \\ &\Rightarrow D[f(x)] = ۰, D[g(x)] = ۰ \end{aligned}$$

یعنی $f(x)$ و $g(x)$ جواب‌های معادله هستند. ■

نتیجه ۵۲.۲. در معادله $ay'' + by' + cy = ۰$ در حالتی که $\Delta < ۰$ و جواب معادله $y = e^{\lambda x}\cos\mu x + \mathrm{i}e^{\lambda x}\sin\mu x$ $(\lambda = \frac{-b}{۲a}, \mu = \frac{\sqrt{-\Delta}}{۲a})$ است، دو جواب مستقل خطی حقیقی معادله $y_۱ = e^{\lambda x}\cos\mu x$ و $y_۲ = e^{\lambda x}\sin\mu x$ هستند و جواب عمومی معادله عبارتست از

$$y = c_۱e^{\lambda x}\cos\mu x + c_۲e^{\lambda x}\sin\mu x.$$

مثال ۵۳.۲. جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

۱. $y'' + ۴y = ۰$

ابتدا معادله شاخص را می‌نویسیم $r^۲ + ۴ = ۰$. سپس ریشه‌های معادله شاخص را پیدا می‌کنیم.

$$r^۲ = -۴ \Rightarrow r = \pm ۲\mathrm{i}$$

برای یافتن جواب عمومی کافی است یک جواب مختلط در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned} y = e^{۲\mathrm{i}x} &= \cos ۲x + \mathrm{i}\sin ۲x && \text{فرمول اویلر} \\ &\Rightarrow y_۱ = \cos ۲x, y_۲ = \sin ۲x && \text{طبق نتیجه ۵۲.۲} \\ &\Rightarrow y = c_۱\cos ۲x + c_۲\sin ۲x && \text{جواب عمومی} \end{aligned}$$

۲. $y'' - 3y' + 4y = 0$

$$r^2 - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$$
$$\Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = e^{(\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2})x}$$

$$y = e^{(\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2})x} = e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \mathrm{i}e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$
$$\Rightarrow y_1 = e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x,\ y_2 = e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x \quad \text{دو جواب حقیقی}$$
$$\Rightarrow y = c_1e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x \quad \text{جواب عمومی معادله}$$

▲

تمرین ۵۴.۲. جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

(الف) $y'' + y' + y = 0$

(ب) $y'' - y' + y = 0$

(ج) $2y'' + 3y' + 4y = 0$

(د) $y'' + 2y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1.$

۷.۲ معادلات اویلر

حال که توانستیم جواب عمومی معادلات همگن با ضرایب ثابت را پیدا کنیم، سعی می‌کنیم دسته‌ای از معادلات مرتبه دوم خطی دیگر را با تغییر متغیر مناسب به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کنیم.
دسته‌ای از معادلات که اینکار را می‌توان به راحتی انجام داد، معادلاتی به فرم

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0 \tag{۷.۲}$$

است که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ثابت است. این معادلات را معادله اویلر می‌نامیم. فرض می‌کنیم معادله اویلر $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ داده شده است. تغییر متغیر $z := \ln x \equiv x = e^z$

را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{۱}{x}$$

برای جای‌گذاری در معادله باید مشتق y را بر حسب z به دست آوریم.

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x} \\ y'' = \frac{d^۲y}{dx^۲} &= \frac{d^۲y}{dxdz} \cdot \frac{۱}{x} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x^۲} \\ &= \frac{d^۲y}{dzdx} \cdot \frac{۱}{x} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x^۲} \\ &= \frac{d^۲y}{dz^۲} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{۱}{x} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x^۲} \\ &= \frac{d^۲y}{dz^۲} \cdot \frac{۱}{x^۲} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x^۲} \end{aligned}$$

حال در معادله ۷.۲ همه چیز را بر حسب متغیر جدید z جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^۲y'' + \alpha xy' + \beta y &= x^۲\left[\frac{d^۲y}{dz^۲} \cdot \frac{۱}{x^۲} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x^۲}\right] \\ &\quad +\alpha x\left[\frac{dy}{dz} \cdot \frac{۱}{x}\right] + \beta y = ۰ \\ &\Rightarrow \frac{d^۲y}{dz^۲} + (\alpha - ۱)\frac{dy}{dz} + \beta y = ۰ \end{aligned}$$

می‌بینیم که معادله جدید یک معادله درجه دوم همگن با ضرایب ثابت است که از بخش قبل می‌دانیم چگونه دو جواب مستقل خطی و در نتیجه جواب عمومی آن را بیابیم.

مثال ۵۵.۲. جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$x^۲y'' - xy' + y = ۰$$

با توجه به شکل معادله می‌بینیم که این معادله یک معادله اویلر با $\alpha = -۱$ و $\beta = ۱$

است. همچنین دیدیم که با اعمال تغییر متغیر $e^z = x(z = \ln x)$ معادله به فرم

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

یعنی به صورت $\frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + \beta y = 0$ است. معادله شاخص این معادله $r^2 - 2r + 1 = 0$.
یعنی $(r-1)^2 = 0$. پس $r = 1$ ریشه مضاعف معادله شاخص و طبق آنچه قبلاً دیدیم
جواب عمومی معادله $y = c_1 e^z + c_2 z e^z = c_1 x + c_2 x \ln x$ است. ▲

مثال ۵۶.۲. جواب عمومی معادله $x^2y'' - xy' + 2y = 0$ را بیابید.
معادله اویلر است و $\alpha = -1$ و $\beta = 2$. تغییر متغیر $x = e^z(z = \ln x)$ معادله را به فرم
زیر تبدیل می‌کند.

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = \frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + 2y = 0 \qquad (8.2)$$

معادله شاخص $r^2 - 2r + 2 = 0$ و ریشه‌های معادله شاخص $r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \mathrm{i}$
است. جواب معادله ۸.۲

$$y = e^{(1+\mathrm{i})z} = e^z \cos z + \mathrm{i} e^z \sin z$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = e^z \cos z, y_2 = e^z \sin z$$

با جای‌گذاری متغیر اول یعنی $x = e^z$ داریم:

$$\Rightarrow y_1 = x\cos(\ln x), y_2 = x\sin(\ln x)$$
$$\Rightarrow y = c_1 x\cos(\ln x) + c_2 x\sin(\ln x) \quad \text{جواب عمومی}$$

▲

تمرین ۵۷.۲. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(ب) $x^2y'' - 2y = 0$

(ج) $y'' - \frac{6}{x^2} = 0$

(د) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$

(ذ) $x^{۲}y'' - ۵xy' + ۹y = ۰$

(ر) $x^{۲}y'' + ۲xy' + ۲y = ۰$

(ز) $x^{۲}y'' + y = ۰$

دقت کنید که α و β در فرمول هنگامی است که ضریب y'' برابر $x^{۲}$ است.

۸.۲ تغییر متغیر

دیدیم که معادلاتی با ضرایب غیر ثابت مانند معادلات اویلر با تغییر متغیر مناسبی به معادله با ضرایب ثابت تبدیل شد. این کار ممکن است برای معادلات درجه دوم خطی دیگری هم با یک تغییر متغیر مناسب ممکن باشد. نکته مهم در این تغییر متغیر اولاً تشخیص تغییر متغیر مناسب و ثانیاً محاسبه درست مشتق y یعنی y' و y'' نسبت به متغیر جدید، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای است.

مثال ۵۸.۲. با استفاده از تغییر متغیر داده شده، معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + (e^{x} - ۱)y' + e^{۲x}y = ۰, \quad z = e^{x}$$

حل:

$$\begin{aligned}
y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot e^{x} \\
y'' = \frac{d}{dx}[\frac{dy}{dx}] &= \frac{d}{dx}[\frac{dy}{dz}] \cdot e^{x} + \frac{dy}{dz} \cdot e^{x} \\
&= \frac{d}{dz}[\frac{dy}{dx}] \cdot e^{x} + \frac{dy}{dz} \cdot e^{x} \\
&= \frac{d}{dz}[\frac{dy}{dz}] \cdot \frac{dz}{dx} \cdot e^{x} + \frac{dy}{dz} \cdot e^{x} \Rightarrow \\
y'' &= \frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} \cdot e^{۲x} + \frac{dy}{dz} \cdot e^{x}
\end{aligned}$$

y' و y'' را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & y''+(e^x-1)y'+e^{2x}y=\frac{d^2y}{dz^2}e^{2x}+\frac{dy}{dz}e^x+(e^x-1)\frac{dy}{dz}e^x+e^{2x}y=0 \\ \Rightarrow\ & e^{2x}\frac{d^2y}{dz^2}+e^{2x}\frac{dy}{dz}+e^{2x}y=0,\quad e^{2x}\neq 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+y=0 \end{aligned}$$

معادله شاخص $r^2+r+1=0$ و ریشه‌های معادله شاخص برابر است با $r=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

$$\begin{array}{lll} & \Rightarrow & y=e^{rz}=e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})z} \\ \text{جواب مختلط} & \Rightarrow & y=e^{-\frac{1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z+\mathrm{i}e^{-\frac{1}{2}z}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z \\ \text{دو جواب حقیقی} & \Rightarrow & y_1=e^{-\frac{1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z,\ y_2=e^{-\frac{1}{2}z}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z \\ \text{جواب عمومی معادله} & \Rightarrow & y=c_1e^{-\frac{1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z+c_2e^{-\frac{1}{2}z}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z \\ z=e^x & \Rightarrow & y=c_1e^{-\frac{1}{2}e^x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}e^x+c_2e^{-\frac{1}{2}e^x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}e^x \end{array}$$

▲

تمرین ۵۹.۲. معادله $2xy''+(1-x^{\frac{1}{2}})y'-3y=0$ را با تغییر متغیر $z=x^{\frac{1}{2}}$ حل کنید.

حل:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ y'' &= \frac{d}{dx}[\frac{dy}{dx}]=\frac{d}{dx}[\frac{dy}{dz}]\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right] \\ y'' &= \frac{d}{dz}[\frac{dy}{dz}]\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{dy}{dz}\cdot[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}] \\ y'' &= \frac{d^2y}{dz^2}\cdot(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})^2-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\frac{dy}{dz} \\ y'' &= \frac{1}{4}x^{-1}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2xy'' + (1 - x^{\frac{1}{2}})y' - 3y = 0 \\
&2x[\tfrac{1}{4}x^{-1}\tfrac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\tfrac{dy}{dz}] + (1 - x^{\frac{1}{2}})[\tfrac{dy}{dz}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}] = 0 \\
\Rightarrow\quad &\tfrac{1}{2}\tfrac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\tfrac{dy}{dz} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\tfrac{dy}{dz} - \tfrac{1}{2}\tfrac{dy}{dz} - 3y = 0 \\
\Rightarrow\quad &\tfrac{1}{2}\tfrac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{dy}{dz} - 3y = 0 \\
\Rightarrow\quad &\tfrac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{dy}{dz} - 6y = 0 \\
\Rightarrow\quad &r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+2) = 0 \\
\Rightarrow\quad &r_1 = 3, \quad r_2 = -2 \\
\Rightarrow\quad &y_1 = e^{3z}, \quad y_2 = e^{2z} \\
\Rightarrow\quad &y = c_1e^{3z} + c_2e^{2z} \\
\Rightarrow\quad &y = c_1e^{3x^{\frac{1}{2}}} + c_2e^{2x^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

۹.۲ معادلات مرتبه دوم خطی غیر همگن

شکل کلی یک معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن به صورت زیر است.

$$D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{۹.۲}$$

معادله همگن نظیر معادله ۹.۲ یعنی معادله

$$D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{۱۰.۲}$$

تا اینجا دیدیم که برای حل معادله ۱۰.۲ باید دو جواب مستقل خطی برای این معادله پیدا کنیم و برای این کار نشان دادیم که با داشتن یک جواب، جواب مستقل خطی دوم به روش کاهش مرتبه به دست می‌آید. در غیر این صورت هنگامی که ضرایب ثابت باشند می‌توانیم دو جواب مستقل خطی برای معادله پیدا کنیم.
در اینجا ابتدا بررسی می‌کنیم که جواب‌های معادله ۹.۲ به چه شکلی هستند و سپس به بیان روش‌های یافتن آنها می‌پردازیم.

قضیه ۶۰.۲. اگر دو تابع f و h جواب معادله ۹.۲ باشند، آنگاه تابع $f-h$ جواب معادله ۱۰.۲ است.

اثبات. طبق فرض f و h جواب معادله ۹.۲ هستند، پس $D[f(x)] = g(x)$ و $D[h(x)] = g(x)$. اما D عملگر خطی است. در نتیجه

$$D[f(x) - h(x)] = D[f(x)] - D[h(x)] = g(x) - g(x)$$

بنابراین $D[f(x) - h(x)] = 0$، یعنی $f-h$ جواب ۱۰.۲ است. ■

قضیه ۶۱.۲. اگر y_p یک جواب از معادله غیر همگن ۹.۲ و y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله همگن ۱۰.۲ باشند، آنگاه جواب عمومی معادله ۹.۲ به صورت $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$ است.

اثبات. چون طبق فرض y_p یک جواب از معادله ۹.۲ است، $D[y_p] = g$ همچنین برای هر جواب y از معادله ۹.۲ داریم $D[y] = g$. در قضیه ۶۰.۲، نشان دادیم که تفاضل هر دو جواب از معادله غیر همگن، جوابی از معادله همگن نظیر آن است. یعنی $y - y_p$ جواب معادله ۱۰.۲ است. اما از قبل می‌دانیم که هر جواب از معادله ۱۰.۲ ترکیب خطی y_1 و y_2 است. پس $y - y_p = c_1y_1 + c_2y_2$. در نتیجه

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p.$$

■

نتیجه ۶۲.۲. برای یافتن جواب عمومی معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن کافی است

۱. دو جواب مستقل خطی برای معادله همگن نظیر آن پیدا کنیم.

۲. یک جواب خاص برای معادله غیر همگن بیابیم.

۱۰.۲ روش تغییر پارامتر

در این روش با داشتن دو جواب مستقل خطی از معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ یک جواب خاص برای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ پیدا می‌کنیم. در این روش که روش تغییر پارامتر نام دارد، فرض می‌کنیم y_1 و y_2 دو جواب از معادله همگن $D[y] = 0$ باشند و توابع مجهول $u_1(x)$ و $u_2(x)$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ جواب معادله $D[y] = g$ باشد.
پس می‌دانیم که $D[y_1] = 0, D[y_2] = 0$ و می‌خواهیم u_1, u_2 را طوری پیدا کنیم که $D[u_1y_1 + u_2y_2] = g(x)$.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \end{aligned}$$

برای راحتی u_1, u_2 را طوری پیدا می‌کنیم که (شرط را اضافه کردیم)

$$\begin{aligned} & u_1'y_1 + u_2'y = 0 \quad (1) \\ \Rightarrow\quad & y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' \\ & y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

حال y_p را در معادله قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} D[y_p] = \;& u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \\ & + p(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \\ D[y_p] = \;& u_1\left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + u_2\left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] \\ & + u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \\ D[y_1] = 0,\ D[y_2] = 0 \;& \Rightarrow u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \quad (2) \end{aligned}$$

پس برای اینکه $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ جواب معادله $D[y] = g(x)$ باشد، باید u_1, u_2 در دو رابطه (۱) و (۲) صدق کند.

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \end{cases}$$

از این دستگاه دو معادله دو مجهول (u_1, u_2) را به دست می‌آوریم. طبق روش کرامر داریم:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

توجه: در این فرمول $g(x)$ وقتی است که ضریب y'' یک باشد.
با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه بالا، u_1, u_2 و در نتیجه $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ به دست می‌آید.

مثال ۶۳.۲. جواب عمومی معادله $y'' - 3y' + 2y = (1 + e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$ را بیابید.
حل: طبق آنچه گفته شد ابتدا باید جواب عمومی معادله همگن نظیر یعنی معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} r^2 - 3r + 2 = 0 \quad &\Rightarrow (r-2)(r-1) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = 2, \quad r_2 = 1 \\ &\Rightarrow y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{x} \\ &\Rightarrow \text{جواب عمومی معادله همگن} = y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{x}. \end{aligned}$$

قدم بعد یافتن y_p با استفاده از روش تغییر پارامتر است. قرار می‌دهیم $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$

و $u_۱, u_۲$ را با استفاده از فرمول‌های گفته شده پیدا می‌کنیم.

$$u_۱' = \frac{-gy_۲}{W(y_۱,y_۲)}, \quad u_۲' = \frac{gy_۱}{W(y_۱,y_۲)}$$

$$W(y_۱, y_۲) = \begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ y_۱' & y_۲' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{۲x} & e^{x} \\ ۲e^{۲x} & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{۳x}$$

$$\begin{aligned}
& u_۱' = \frac{-(۱+e^{-۲x})^{-\frac{۱}{۲}} e^{x}}{-e^{۳x}} = \frac{۱}{e^{۲x}\sqrt{۱+e^{-۲x}}} \\
\Rightarrow \quad & u_۱ = \int \frac{dx}{e^{۲x}\sqrt{۱+e^{-۲x}}} = \int \frac{-dt}{۲\sqrt{t}} = -\sqrt{t} \\
& ۱ + e^{-۲x} = t \Rightarrow -۲e^{-۲x}dx = dt \\
\Rightarrow \quad & u_۱ = -\sqrt{۱+e^{-۲x}} \\
& u_۲' = \frac{(۱+e^{-۲x})^{-\frac{۱}{۲}} e^{۲x}}{-e^{۳x}} = \frac{-۱}{e^{x}\sqrt{۱+e^{-۲x}}} \\
\Rightarrow \quad & u_۲ = \int \frac{-dx}{e^{x}\sqrt{۱+e^{-۲x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{۱+t^{۲}}} = \sinh^{-۱} t \\
& e^{-x} = t \Rightarrow -e^{-x}dx = dt \\
\Rightarrow \quad & u_۲ = \sinh^{-۱}(e^{-x}) \\
\Rightarrow \quad & y_p = u_۱y_۱ + u_۲y_۲ = -\sqrt{۱+e^{-۲x}} \cdot e^{۲x} + (\sinh^{-۱}(e^{-x}))e^{x}
\end{aligned}$$

جواب عمومی معادله

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{۲x} + c_۲e^{x} - \sqrt{۱+e^{-۲x}} \cdot (e^{۲x}) + (\sinh^{-۱}(e^{-x}))e^{x}.$$

▲

تمرین ۶۴.۲. جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

(الف) $۲xy'' + (۱-۴x)y' + (۲x-۱)y = e^{x}$

(ب) $x^{۲}y'' + ۷xy' + ۵y = ۱۲x$

۱۱.۲ روش ضرایب نامعین

برای یافتن یک جواب خاص از معادله غیر همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ برای وقتی تابع $g(x)$ شکل خاصی داشته باشد با روش‌های ساده‌تر از روش تغییر پارامتر می‌توان y_p را پیدا کرد.

مثال ۶۵.۲. معادله $y'' + y = x^۲$ را در نظر بگیرید. برای حل این معادله بعد از یافتن جواب عمومی معادله همگن $y'' + y = ۰$، نیاز به یک جواب خاص از معادله $y'' + y = x^۲$ داریم. در اینجا که $g(x)$ چندجمله‌ای $x^۲$ است، می‌توانیم بفهمیم که جواب معادله نیز می‌تواند به فرم چند جمله‌ای باشد و با توجه به شکل معادله جواب نیز باید درجه دو باشد. پس جواب y_p را به فرم چندجمله‌ای درجه دو $y_p = Ax^۲ + Bx + C$ می‌نویسیم و A، B و C را طوری پیدا می‌کنیم که y_p در معادله صدق کند.

$$
\begin{aligned}
&y_p' = ۲Ax + B, \quad y_p'' = ۲A \\
&y_p'' + y_p = ۲A + Ax^۲ + Bx + C = Ax^۲ + Bx + (۲A + C) \stackrel{?}{=} x^۲ \\
&\Rightarrow \begin{cases} A = ۱ \\ B = ۰ \\ ۲A + C = ۰ \Rightarrow C = -۲ \end{cases} \qquad \Rightarrow y_p = x^۲ - ۲ \text{جواب خاص}
\end{aligned}
$$

▲

مثال ۶۶.۲. معادله $y'' + ۳y' + ۲y = ۴xe^x$ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن جواب خاص این معادله نیز می‌توانیم حدس بزنیم که جواب باید یک چندجمله‌ای درجه اول باشد. همچنین باید شامل e^x هم باشد. پس قرار می‌دهیم $y_p = e^x(Ax + B)$ و سعی می‌کنیم A و B را طوری پیدا کنیم که y_p در معادله صدق کند.

$$
\begin{aligned}
y_p &= e^x(Ax + B) \\
y_p' &= e^x(Ax + B) + Ae^x = Axe^x + (A + B)e^x \\
y_p'' &= Ae^x + Axe^x + (A + B)e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_p'' + ۳y_p' + ۲y_p = \quad & Ae^x + Axe^x + (A + B)e^x \\
& + ۳(Axe^x + (A + B)e^x) \\
& + ۲e^x(Ax + B) = ۴xe^x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow e^x\left[۶Ax + (۵A + ۶B)\right] = ۴xe^x$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۶A = ۴ \Rightarrow A = \frac{۲}{۳} \\ ۵A + ۶B = ۰ \Rightarrow B = \frac{-۵}{۹} \end{cases} \Rightarrow y_p = e^x(\tfrac{۲}{۳}x - \tfrac{۵}{۹}).$$

▲

مثال ۶۷.۲. حال معادله $y'' - y = e^x$ را در نظر بگیرید. در این معادله هم حدس می‌زنیم جواب به فرم ضریبی از e^x باشد و $y_p = Ae^x$ را امتحان می‌کنیم. پس داریم

$$y_p' = Ae^x,\ \ y_p'' = Ae^x \Rightarrow y_p'' - y_p = Ae^x - Ae^x = ۰ \neq e^x$$

پس جوابی به فرم Ae^x در معادله صدق نمی‌کند. حال اگر قرار دهیم $y_p = Axe^x$ و این تابع را امتحان کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} & y_p = Axe^x \\ & y_p' = Ae^x + Axe^x \\ & y_p'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x \\ & y_p'' - y_p = ۲Ae^x + Axe^x - Axe^x \stackrel{?}{=} e^x \\ & \Rightarrow ۲A = ۱ \Rightarrow A = \tfrac{۱}{۲} \Rightarrow y_p = \tfrac{۱}{۲}xe^x \end{aligned}$$

دلیل این موضوع این است که $r = ۱$ ریشه معادله شاخص $r^۲ - ۱ = ۰$ است و در $e^{۱x}$، ضریب x هم یک است.

توجه کنید اگر $r = ۱$ ریشه معادله شاخص نبود، مثلاً معادله به فرم $y'' + y = e^x$ بود، $y_p = Ae^x$ جواب بود. ▲

قضیه ۶۸.۲. برای معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ اگر تابع $g(x)$ به صورت $g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$ یا $g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ باشد، که $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای مرتبه n است. آنگاه معادله دارای یک جواب خاص به صورت زیر است.

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[\cos\beta x(A_\circ x^n + \cdots + A_n) + \sin\beta x(B_\circ x^n + \cdots + B_n)\right]$$

که در این فرمول s به صورت زیر تعیین می‌شود.

۱. اگر $\alpha \stackrel{+}{-} \mathrm{i}\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد، آنگاه $s = ۰$.

۲. اگر $\alpha \mp i\beta$ ریشه معادله شاخص باشد، آنگاه $s = 1$.

۳. اگر $\beta = 0$ و α ریشه مضاعف معادله شاخص باشد، آنگاه $s = 2$.

نتیجه ۶۹.۲. برای یافتن y_p در معادله غیر همگن با $g(x)$ به یکی از فرم‌های بالا، y_p را در فرم کلی مطابق با شرایط قضیه می‌نویسیم و فقط برای تعیین ضرایب A_iها و B_iها کافی است y_p را در معادله قرار دهیم و ضرایب را به دست آوریم.

نتیجه ۷۰.۲.

(الف) اگر $g(x) = P_n(x)$، آنگاه $y_p = x^s(A_0x^n + \cdots + A_n)$ که s برابر تکرار مقدار صفر به عنوان ریشه معادله شاخص است.

(ب) اگر $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$، آنگاه $y_p = x^s e^{\alpha x}(A_0x^n + \cdots + A_n)$ که s برابر تکرار مقدار α به عنوان ریشه معادله شاخص است.

نکته ۷۱.۲. برای معادله $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_t(x)$ اگر y_{p_1} یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_1$ و y_{p_2} یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_2$ و ... y_{p_t} یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_t$ باشد، آنگاه $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_t}$ یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_t(x)t$ است.

مثال ۷۲.۲. فرم کلی یک جواب خاص برای معادلات غیر همگن زیر را بنویسید. (محاسبه ضرایب لازم نیست).

(الف) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} &\alpha = 0, \quad \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 \\ &2r^2 + 3r + 1 = 0 \Rightarrow r = \tfrac{-3 \mp \sqrt{9-8}}{4} \\ &\Rightarrow r_1 = -1, \quad r_2 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

در نتیجه $\alpha + i\beta = 0$ ریشه معادله شاخص نیست، پس $s = 0$. $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ چندجمله‌ای درجه دو هستند.

$$\begin{aligned} &y_p = x^s e^{\alpha x}\left[\cos\beta x P_n(x) + \sin\beta x Q_n(x)\right], \quad n = 2 \\ \Rightarrow\quad &y_p = Ax^2 + Bx + C \end{aligned}$$

(ب) $y'' + y' = x^{۲}$

$$\alpha = ۰, \quad \beta = ۰ \Rightarrow \alpha + \mathrm{i}\beta = ۰$$
$$r^{۲} + r = ۰ \Rightarrow r_{۱} = ۰, \quad r_{۲} = -۱ \Rightarrow \text{صفر ریشه معادله شاخص}$$
$$y_p = x(A_{۰}x^{۲} + A_{۱}x + A_{۲}).$$

(ج) $y'' + ۳y' + ۲y = ۴xe^{x}$

$$r^{۲} + ۳r + ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad r_{۱} = -۱, \quad r_{۲} = -۲$$
$$\alpha = ۱, \beta = ۰ \quad \Rightarrow \quad \alpha\text{ریشه معادله شاخص نیست} \Rightarrow s = ۰$$
$$\Rightarrow \quad y_p = e^{x}(A_{۰}x + A_{۱}).$$

(د) $y'' + ۲y' + ۵y = x^{۲}e^{-x}\cos ۲x$

$$r^{۲} + ۲r + ۵ = ۰ \Rightarrow r = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ - ۲۰}}{۲} \Rightarrow r = -۱ \pm ۲\mathrm{i}$$
$$\alpha = -۱, \quad \beta = ۲ \Rightarrow \alpha + \mathrm{i}\beta = -۱ + ۲\mathrm{i} \Rightarrow s = ۱$$
$$\Rightarrow y_p = xe^{-x}\left[\cos ۲x(A_{۰}x^{۲} + A_{۱}x + A_{۲}) + \sin ۲x(B_{۰}x^{۲} + B_{۱}x + B_{۲})\right].$$

(ه) $y'' - y = ۱ + \cosh x$

معادله شاخص: $r^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow r_{۱} = -۱, r_{۲} = ۱$

$y'' - y = ۱ + \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲}$

(۱) $y'' - y = ۱,$ صفر ریشه معادله شاخص نیست $\Rightarrow \quad s = ۰ y_{p_{۱}} = x^{s}A = A$

(۲) $y'' - y = \frac{۱}{۲}e^{x},$ یک ریشه معادله شاخص است $\Rightarrow \quad s = ۱ \Rightarrow \; y_{p_{۲}} = Bxe^{x}$

(۳) $y'' - y = \frac{۱}{۲}e^{-x},$ منفی یک ریشه معادله شاخص $\Rightarrow \quad s = ۱ y_{p_{۳}} = Cxe^{-x}$

$\Rightarrow \quad y_p = y_{p_{۱}} + y_{p_{۲}} + y_{p_{۳}} = A + Bxe^{x} + Cxe^{-x}.$

(ی) $y'' - ۲y' + ۵y = ۲\cos^{۲} x$

معادله شاخص: $r^{۲} - ۲r + ۵ = ۰ \Rightarrow r = ۱ \pm \sqrt{۱ - ۵} = ۱ \pm ۲i$

$$y'' - 2y' + 5y = 1 + \cos 2x$$

(۱) $y'' - 2y' + 5y = 1$, صفر ریشه معادله شاخص نیست $\Rightarrow \quad s = 0 \Rightarrow y_{p_1} = A$

(۲) $y'' - 2y' + 5y = \cos 2x$, $2i$ ریشه معادله شاخص نیست $\Rightarrow y_{p_2} = B\cos 2x + C\sin 2x$

▲

تمرین ۷۳.۲. فرم کلی یک جواب خاص از معادلات زیر را بنویسید (محاسبه ضرایب لازم نیست).

(الف) $y'' + 9y = 36x\cos 3x + 2e^x \sinh x$

(ب) $y'' - 2y' + 3y = x^3 + e^x \cos 2x + (\sin\sqrt{2}x)\sinh x$

(ج) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin^2(\frac{x}{2})\cosh 2x$

(د) $y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x}\sin^2 x$

(ه) $y'' - 2y' + 5y = 2x^2 e^x \cos^2 x + 1$

فصل ۳

تبدیل لاپلاس

در این فصل می‌خواهیم با معرفی ابزاری به نام تبدیل لاپلاس و آشنا شدن با خواص آن با روشی کاملاً متفاوت با فصل‌های قبل به حل معادلات دیفرانسیل بپردازیم.
ابتدا تبدیل لاپلاس را تعریف می‌کنیم، کمی با روش محاسبه و خواص آن آشنا می‌شویم و بعد به حل معادله دیفرانسیل با این روش می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. تابع گاما (تابع فاکتوریل تعمیم یافته) با $\Gamma(x)$ نشان داده می‌شود و ضابطه آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(x) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{x-۱} dt$$

▲

نکته ۲.۳. با استفاده از آزمون‌های همگرایی ثابت می‌شود که انتگرال ناسره فوق به ازای هر $x > ۰$ همگرا است.

مثال ۳.۳.

$$\begin{aligned}\Gamma(۱) &= \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{۱-۱} dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{a\to+\infty} \int_{۰}^{a} e^{-t} dt = \lim_{a\to+\infty} [-e^{-a} + e^{-۰}] = ۱\end{aligned}$$

▲

نکته ۴.۳. محاسبه مقدار تابع Γ برای هر $x > ۰$، ساده نیست. روش‌های عددی برای

محاسبه $\Gamma(x)$ وجود دارد و جدول مقادیر تابع Γ موجود است. فقط برای بعضی از مقادیر x می‌توان با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری و محاسبات مقدار Γ را محاسبه کرد.
به عنوان مثال می‌توان محاسبه کرد که $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

نکته ۵.۳. تابع Γ با ضابطه $x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ را در نظر بگیرید. ابتدا انتگرال نامعین $\int e^{-t}t^{x-1}dt$ را در نظر می‌گیریم و از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{l}
\int e^{-t}t^{x-1}dt = \frac{1}{x}e^{-t}t^{x} + \int \frac{1}{x}e^{-t}t^{x}dt \\
\ u = e^{-t} \qquad\quad \Rightarrow du = -e^{-t}dt \\
\ dv = t^{x-1}dt \quad \Rightarrow v = \frac{1}{x}t^{x} \\
\overset{x>0}{\Rightarrow} \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{1}{x}a^{x}e^{-a} - \frac{1}{x}0^{x}e^{0}\right] + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt \\
\Rightarrow \forall\ x > 0 \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)
\end{array}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که می‌توانیم تابع Γ را برای xهای منفی نیز تعمیم بدهیم. پس در حالت کلی داریم

$$\forall\ x \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots, x \neq 0,\ \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

مثال ۶.۳.

$$\begin{aligned}
\Gamma(-\tfrac{1}{2}) &= \frac{1}{-\frac{1}{2}}\Gamma(-\tfrac{1}{2}+1) = -2\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
\Gamma(-\tfrac{7}{3}) &= \frac{1}{-\frac{7}{3}}\Gamma(-\tfrac{7}{3}+1) = -\tfrac{3}{7}\Gamma(-\tfrac{4}{3}) \\
&= \tfrac{9}{28}\Gamma(-\tfrac{4}{3}+1) = \tfrac{9}{28}\Gamma(-\tfrac{1}{3}) \\
&= -\tfrac{27}{28}\Gamma(-\tfrac{1}{3}+1) = -\tfrac{27}{28}\Gamma(\tfrac{2}{3})
\end{aligned}$$

▲

نکته ۷.۳. با توجه به رابطه بازگشتی $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ می‌بینیم که برای هر عدد

طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&\vdots \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 2\Gamma(1) \\
\Gamma(n+1) &= n!
\end{aligned}$$

یعنی مقادیر تابع گاما برای اعداد طبیعی همان مقادیر فاکتوریل است. به عبارت دیگر می‌توان تابع گاما را تعمیم یافته تابع فاکتوریل برای همه مقادیر حقیقی غیر از $(-1,-2,\ldots)$ در نظر گرفت.

نکته ۸.۳. با توجه به تعریف گاما بسیاری از انتگرال‌های معین را می‌توان با استفاده از تابع گاما محاسبه کرد. در زیر برای نمونه دو مثال می‌بینیم.

مثال ۹.۳.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}} e^{-z^3} dz = \int_0^\infty t^{\frac{1}{6}} e^{-t} \cdot \tfrac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\
z^3 &= t \Rightarrow z = t^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dz = \tfrac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\
I &= \int_0^\infty \tfrac{1}{3} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \tfrac{1}{3} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt \\
I &= \tfrac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{3}.
\end{aligned}$$

▲

مثال ۱۰.۳. انتگرال زیر در $x=\circ$ ناسره است.

$$\begin{aligned}
I &= \int_\circ^۱ \sqrt{x}\ \ln x\ dx\\
\ln x &= u \Rightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du\\
&x \to \circ \Rightarrow u \to -\infty, x = ۱ \Rightarrow u = \circ\\
I &= \int_{-\infty}^\circ e^{\frac{u}{۲}} u e^u du = \int_{-\infty}^\circ u e^{\frac{۳}{۲}u} du\\
\tfrac{۳}{۲}u &= -t \Rightarrow \tfrac{۳}{۲}du = -dt \Rightarrow du = -\tfrac{۲}{۳}dt\\
&u \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty,\ u = \circ \Rightarrow t = \circ\\
I &= \int_{+\infty}^\circ -\tfrac{۲}{۳} t e^{-t}(-\tfrac{۲}{۳}dt)\\
I &= \int_\circ^\infty \tfrac{۴}{۹} e^{-t} t dt = \tfrac{۴}{۹}\Gamma(۲)\\
\Gamma(۲) &= \Gamma(۱+۱) = ۱\Gamma(۱) = ۱ \Rightarrow\\
I &= \tfrac{۴}{۹}
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۱۱.۳.

(الف) $I = \int_\circ^\infty x^۲ e^{-۲x^۴} dx$

(ب) $I = \int_\circ^۱ x^۲ \ln^۳ x dx$

۱.۳ تبدیل لاپلاس

تعریف ۱۲.۳. فرض کنید تابع f در بازه $[\circ, +\infty)$ تعریف شده باشد. تبدیل لاپلاس تابع f را با $F(s)$ یا $\mathscr{L}[f(x)]$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(s) = \mathscr{L}[f(x)] = \int_\circ^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

واضح است که تبدیل لاپلاس یک انتگرال ناسره است. اگر این انتگرال ناسره همگرا باشد، گوییم لاپلاس f موجود است. ▲

مثال ۱۳.۳. تابع $f(x)=۱$ را در نظر بگیرید.

$$\mathscr{L}[۱]=\int_{۰}^{\infty} e^{-sx}dx=\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{۱}{s}e^{-sa}+\frac{۱}{s}e^{-s۰}\right]=\frac{۱}{s}$$

به شرط $s>۰$. ▲

مثال ۱۴.۳. تابع $a\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{ax}$ ثابت را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{ax}] &= \int_{۰}^{\infty} e^{-sx}e^{ax}dx=\int_{۰}^{\infty} e^{(a-s)x}dx\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{۰}^{b} e^{(a-s)}dx\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\tfrac{۱}{a-s}e^{(a-s)b}-\tfrac{۱}{a-s}e^{(a-s)۰}\right]\ s>a, \text{ به شرط}\\
\mathscr{L}[e^{ax}] &= \tfrac{۱}{s-a}\quad s>a
\end{aligned}$$

▲

نتیجه ۱۵.۳.

$$\mathscr{L}[۱]=\mathscr{L}[e^{۰x}]=\frac{۱}{s},\quad s>۰$$

مثال ۱۶.۳. تابع $f(x)=x^a$ و $-۱<a\in\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[x^a] &= \int_{۰}^{\infty} e^{-sx}x^a dx=\int_{۰}^{\infty} e^{-t}(\tfrac{t}{s})^a\cdot\tfrac{۱}{s}dt\\
sx &= t\Rightarrow x=\tfrac{t}{s}\Rightarrow dx=\tfrac{۱}{s}dt\\
\mathscr{L}[x^a] &= \tfrac{۱}{s^{a+۱}}\int_{۰}^{\infty} e^{-t}t^a dt=\tfrac{۱}{s^{a+۱}}\Gamma(a+۱)\\
\mathscr{L}[x^a] &= \tfrac{۱}{s^{a+۱}}\Gamma(a+۱)
\end{aligned}$$

▲

۲.۳ خواص تبدیل لاپلاس

خاصیت ۱۷.۳. عملگر تبدیل لاپلاس، یک عملگر خطی است.
به عبارت دیگر برای هر دو مقدار ثابت $c_۱$ و $c_۲$ و دو تابع f و g داریم

$$\mathscr{L}\left[c_۱ f(x) + c_۲ g(x)\right] = c_۱\mathscr{L}[f(x)] + c_۲\mathscr{L}[g(x)].$$

اثبات.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[c_۱ f(x) + c_۲ g(x)\right] &= \int_۰^\infty e^{-sx}(c_۱ f(x) + c_۲ g(x))dx\\ &= c_۱\int_۰^\infty e^{-sx} f(x)dx + c_۲\int_۰^\infty e^{-sx} g(x)dx\\ &= c_۱\mathscr{L}[f(x)] + c_۲\mathscr{L}[g(x)].\end{aligned}$$

■

با استفاده از این خاصیت می‌توانیم لاپلاس توابع پیچیده‌تری را محاسبه کنیم.

مثال ۱۸.۳. لاپلاس توابع $\sinh ax$ و $\cosh ax$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sinh ax] &= \mathscr{L}\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{۲}\right] \overset{۱۷.۳}{=} \frac{۱}{۲}\mathscr{L}[e^{ax}] - \frac{۱}{۲}\mathscr{L}[e^{-ax}]\\ &\overset{۱۴.۳}{=} \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s-a} - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s+a}\\ \mathscr{L}[\sinh ax] &= \frac{a}{s^۲-a^۲} \quad s > a,\ s > -a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\cosh ax] &= \mathscr{L}\left[\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{۲}\right] = \frac{۱}{۲}\mathscr{L}[e^{ax}] + \frac{۱}{۲}\mathscr{L}[e^{-ax}]\\ &= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s-a} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s+a}\\ \mathscr{L}[\cosh ax] &= \frac{s}{s^۲-a^۲} \quad s > a,\ s > -a.\end{aligned}$$

▲

مثال ۱۹.۳. لاپلاس توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ را محاسبه کنید.

به یاد داریم که $e^{\mathrm{i}ax} = \cos ax + \mathrm{i}\sin ax$.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[\cos ax + \mathrm{i}\sin ax] = \mathscr{L}[e^{\mathrm{i}ax}]\\
&\mathscr{L}[\cos ax] + \mathrm{i}\mathscr{L}[\sin ax] = \tfrac{1}{s-\mathrm{i}a}\\
&\tfrac{1}{s-\mathrm{i}a} = \tfrac{s+\mathrm{i}a}{s^2+a^2} = \tfrac{s}{s^2+a^2} + \mathrm{i}\tfrac{a}{s^2+a^2}\\
&\Rightarrow \mathscr{L}[\cos ax] = \tfrac{s}{s^2+a^2},\ \mathscr{L}[\sin ax] = \tfrac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

▲

مثال ۲۰.۳. لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

(الف)
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[2x^2 + 3 + \sin 3x] &= 2\mathscr{L}[x^2] + 3\mathscr{L}[1] + \mathscr{L}[\sin 3x]\\
&= 2\tfrac{2!}{s^3} + 3\tfrac{1}{s} + \tfrac{3}{s^2+9}
\end{aligned}$$

(یادآوری $a \in \mathbb{N},\quad \Gamma(a+1) = a!, \mathscr{L}[x^a] = \tfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$)

(ب)
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\sin 2x \cos 2x] &= \mathscr{L}[\tfrac{1}{2}\sin 4x]\\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{4}{s^2+16}
\end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\cos^2 2x] &= \mathscr{L}[\tfrac{1+\cos 4x}{2}]\\
&= \tfrac{1}{2}\mathscr{L}[1] + \tfrac{1}{2}\mathscr{L}[\cos 4x]\\
&= \tfrac{1}{2s} + \tfrac{1}{2}\tfrac{s}{s^2+16}
\end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[x^{\frac{3}{2}} + \sinh 2x] &= \mathscr{L}[x^{\frac{3}{2}}] + \mathscr{L}[\sinh 2x]\\
&= \tfrac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} + \tfrac{2}{s^2-4}
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۲۱.۳.

(ه) $\mathscr{L}[\sin^2 x \cos^3 x]$

(ی) $\mathscr{L}[\sin^3 x]$

۳.۳ تبدیل معکوس لاپلاس

تعریف ۲۲.۳. اگر $F(s)$ یک تابع باشد، تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $[۰,+\infty)$ را تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ گوییم هرگاه $\mathscr{L}[f(x)]=F(s)$ و با $\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]$ نمایش می‌دهیم.

$$\mathscr{L}[f(x)]=F(s) \Leftrightarrow f(x)=\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]$$

▲

در نتیجه با توجه به توابعی که قبلاً لاپلاس آنها را محاسبه کردیم، می‌توانیم لاپلاس وارون خیلی از توابع را به دست آوریم. به عنوان چند مثال ساده در زیر داریم:

$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s}]=۱$ (زیرا دیدیم که $\mathscr{L}[۱]=\frac{۱}{s}$)

$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s-a}]=e^{ax}$ (زیرا دیدیم که $\mathscr{L}[e^{ax}]=\frac{۱}{s-a}$)

$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{s}{s^۲+a^۲}]=\cos ax$

$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{a}{s^۲+a^۲}]=\sin ax$

$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{s}{s^۲-a^۲}]=\cosh ax$

$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{a}{s^۲-a^۲}]=\sinh ax$

$\mathscr{L}^{-۱}[s^{-\alpha}]=\frac{x^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}$ (زیرا دیدیم که $\mathscr{L}[x^a]=\frac{\Gamma(a+۱)}{s^{\alpha+۱}}$)

مثال ۲۳.۳. به عنوان مثال

(الف) $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲}]=\mathscr{L}^{-۱}[s^{-۲}]=\frac{x}{\Gamma(۲)}=x$

(ب) $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۳}]=\mathscr{L}^{-۱}[s^{-۳}]=\frac{x^۲}{\Gamma(۳)}=\frac{x^۲}{۲!}$

(ج) $\mathscr{L}^{-۱}[s^{-\frac{۳}{۲}}]=\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{۳}{۲})}$

▲

نکته ۲۴.۳.
عملگر $\mathscr{L}^{-۱}$ یک عملگر خطی است. یعنی

$$\mathscr{L}^{-۱}[c_۱F(s)+c_۲G(s)]=c_۱\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]+c_۲\mathscr{L}^{-۱}[G(s)].$$

در نتیجه با توجه به این نکته می‌توان لاپلاس وارون توابع پیچیده‌تری را محاسبه کرد.

مثال ۲۵.۳. لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه نمایید.

(الف) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s+2}{s^2+1}]$
$$= \mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+1}] + 2\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]$$
$$= \cos x + 2\sin x$$

(ب) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}]$
$$= \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}]$$
$$= \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]$$
$$= 1 - e^{-x}$$

(ج) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)}]$
$$= \mathscr{L}^{-1}[\frac{\frac{1}{4}s}{s^2-1} + \frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+3}]$$
$$= \frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)} = \frac{As+B}{s^2-1} + \frac{Cs+D}{s^2+3}$$

پس از محاسبه D, C, B, A
$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0$$
$$C = -\frac{1}{4}, \quad D = 0$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\cosh x - \frac{1}{4}\cos\sqrt{3}x.$$
▲

تمرین ۲۶.۳. لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه نمایید.

(د) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^4-1}]$

(ه) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-s-12}]$

(ی) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}]$

در ادامه خواصی از تبدیل لاپلاس را خواهیم دید که ارتباط لاپلاس یک تابع با لاپلاس مشتق آن را بیان می‌کند.

قضیه ۲۷.۳. اگر تابع f بر بازه $[0, +\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، همچنین برای هر x، $|f(x)| \le Me^{ax}$ که M و a اعداد حقیقی ثابت هستند و $f'(x)$ بر $[0, +\infty)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه

$$\mathscr{L}[f'(x)] = s\mathscr{L}[f(x)] - f(0)$$

طرح اثبات

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[f'(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx \\
u &= e^{-sx} \Rightarrow du = -se^{-sx}dx \\
dv &= f'(x)dx \Rightarrow v = f(x) \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= e^{-sx}f(x)|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-sx}f(x)dx \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx - f(0) \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= s\mathscr{L}[f(x)] - f(0).
\end{aligned}
$$

نتیجه ۲۸.۳. با استفاده مجدد از این خاصیت داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[f''(x)] &= s\mathscr{L}[f'(x)] - f'(0) \\
\mathscr{L}[f''(x)] &= s^2\mathscr{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}
$$

در حالت کلی

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(x)] = s^n\mathscr{L}[f(x)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

تا اینجا با همین اطلاعات می‌توانیم معادلات مرتبه دوم خطی غیرهمگن ساده‌ای را با استفاده روش لاپلاس حل کنیم. در این روش، روند کلی به این صورت است که از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم. با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس همه عبارت‌ها را بر حسب $\mathscr{L}[y]$ تبدیل می‌کنیم. تا جایی که معادله $\mathscr{L}[y]$ برابر یک تابعی به دست آید. سپس با اعمال لاپلاس وارون بر طرفین آن معادله تابع مجهول را به دست می‌آوریم.

مثال ۲۹.۳. معادله $y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$، $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&y'' - ۵y' + ۶y = e^{۴x}\\
&\mathscr{L}[y'' - ۵y' + ۶y] = \mathscr{L}[e^{۴x}]\\
&\mathscr{L}[y''] - ۵\mathscr{L}[y'] + ۶\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{۴x}]\\
&s^۲\mathscr{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) - ۵s\mathscr{L}[y] - ۵y(۰) + ۶\mathscr{L}[y] = \tfrac{۱}{s-۴}\\
&(s^۲ - ۵s + ۶)\mathscr{L}[y] - s - ۴ = \tfrac{۱}{s-۴}\\
&(s^۲ - ۵s + ۶)\mathscr{L}[y] = \tfrac{۱}{s-۴} + s + ۴ = \tfrac{s^۲-۱۵}{s-۴}\\
&\mathscr{L}[y] = \tfrac{s^۲-۱۵}{(s-۴)(s^۲-۵s+۶)}\\
&\Rightarrow y = \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{s^۲-۱۵}{(s-۴)(s^۲-۵s+۶)}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{s^۲-۱۵}{(s-۴)(s-۲)(s-۳)} &= \tfrac{A}{s-۴} + \tfrac{B}{s-۲} + \tfrac{C}{s-۳}\\
&\Rightarrow A = \tfrac{۱}{۲},\ B = \tfrac{-۱۱}{۲},\ C = ۶\\
y &= \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{\frac{۱}{۲}}{s-۴}] + \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{\frac{-۱۱}{۲}}{s-۲}] + \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۶}{s-۳}]\\
y &= \tfrac{۱}{۲}e^{۴x} + \tfrac{-۱۱}{۲}e^{۲x} + ۶e^{۳x}
\end{aligned}
$$

▲

تمرین ۳۰.۳. معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

(الف) $y'' + ۳y' + ۲y = \cos x \quad y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۲$

(ب) $y'' - ۳y' + ۲y = e^{-x} \quad y(۲) = ۰,\ y'(۲) = ۱$

(ج) $y'' + y' - ۲y = x \quad y(۰) = ۲,\ y'(۰) = ۰$

قضیه ۳۱.۳. اگر $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$، آنگاه $\mathscr{L}[-xf(x)] = \frac{dF(s)}{ds}$

اثبات.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}F(s) &= \tfrac{d}{ds}\int_۰^\infty e^{-sx}f(x)dx = \int_۰^\infty \tfrac{\partial}{\partial s}(e^{-sx}f(x))dx\\
&= \int_۰^\infty -xe^{-sx}f(x)dx = \int_۰^\infty e^{-sx}(-xf(x))dx\\
\tfrac{dF(s)}{ds} &= \mathscr{L}[-xf(x)].
\end{aligned}
$$

■

نتیجه ۳۲.۳. با تکرار قضیه بالا برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\mathscr{L}[(-۱)^n x^n f(x)] = \frac{d^n}{dx^n}\mathscr{L}[f(x)]$$

مثال ۳۳.۳. لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

۱. $\mathscr{L}[x\sin ax]$

$$= -\tfrac{d}{ds}\mathscr{L}[\sin ax] = -\tfrac{d}{ds}(\tfrac{a}{s^۲+a^۲})$$

$$= -(\tfrac{-۲as}{(s^۲+a^۲)^۲}) = \tfrac{۲as}{(s^۲+a^۲)^۲}$$

۲. $\mathscr{L}[x^۲\cos ax]$

$$= (-۱)^۲\tfrac{d^۲}{ds^۲}\mathscr{L}[\cos ax]$$

$$= \tfrac{d^۲}{ds^۲}(\tfrac{s}{s^۲+a^۲})$$

$$= \tfrac{d}{ds}[\tfrac{s^۲+a^۲-۲s^۲}{(s^۲+a^۲)^۲}]$$

$$= \tfrac{-۲s(s^۲+a^۲)^۲-۴s(s^۲+a^۲)(a^۲-s^۲)}{(s^۲+a^۲)^۴}$$

$$= \tfrac{۲s(s^۲-۳a^۲)}{(s^۲+a^۲)^۳}$$

۳. $\mathscr{L}[x\sin^۲ ax]$

$$= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[\sin^{۲} ax]$$

$$= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[\frac{۱-\cos ۲ax}{۲}]$$

$$= -\frac{d}{ds}[\frac{۱}{۲s} - \frac{۱}{۲}\frac{s}{s^{۲}+۴a^{۲}}]$$

$$= \frac{۱}{۲s^{۲}} + \frac{۱}{۲}\frac{s^{۲}+۴a^{۲}-۲s^{۲}}{(s^{۲}+۴a^{۲})^{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲s^{۲}} + \frac{۱}{۲}\frac{۴a^{۲}-s^{۲}}{(s^{۲}+۴a^{۲})^{۲}}$$

▲

تمرین ۳۴.۳.

(الف) $\mathscr{L}[x^{۲}e^{ax}]$

(ب) $\mathscr{L}[x^{n}e^{ax}], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{۱}{s-a}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+۱}}$ با استقرا

(ج) $\mathscr{L}[x \sinh ۲x]$

با توجه به خاصیت گفته شده می‌توانیم لاپلاس معکوس توابع پیچیده‌تری را به دست آوریم. کافی است تشخیص دهیم تابع داده شده مشتق چه تابعی است.
به عنوان مثال به نمونه‌های زیر دقت کنید.

$$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{d}{ds}F(s)] = -x\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]$$

مثال ۳۵.۳.

۱. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{s}{(s+۱)^{۲}}]$
$$= \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s+۱}] - \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s+۱)^{۲}}]$$
$$= e^{-x} - \mathscr{L}^{-۱}[-\frac{d}{ds}\frac{۱}{s+۱}]$$
$$= e^{-x} - xe^{-x}$$

۲. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s-۴)^{۳}}]$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{d^۲}{ds^۲}(\tfrac{۱}{s-۴})]\\&= \tfrac{۱}{۲}x^۲e^{۴x}\end{aligned}$$

در حالت کلی:
در تمرین ۳۴.۳ قسمت (ب) دیدیم که

$$\mathscr{L}[x^n e^{ax}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+۱}}.$$

در نتیجه

$$\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s-a)^{n+۱}}] = \frac{x^n e^{ax}}{n!}.$$

▲

مثال ۳۶.۳.

۱. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲}] = x$

۲. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۳}] = \frac{x^۲}{۲!}$

۳. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{n+۱}}] = \frac{x^n}{n!}$

▲

مثال ۳۷.۳. لاپلاس وارون زیر را محاسبه کنید.

$$\mathscr{L}^{-۱}[\ln(\frac{s+a}{s-a})]$$

حل. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-۱}[\ln(\tfrac{s+a}{s-a})] &&= f(x)\\
\Rightarrow\quad &\mathscr{L}[f(x)] &&= \ln(\tfrac{s+a}{s-a})\\
\Rightarrow\quad &\mathscr{L}[xf(x)] &&= -\tfrac{d}{ds}\ln(\tfrac{s+a}{s-a})\\
\Rightarrow\quad &\mathscr{L}[xf(x)] &&= \tfrac{۲a}{s^۲-a^۲}\\
\Rightarrow\quad &\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۲a}{s^۲-a^۲}] &&= xf(x)\\
\Rightarrow\quad &۲\sinh ax &&= xf(x)\\
\Rightarrow\quad &f(x) &&= \tfrac{۲\sinh ax}{x}
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۳۸.۳.

$$\mathscr{L}^{-۱}[\ln(۱-\frac{a^۲}{s^۲})] =?$$

قضیه ۳۹.۳. اگر $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$ و $\lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x)}{x}$ موجود باشد، آنگاه

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(u)du$$

طرح اثبات:

$$\begin{aligned} F(u) &= \textstyle\int_۰^\infty e^{-ux} f(x)dx \\ \textstyle\int_s^\infty F(u)du &= \textstyle\int_s^\infty (\int_۰^\infty e^{-ux} f(x)dx)du \\ &= \textstyle\int_۰^\infty (\int_s^\infty e^{-ux} f(x)du)dx \\ &= \textstyle\int_۰^\infty [-\frac{۱}{x}e^{-ux}]|_s^\infty f(x)dx \\ &= \textstyle\int_۰^\infty e^{-sx} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \mathscr{L}[\frac{f(x)}{x}]. \end{aligned}$$

نتیجه ۴۰.۳.

$$\mathscr{L}^{-۱}\left[\int_s^\infty F(u)du\right] = \frac{۱}{x}\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]$$

مثال ۴۱.۳.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\tfrac{\sin ax}{x}] &= \int_{\circ}^{\infty} \mathscr{L}[\sin ax]du \\
&= \int_{s}^{\infty} \tfrac{a}{u^{۲}+a^{۲}}du \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_{s}^{b} \tfrac{a}{u^{۲}+a^{۲}}du \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_{s}^{b} \tfrac{۱}{a}\tfrac{du}{(\frac{u}{a})^{۲}+۱} \\
&\tfrac{u}{a} = t \Rightarrow \tfrac{du}{a} = dt \\
\mathscr{L}[\tfrac{\sin ax}{x}] &= \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{s}{a}}^{\frac{b}{a}} \tfrac{dt}{t^{۲}+۱} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\tan^{-۱}\tfrac{b}{a} - \tan^{-۱}\tfrac{s}{a}\right] \\
&= \tfrac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\tfrac{s}{a} \\
&= \tan^{-۱}\tfrac{a}{s}
\end{aligned}$$

▲

مثال ۴۲.۳.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{s}{(s^{۲}+۴)^{۲}}] &= f(x) \\
\Rightarrow &\tfrac{f(x)}{x} = \mathscr{L}^{-۱}(\int_{s}^{\infty} \tfrac{u}{(u^{۲}+۴)^{۲}}du) \\
\tfrac{f(x)}{x} &= \mathscr{L}^{-۱}\left[\lim_{b\to+\infty} \int_{s}^{b} \tfrac{u}{(u^{۲}+۴)^{۲}}du\right] \\
&u^{۲}+۴ = t \Rightarrow ۲udu = dt \\
&= \mathscr{L}^{-۱}\left[\lim_{b\to+\infty} \int_{s^{۲}+۴}^{b^{۲}+۴} \tfrac{۱}{۲}\tfrac{dt}{t^{۲}}\right] \\
\tfrac{f(x)}{x} &= \mathscr{L}^{-۱}[\lim_{b\to\infty}[\tfrac{-۱}{۲t}]_{s^{۲}+۴}^{b^{۲}+۴}] \\
&= \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{۲(s^{۲}+۴)}] \\
\tfrac{f(x)}{x} &= \tfrac{۱}{۴}\sin ۲x \\
f(x) &= \tfrac{۱}{۴}x\sin ۲x.
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۴۳.۳. لاپلاس یا لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $\mathscr{L}[\frac{\sinh ax}{x}]$

(ب) $\mathscr{L}[\int_{\circ}^{x} e^{-۳t}\frac{۱-e^{-t}}{t}dt]$

(ج) $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{۳}(s^{۲}+۱)^{۲}}]$

(د) $\mathscr{L}[\frac{1}{(s^2+1)^2}]$

مثال ۴۴.۳. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$xy'' + 2(x-1)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0$ ۱۷.۳

$\mathscr{L}[xy''] + 2\mathscr{L}[(x-1)y'] - 2\mathscr{L}[y] = 0$

$-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y''] - 2\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y'] - 2\mathscr{L}[y'] - 2\mathscr{L}[y]$ ۳۱.۳

$-\frac{d}{ds}[s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0)] - 2\frac{d}{ds}[s\mathscr{L}[y] - y(0)]$ ۲۷.۳

$-2[s\mathscr{L}[y] - y(0)] - 2\mathscr{L}[y] = 0$ مشتق‌گیری بر حسب s

$-2s\mathscr{L}[y] - s^2\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] - 2\mathscr{L}[y] - 2s\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y]$

$-2s\mathscr{L}[y] - 2\mathscr{L}[y] = 0$ ساده‌سازی

$(s^2+2s)\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] + (4s+4)\mathscr{L}[y] = 0$

$\Rightarrow \frac{\mathscr{L}'[y]}{\mathscr{L}[y]} = -\frac{4s+4}{s^2+2s}$

$\Rightarrow \ln(\mathscr{L}[y]) = -2\int \frac{2s+2}{s^2+2s}ds$

$\ln(\mathscr{L}[y]) = -2\ln(s^2+2s) = \ln(s^2+2s)^{-2}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y] = \frac{1}{(s^2+2s)^2}$

تابع y با لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین تساوی بالا به دست می‌آید.

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+2s)^2}\right]$$

تفکیک کسر

$$\frac{1}{(s^2+2s)^2} = \frac{1}{s^2(s+2)^2} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s+2)^2}$$

محاسبه ضرایب

$$\begin{aligned} & A = -\tfrac{1}{4}, \quad B = \tfrac{1}{4}, \quad C = \tfrac{1}{4}, \quad D = \tfrac{3}{4} \\ \Rightarrow \quad & \mathscr{L}^{-1}[-\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{s}] + \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{s^2}] + \tfrac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s+3}{(s+2)^2}] \\ \Rightarrow \quad & y = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{s+2}] + \tfrac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s+2)^2}] \\ \Rightarrow \quad & y = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}e^{-2x} + \tfrac{1}{4}xe^{-2x} \end{aligned}$$

▲

تمرین ۴۵.۳. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $xy'' + (x-۱)y' - y = ۰ \quad y(۰) = ۰$

(ب) $y'' - ۶y' + ۹y = ۶x^۲e^{۳x} \quad y(۰) = ۰, \ \ y'(۰) = ۰$

(ج) $xy'' + y' + xy = ۰ \quad y(۰) = ۱$

قضیه ۴۶.۳. اگر $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$، آنگاه $\mathscr{L}[e^{ax}f(x)] = F(s-a)$.

اثبات.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{ax}f(x)] &= \int_۰^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx\\ &= \int_۰^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx\\ &= F(s-a).\end{aligned}$$

■

نتیجه ۴۷.۳.

$$\mathscr{L}[F(s-a)] = e^{ax}\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]$$

مثال ۴۸.۳.

۱. $\mathscr{L}[e^{۳x}\cos ۲x] = \mathscr{L}[\cos ۲x]\Big|_{s\mapsto s-۳} = \frac{s-۳}{(s-۳)^۲+۴}$

۲. $\mathscr{L}[x^{\frac{۳}{۲}}e^{۲x}] = \mathscr{L}[x^{\frac{۳}{۲}}]\Big|_{s\mapsto s-۲} = \frac{\Gamma(\frac{۵}{۲})}{(s-۲)^{\frac{۵}{۲}}}, \quad \mathscr{L}[x^ne^{ax}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+۱}}$ یادآوری

۳. $$\begin{aligned}&\mathscr{L}[\tfrac{\cosh ۲x}{\sqrt{x}}]\\ &= \mathscr{L}[x^{-\frac{۱}{۲}}\tfrac{e^{۲x}+e^{-۲x}}{۲}]\\ &= \tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}[x^{-\frac{۱}{۲}}e^{۲x}] + \tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}[x^{-\frac{۱}{۲}}e^{-۲x}]\\ &= \tfrac{۱}{۲}\tfrac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{(s-۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \tfrac{۱}{۲}\tfrac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{(s+۲)^{\frac{۱}{۲}}}\end{aligned}$$

.۴

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[xe^x \sin 2x \cos 2x] & \\
&= \tfrac{1}{2}\mathscr{L}[xe^x \sin 4x] \\
&= \tfrac{1}{2}\mathscr{L}[x \sin 4x]\Big|_{s\mapsto s-1} \\
&= \tfrac{4(s-1)}{((s-1)^2+16)^2} \\
\mathscr{L}[x\sin 4x] &= -\tfrac{d}{ds}\mathscr{L}[\sin 4x] \\
&= -\tfrac{d}{ds}\left(\tfrac{2}{s^2+4^2}\right) \\
&= \tfrac{4s}{(s^2+16)^2}
\end{aligned}
$$

.۵

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s-2}{s^2+4s+5}] \\
&= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s+2-4}{(s+2)^2+1}] \\
&= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s+2}{(s+2)^2+1}] - 4\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s+2)^2+1}] \\
&= e^{-2x}\cos x - 4e^{-2x}\sin x
\end{aligned}
$$

.۶

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s}{(s+1)^5}] \\
&= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s+1)^4}] - \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s+1)^5}] \\
&= e^{-x}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^4}] - e^{-x}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^5}] \\
&= e^{-x}\tfrac{x^3}{3!} - e^{-x}\tfrac{x^4}{4!}
\end{aligned}
$$

(یادآوری $\mathscr{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^{n+1}}] = \frac{x^n}{n!}$)

.۷

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{3s+1}{4s^2+4s+5}] & \\
&= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{3}{4}\tfrac{s+\frac{1}{3}}{s^2+s+\frac{5}{4}}] \\
&= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{3}{4}\tfrac{s+\frac{1}{3}}{(s+\frac{1}{2})^2+1}] \\
&= \tfrac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}{(s+\frac{1}{2})^2+1}] \\
&= \tfrac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+1}] - \tfrac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+1}] \\
\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{3s+1}{4s^2+4s+5}] &= \tfrac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\cos x - \tfrac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}\sin x.
\end{aligned}
$$

▲

تمرین ۴۹.۳.

(الف) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-2s+3}]$

(ب) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2-3s+3}]$

(ج) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{9s^2-12s+5}]$

(د) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}]$

(ه) $\mathscr{L}[\sqrt{x}e^{2x}]$

(و) $\mathscr{L}[xe^{-2x}\cos^2 ax]$

(ی) $\mathscr{L}[x\sinh x\cos 3x]$

۴.۳ تبدیل لاپلاس توابع ناپیوسته

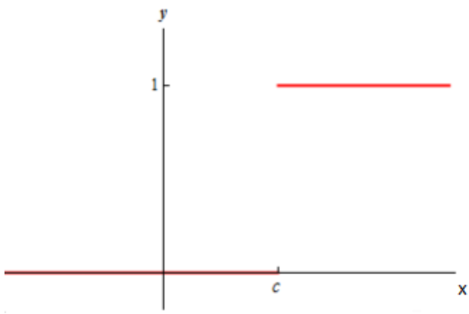
تا اینجا در مورد تبدیل لاپلاس توابع پیوسته صحبت کردیم. در عمل گاهی به تبدیل لاپلاس توابع قطعه به قطعه پیوسته (تعداد نقاط ناپیوستگی در یک بازه متناهی و در نقطه ناپیوستگی حد چپ و راست موجود و متناهی است) نیاز داریم.
ابتدا ساده‌ترین نوع از این توابع را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵۰.۳. تابع پله‌ای واحد تابعی با ضابطه زیر است و برای $c \in \mathbb{R}$ ثابت این تابع را با U_c نمایش می‌دهیم.

$$U_c(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

واضح است که اگر $c = 0$، آنگاه $U_c(x) = 1$. ▲

نمودار تابع U_c به شکل زیر است.



حال تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[U_c(x)] &= \int_\circ^\infty e^{-sx}U_c(x)dx \\
&= \int_\circ^c e^{-sx}\times \circ\, dx + \int_c^\infty e^{-sx}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_c^b e^{-sx}dx \\
\mathscr{L}[U_c(x)] &= \lim_{b\to+\infty}[-\tfrac{۱}{s}e^{-sb}+\tfrac{۱}{s}e^{-sc}] \\
&= \tfrac{e^{-sc}}{s} \quad s>\circ.
\end{aligned}$$

نتیجه ۵۱.۳.

$$\mathscr{L}[U_c(x)] = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s>\circ.$$

مثال ۵۲.۳.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[U_۲(x)] &= \tfrac{e^{-۲s}}{s} \\
\mathscr{L}[U_{\frac{۱}{۲}}(x)] &= \tfrac{e^{-\frac{۱}{۲}s}}{s}
\end{aligned}$$

▲

از آنجا که توابع قطعه به قطعه پیوسته را می‌توان به صورت مجموع توابع پله‌ای واحد نوشت، تبدیل لاپلاس چنین توابعی را نیز می‌توانیم به دست آوریم.

مثال ۵۳.۳. تابع $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x & \circ\le x<۳ \\ \circ & x\ge ۳\end{array}\right.$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس f را به دست آورید.

حل: ابتدا $f(x)$ را بر حسب توابع پله‌ای واحد می‌نویسیم. به راحتی می‌توان دید که رابطه زیر برقرار است.

$$f(x)=x(U_\circ(x)-U_۳(x))$$

برای دیدن تساوی بالا کافی است بررسی کنیم که برای همه مقادیر x طرف اول و طرف

دوم تساوی بالا، یک مقدار مساوی دارد.

$$\begin{array}{rl}
 & \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x(U_{۰}(x) - U_{۳}(x)) = x(۱ - ۰) = x \end{cases} \\
۰ \leq x < ۳ & \Rightarrow f(x) = x(U_{۰}(x) - U_{۳}(x)) \\
 & \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۰ \\ x(U_{۰}(x) - U_{۳}(x)) = x(۱ - ۱) = ۰ \end{cases} \\
x \geq ۳ & \Rightarrow f(x) = x(U_{۰}(x) - U_{۳}(x)) \\
 & \Rightarrow \forall x \in [۰, +\infty) \quad f(x) = x(U_{۰}(x) - U_{۳}(x)) \\
 & \Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] = \mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[xU_{۳}(x)] \\
\mathscr{L}[f(x)] & = \frac{۱}{s^{۲}} + \frac{d}{ds}\mathscr{L}[U_{۳}(x)] \\
 & = \frac{۱}{s^{۲}} + \frac{d}{ds}(\frac{e^{-۳s}}{s}) \\
\mathscr{L}[f(x)] & = \frac{۱}{s^{۲}} + \frac{-۳e^{-۳s}s - e^{-۳s}}{s^{۲}}
\end{array}$$

▲

مثال ۵۴.۳. تبدیل لاپلاس تابع جزء صحیح $[x]$ را به دست آورید.

$$[x] = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < ۱ \\ ۱ & ۱ \leq x < ۲ \\ ۲ & ۲ \leq x < ۳ \\ \vdots & \vdots \\ n & n \leq x < n+۱ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl}
\Rightarrow [x] & = ۰(U_{۰}(x) - U_{۱}(x)) + ۱(U_{۱}(x) - U_{۲}(x)) \\
 & \quad + ۲(U_{۲}(x) - U_{۳}(x)) + \cdots + n(U_{n}(x) - U_{n+۱}(x)) + \cdots \\
\Rightarrow [x] & = U_{۱}(x) + U_{۲}(x) + \cdots + U_{n}(x) + \cdots \\
\Rightarrow \mathscr{L}[[x]] & = \mathscr{L}[U_{۱}(x)] + \mathscr{L}[U_{۲}(x)] + \cdots + \mathscr{L}[U_{n}(x)] + \cdots \\
\Rightarrow \mathscr{L}[[x]] & = \sum_{n=۱}^{\infty} \mathscr{L}[U_{n}(x)]
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[[x]] &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s} = \frac{۱}{s}\sum_{n=۱}^{\infty}(e^{-s})^n \\
&\text{اما می‌دانیم که } \sum_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱-x} \text{ برای } |x|<۱ \\
\Rightarrow &\sum_{n=۰}^{\infty}(e^{-s})^n = \frac{۱}{۱-e^{-s}} \quad s>۰ \\
\mathscr{L}[[x]] &= \frac{۱}{s}\left[\sum_{n=۰}^{\infty}(e^{-s})^n - ۱\right] \\
&= \frac{۱}{s}\left[\frac{۱}{۱-e^{-s}} - ۱\right] \\
\mathscr{L}[[x]] &= \frac{e^{-s}}{s(۱-e^{-s})}, \quad s>۰
\end{aligned}
$$

▲

تمرین ۵۵.۳. لاپلاس تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le x < ۲ \\ -۸ & ۲ \le x < \pi \\ ۰ & x \ge \pi \end{cases}$ را به دست آورید.

در ادامه تأثیر ضرب تابع پله واحد در یک تابع را در تبدیل لاپلاس آن بررسی می‌کنیم.

قضیه ۵۶.۳. اگر $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$، آنگاه $\mathscr{L}[U_c(x)f(x-c)] = e^{-cs}$.

اثبات.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[U_c(x)f(x-c)] &= \int_۰^{\infty} e^{-sx}U_c(x)f(x-c)dx \\
&= \int_۰^{\infty} e^{-sx}f(x-c)dx \\
&\quad x-c=t,\ x=c \Rightarrow t=۰,\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\
&= \int_۰^{\infty} e^{-s(c+t)}f(t)dt \\
&= \int_۰^{\infty} e^{-sc}e^{-st}f(t)dt \\
&= e^{-sc}\int_۰^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\
\mathscr{L}[U_c(x)f(x-c)] &= e^{-cs}\mathscr{L}[f(x)]
\end{aligned}
$$

■

مثال ۵۷.۳. تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

۱. $\mathscr{L}[U_۲(x)\sin x]$

$$\begin{aligned}
&= \mathscr{L}[U_۲(x)\sin(x-۲+۲)]\\
&(\text{می‌دانیم که } \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\
&= \mathscr{L}[U_۲(x)(\sin(x-۲)\cos ۲+\cos(x-۲)\sin ۲)]\\
&= \cos ۲\mathscr{L}[U_۲(x)\sin(x-۲)]+\sin ۲\mathscr{L}[U_۲(x)\cos(x-۲)]\\
&= \cos ۲\times e^{-۲s}\tfrac{۱}{s^۲+۱}+\sin ۲\times e^{-۲s}\tfrac{s}{s^۲+۱}\Rightarrow\\
\mathscr{L}[U_۲(x)\sin x] &= \tfrac{e^{-۲s}}{s^۲+۱}(\cos ۲+s\sin ۲)
\end{aligned}$$

۲. $\mathscr{L}[(x-۱)^۲U_\pi(x)]$

$$\begin{aligned}
&= \mathscr{L}[(x-\pi+\pi-۱)^۲U_\pi(x)]\\
&= \mathscr{L}[(x-\pi)^۲U_\pi(x)]+\mathscr{L}[۲(\pi-۱)(x-\pi)U_\pi(x)]\\
&\quad+\mathscr{L}[(\pi-۱)^۲U_\pi(x)]\\
&= e^{-\pi s}\mathscr{L}[x^۲]+۲(\pi-۱)e^{-\pi s}\mathscr{L}[x]+(\pi-۱)^۲\mathscr{L}[U_\pi(x)]\\
&= e^{-\pi s}(\tfrac{۲}{s^۳}+۲(\pi-۱)\tfrac{۱}{s^۲}+(\pi-۱)^۲\tfrac{۱}{s})
\end{aligned}$$

▲

نتیجه ۵۸.۳.

$$\mathscr{L}^{-۱}[e^{-cs}F(s)]=U_c(x)\mathscr{L}^{-۱}[F(s)]_{x\mapsto x-c}$$

مثال ۵۹.۳. لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

۱. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱-e^{-۲s}}{s^۲}]$

$$\begin{aligned}
&= \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s^۲}]-\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۲s}}{s^۲}]\\
&= x-U_۲(x)\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s^۲}]_{x\mapsto x-۲}\\
&= x-U_۲(x)(x-۲)
\end{aligned}$$

۲. $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{e^{-۴s}}{s^۲-s-۲}]$

$$\begin{aligned}
&= -\tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۴s}}{s+۱}]+\tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۴s}}{s-۲}]\\
&\tfrac{۱}{s^۲-s-۲}=\tfrac{A}{s+۱}+\tfrac{B}{s-۲}\Rightarrow A=-\tfrac{۱}{۳},\ B=\tfrac{۱}{۳}\\
&= -\tfrac{۱}{۳}U_۴(x)\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}]_{x\mapsto x-۴}+\tfrac{۱}{۳}U_۴(x)\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s-۲}]_{x\mapsto x-۴}\\
\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۴s}}{s^۲-s-۲}] &= -\tfrac{۱}{۳}U_۴(x)(e^{-(x-۴)}-e^{۲(x-۴)})
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۶۰.۳. تبدیل لاپلاس یا لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<\frac{\pi}{۶} \\ \sin x & x\ge \frac{\pi}{۶} \end{cases} \quad , \quad \mathscr{L}[f(x)]=?$

(ب) $f(x)=\begin{cases} \sin x & ۰\le x<\frac{\pi}{۶} \\ \cos x & x\ge \frac{\pi}{۶} \end{cases} \quad , \quad \mathscr{L}[f(x)]=?$

(ج) $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{e^{-s}(s-۲)}{s^۲+۴s+۵}]$

(د) $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{e^{-۳s}}{(۲s-۱)^۳}]$

(ه) $\mathscr{L}^{-۱}[\frac{e^{-۳s}(۳s+۱)}{s^۳+۵s^۲+۱۱s+۷}]$

مثال ۶۱.۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y''+۲y'+y=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<\frac{\pi}{۲} \\ \cos ۲x & x\ge \frac{\pi}{۲} \end{cases} \qquad y(۰)=y'(۰)=۰$$

ابتدا تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<\frac{\pi}{۲} \\ \cos ۲x & x\ge \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos ۲x U_{\frac{\pi}{۲}}(x)=U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\cos ۲(x-\tfrac{\pi}{۲}+\tfrac{\pi}{۲}) \\ f(x) &= U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\cos[۲(x-\tfrac{\pi}{۲})+\pi]=-U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\cos ۲(x-\tfrac{\pi}{۲}) \\ \mathscr{L}[f(x)] &= -\mathscr{L}[U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\cos ۲(x-\tfrac{\pi}{۲})] \\ \mathscr{L}[f(x)] &= -e^{-\frac{\pi}{۲}s}\mathscr{L}[\cos ۲x]=-e^{-\frac{\pi}{۲}s}\frac{s}{s^۲+۴} \end{aligned}$$

حال از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\mathscr{L}[y''] + ۲\mathscr{L}[y'] + \mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[f(x)]$$
$$s^۲\mathscr{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) + ۲s\mathscr{L}[y] - ۲y(۰) + \mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[f(x)]$$
$$(s^۲ + ۲s + ۱)\mathscr{L}[y] = -e^{-\frac{\pi}{۲}s}\frac{s}{s^۲+۴}$$
$$\Rightarrow \mathscr{L}[y] = -e^{\frac{\pi}{۲}s}\frac{s}{(s^۲+۴)(s^۲+۲s+۱)}$$
$$\frac{s}{(s^۲+۴)(s+۱)^۲} = \frac{As+B}{s^۲+۴} + \frac{Cs+D}{(s+۱)^۲}$$
$$\Rightarrow A = -\frac{۳}{۲۵},\ B = \frac{۸}{۲۵},\ C = \frac{۳}{۲۵},\ D = -\frac{۲}{۲۵} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[y] &= -\frac{۱}{۲۵}e^{-\frac{\pi}{۲}s}\left[\frac{-۳s}{s^۲+۴} + \frac{۸}{s^۲+۴} + \frac{۳s}{(s+۱)^۲} - \frac{۲}{(s+۱)^۲}\right] \\
y &= -\frac{۱}{۲۵}U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\Big\{\mathscr{L}^{-۱}[\frac{-۳s}{s^۲+۴}] + \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۸}{s^۲+۴}] \\
&\quad +\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۳s}{(s+۱)^۲}] - \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۲}{(s+۱)^۲}]\Big\}_{x\mapsto x-\frac{\pi}{۲}} \\
y &= -\frac{۱}{۲۵}U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\left\{-۳\cos ۲(x-\frac{\pi}{۲}) + ۴\sin ۲(x-\frac{\pi}{۲})\right. \\
&\quad \left. + ۳\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s+۱}] - ۵\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s+۱)^۲}]\right\}_{x\mapsto x-\frac{\pi}{۲}} \\
y &= -\frac{۱}{۲۵}U_{\frac{\pi}{۲}}(x)\left\{-۳\cos ۲(x-\frac{\pi}{۲}) + ۴\sin ۲(x-\frac{\pi}{۲})\right. \\
&\quad \left. + ۳e^{-(x-\frac{\pi}{۲})} - ۵e^{-(x-\frac{\pi}{۲})}(x-\frac{\pi}{۲})\right\}.
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۶۲.۳. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف) $y'' + y = \begin{cases} x & ۰ \le x < ۴ \\ ۳ & x \ge ۴ \end{cases}, \quad y(۰) = y'(۰) = ۰$

(ب) $y'' - y = \begin{cases} ۰ & ۰ \le x < ۱ \\ x-۱ & x \ge ۱ \end{cases}, \quad y(۰) = ۱,\ \ y'(۰) = ۰$

(ج) $y'' - ۴y = U_۲(x) - U_۳(x), \quad y(۰) = y'(۰) = ۰$

(د) $y' - y = (U_۱(x) - U_۳(x))e^x, \quad y(۰) = ۴$

۵.۳ تبدیل لاپلاس توابع متناوب

تعریف ۶۳.۳. تابع متناوب با دوره تناوب T، تابعی است که برای هر $x \in D_f$،

$$f(x+T) = f(x).$$

(T دوره تناوب، کوچک‌ترین عدد با خاصیت فوق است) ▲

قضیه ۶۴.۳. اگر f بر بازه $[۰, +\infty)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه

$$\mathscr{L}[f(x)] = \frac{\int_۰^T e^{-sx} f(x)dx}{۱ - e^{-sT}}.$$

اثبات.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(x)] &= \int_۰^\infty e^{-sx} f(x)dx \\
&= \int_۰^T e^{-sx} f(x)dx + \int_T^{۲T} e^{-sx} f(x)dx + \cdots \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+۱)T} e^{-sx} f(x)dx + \cdots \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \sum_{n=۰}^\infty \int_{nT}^{(n+۱)T} e^{-sx} f(x)dx \\
x - nT &= u,\ x = nT \Rightarrow u = ۰ \\
x &= nT + v,\ x = (n+۱)T \Rightarrow u = T \\
dx &= du \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \sum_{n=۰}^\infty \int_۰^T e^{-s(u+nT)} f(u+nT)du \\
\mathscr{L}[f(x)] &= (\sum_{n=۰}^\infty e^{-snT})(\int_۰^T e^{-su} f(u)du) \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{۱}{۱-e^{-sT}} \int_۰^T e^{-su} f(u)du.
\end{aligned}$$

■

مثال ۶۵.۳.

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < ۱ \\ ۱ & ۱ \leq x < ۲ \end{cases} \quad f(x+۲) = f(x)$$

طبق فرمول قضیه ۶۴.۳

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-sx}f(x)dx\\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{1-e^{-2s}}[\int_1^2 e^{-sx}dx] = \frac{1}{1-e^{-2s}}[-\frac{1}{s}(e^{-2s}-e^{-s})]\\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})}\\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}.
\end{aligned}$$

▲

مثال ۶۶.۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \quad y(0) = y'(0) = 0 \\ 1 & 1 \le x < 2 \quad f(x+2) = f(x) \end{cases}$$

طرف راست معادله همان تابع $f(x)$ در مثال ۶۵.۳ است که تبدیل لاپلاس آن را محاسبه کردیم.
از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[f(x)]\\
&s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathscr{L}[y] = \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}\\
&(s^2+1)\mathscr{L}[y] = \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \mathscr{L}[y] = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)(1+e^{-s})}\\
\Rightarrow\quad & y = \mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)(1+e^{-s})}]\\
& \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad A=1,\ B=-1,\ C=0\\
\Rightarrow\quad & y = \mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{se^{-s}}{(s^2+1)(1+e^{-s})}]\\
\Rightarrow\quad & y = f(x) - \mathscr{L}^{-1}[\frac{se^{-s}}{(s^2+1)(1+e^{-s})}]
\end{aligned}$$

می‌دانیم که $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$، پس $\frac{1}{1+e^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-e^{-s})^n$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad y = f(x) - \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s}{s^2+1}e^{-s}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-sn}] \\
&\Rightarrow \quad y = f(x) - \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s}{s^2+1}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-s(n+1)}] \\
&\Rightarrow \quad y = f(x) - \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{se^{-s(n+1)}}{s^2+1}] \\
&\Rightarrow \quad y = f(x) + (-1)^{n+1}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s}{s^2+1}]_{x\mapsto x-(n+1)} \\
&\Rightarrow \quad y = f(x) + (-1)^{n+1}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)\cos(x-(n+1)).
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۶۷.۳. لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -1 & 1 \le x < 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$

(ب) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$

(ج) $y'' - y = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -1 & 1 \le x < 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$

۶.۳ حاصل‌ضرب کانولوسین (پیچشی)

به یاد داریم که $\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ و دیدیم که عملگر لاپلاس یک عملگر خطی است. با یک مثال ساده می‌توانیم ببینیم که عملگر لاپلاس برخلاف عمل جمع، روی عمل ضرب پخش نمی‌شود، یعنی در حالت کلی تساوی زیر برقرار نیست.

$$\mathscr{L}[f(x) \times g(x)] \stackrel{?}{=} \mathscr{L}[f(x)] \times \mathscr{L}[g(x)]$$

به عنوان مثال فرض کنید $f(x) = g(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[f] \times \mathscr{L}[g] = \tfrac{1}{s} \times \tfrac{1}{s} = \tfrac{1}{s^2} \\
&\mathscr{L}[f \times g] = \mathscr{L}[1] = \tfrac{1}{s}
\end{aligned}$$

حال در ادامه به دنبال تعریف عملگری روی دو تابع هستیم که لاپلاس آن عملگر روی دو تابع برابر حاصل‌ضرب لاپلاس دو تابع شود.

تعریف ۶۸.۳. حاصل‌ضرب کانولوسین (پیچشی) دو تابع f و g را با $f * g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f * g)(x) = \int_{\circ}^{x} f(x-t)g(t)dt$$

▲

مثال ۶۹.۳.

$$\cos x * ۱ = \int_{\circ}^{x} \cos t dt = \sin x$$

▲

خواص حاصل‌ضرب کانولوسین (پیچشی)

می‌توان با استفاده از تعریف دید که خواص زیر برقرار است.

۱. جابه‌جایی $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

۲. شرکت‌پذیری $f * (g * h) = (f * g) * h$.

۳. توزیع‌پذیری $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

۴. $f * \circ = \circ * f = \circ$.

۵. تابع ثابت ۱ عضو خنثی نیست یعنی $f * ۱ \neq f$.

۶. $۱ * ۱ = \int_{\circ}^{x} dt = x, \quad f * f \neq f^{۲}$.

قضیه ۷۰.۳. برای دو تابع f و g داریم:

$$\mathscr{L}[(f * g)(x)] = \mathscr{L}[f(x)] \times \mathscr{L}[g(x)]$$

نتیجه ۷۱.۳.

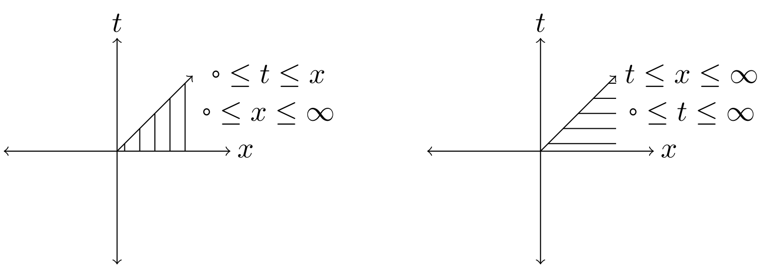
$$\mathscr{L}^{-۱}[F(s) \cdot G(s)] = \mathscr{L}^{-۱}[F(s)] * \mathscr{L}^{-۱}[G(s)]$$

اثبات. فرض کنید $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$ و $\mathscr{L}[g(x)] = G(s)$.

$$\begin{aligned}
F(s)\times G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt\right)\\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(u+t)} f(u)g(t)du\right)dt
\end{aligned}$$

تغییر متغیر
$$u+t=x$$
$$u=0 \Rightarrow t=x,\ u\to\infty \Rightarrow x\to\infty$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty\left(\int_k^\infty e^{-sx} f(x-t)g(t)dx\right)dt \quad (۱)\\
\text{تغییر ترتیب انتگرال‌ها} \quad &= \int_0^\infty\left(\int_0^x e^{-sx} f(x-t)g(t)dt\right)dx \quad (۲)
\end{aligned}$$



(ب) (آ)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(s)\times G(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)dt\right)dx\\
\Rightarrow F(s)\times G(s) &= \mathscr{L}\left[\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)dt\right]\\
\Rightarrow F(s)\times G(s) &= \mathscr{L}[f*g].
\end{aligned}$$

■

مثال ۷۲.۳. لاپلاس توابع زیر را حساب کنید. فرض کنید $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$.

.۱
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] &= \mathscr{L}[(f*1)(x)]\\
&= \mathscr{L}[f(x)]\times\mathscr{L}[1] \Rightarrow\\
\mathscr{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] &= \frac{1}{s}F(s)
\end{aligned}$$

دقت کنید که این تساوی را قبلاً از خاصیت ۲۷.۳ می‌توانستیم نشان دهیم.

۲.
$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^x\int_۰^x e^{-t}\sin t dt] &= \mathscr{L}[\int_۰^x e^{x-t}\sin t dt]\\ &= \mathscr{L}[e^x * \sin x]\\ &= \mathscr{L}[e^x]\times\mathscr{L}[\sin x]\\ &= \frac{۱}{s-۱}\times\frac{۱}{s^۲+۱}\end{aligned}$$

۳.
$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^x\int_۰^x e^{-۲u}(\frac{۱-e^{-u}}{u})du] &= \mathscr{L}[\int_۰^x e^{x-u}(\frac{e^{-u}-e^{-۲u}}{u})du]\\ &= \mathscr{L}[e^x * \frac{e^{-x}-e^{-۲x}}{x}]\\ &= \mathscr{L}[e^x]\mathscr{L}[\frac{e^{-x}-e^{-۲x}}{x}]\\ &= \frac{۱}{s-۱}\times\int_s^\infty(\frac{۱}{u+۱}-\frac{۱}{u+۲})du\\ &= \frac{-۱}{s-۱}\ln|\frac{s+۲}{s+۱}|.\end{aligned}$$

▲

مثال ۷۳.۳. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

۱.
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲(s+۱)}] &= \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲}\times\frac{۱}{s+۱}]\\ &= \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^۲}] * \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s+۱}]\\ &= x * e^{-x}\\ &= \int_۰^x (x-t)e^{-t}dt\\ & \quad \begin{matrix} x-t=u \Rightarrow -dt=du \\ e^{-t}dt=dv \Rightarrow v=-e^{-t}\end{matrix} \quad \Rightarrow\\ &= -e^{-t}(x-t)\Big|_۰^x - \int_۰^x e^{-t}dt\\ &= x+e^{-x}+۱\end{aligned}$$

دقت کنید که با روش‌های قبلی و تفکیک کسر هم این مسأله را می‌توانیم حل کنیم.

۲.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{(s^2+1)^2}] &= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2+1} \times \tfrac{1}{s^2+1}] \\
&= \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2+1}] * \mathscr{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2+1}] \\
&= \sin x * \sin x \\
&= \int_0^x \sin(x-t)\sin t dt \\
&= \int_0^x -\tfrac{1}{2}[\cos x - \cos(x-2t)]dt \\
&= -\tfrac{1}{2}(\cos x)\cdot x - \tfrac{1}{2}\int_0^x \cos(x-2t)dt \\
&\quad x - 2t = u, \quad -2dt = du \Rightarrow \\
&\quad t = 0 \Rightarrow u = x, t = x \Rightarrow u = -x \\
&= -\tfrac{1}{2}x\cos x + \tfrac{1}{4}\int_x^{-x}\cos u du \\
&= -\tfrac{1}{2}x\cos x + \tfrac{1}{4}(\sin(-x) - \sin x) \\
&= -\tfrac{1}{2}x\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x.
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۷۴.۳. لاپلاس یا لاپلاس معکوس‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\mathscr{L}[\int_0^x \frac{\cos(x-t)}{t}\sinh t dt]$

(ب) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}]$

نشان دهید:

(ج) $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}] = \frac{2e^x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du$

حال با این اطلاعات می‌توانیم معادلات دیفرانسیل‌های بیشتری حل کنیم.
توجه: به معادله‌ای که شامل یک تابع مجهول و انتگرال آن باشد، معادله انتگرال می‌گویند.
یادآوری.

$$\mathscr{L}[\int_0^x f(t)dt] = \frac{\mathscr{L}[f(x)]}{s}$$

مثال ۷۵.۳.

$$\begin{aligned}
&y'(x) + 3y(x) + 2\int_0^x y(t)dt = x \quad y(0) = 1 \\
&\mathscr{L}[y'] + 3\mathscr{L}[y] + 2\mathscr{L}[\int_0^x y(t)dt] = \mathscr{L}[x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad s\mathscr{L}[y]-y(۰)+۳\mathscr{L}[y]+\tfrac{۲}{s}\mathscr{L}[y]=\tfrac{۱}{s^۲}\\
&\Rightarrow\quad (s+۳+\tfrac{۲}{s})\mathscr{L}[y]=\tfrac{۱}{s^۲}+۱\\
&\Rightarrow\quad \mathscr{L}[y]=\tfrac{s^۲+۱}{s(s^۲+۳s+۲)}\\
&\Rightarrow\quad y=\mathscr{L}[\tfrac{s^۲+۱}{s(s^۲+۳s+۲)}]\\
&\qquad\ \ \tfrac{s^۲+۱}{s(s+۱)(s+۲)}=\tfrac{A}{s}+\tfrac{B}{s+۱}+\tfrac{C}{s+۲}\\
&\qquad\ \ \Rightarrow A=\tfrac{۱}{۲},\quad B=-۲,\quad C=\tfrac{۵}{۲}\\
&\Rightarrow\quad y=\tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s}]-۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}]+\tfrac{۵}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}]\\
&\qquad\ \ y=\tfrac{۱}{۲}-۲e^{-x}+\tfrac{۵}{۲}e^{-۲x}.
\end{aligned}$$

▲

تمرین ۷۶.۳. معادلات دیفرانسیل (انتگرال) زیر را حل کنید.

(الف) $y'+y+\int_۰^x y(t)dt=۲U_۱(x)-U_۲(x)\quad y(۰)=۰$

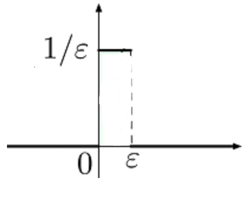
(ب) $e^x y(x)=x+\int_۰^x e^t y(t)\sin(x-t)dt$

(ج) $y'=e^x+\cos x\int_۰^x y(t)\cos t dt+\sin x\int_۰^x y(t)\sin t dt\quad y(۰)=۰$

۷.۳ تابع دلتای دیراک (تابع ضربه‌ای)

گاهی اوقات با توابعی سر و کار داریم که در یک فاصله کوتاه مانند $[۰,\varepsilon]$ مقدار آنها خیلی زیاد است ولی در بقیه نقاط صفر هستند. به طور دقیق‌تر فرض کنید $\varepsilon>۰$ یک عدد حقیقی کوچک باشد. تابع δ_ε (نماد است) را روی بازه $[۰,+\infty)$ با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\delta_\varepsilon=\begin{cases}\frac{۱}{\varepsilon} & ۰\le x<\varepsilon\\ ۰ & x\ge\varepsilon\end{cases}$$



تابع δ_ε را ε ضربه (ε پالس) می‌نامیم. دقت کنید که $\int_{\circ}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = \int_{\circ}^{\varepsilon} \frac{dx}{\varepsilon} = ۱$.

تعریف ۷۷.۳. تابع دلتای دیراک (تابع ضربه‌ای) را با نماد $\delta(x)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to \circ^+} \delta_\varepsilon(x)$ به عبارت دیگر

$$\delta(x) = \begin{cases} \circ & x \neq \circ \\ \infty & x = \circ \end{cases}$$

اگر مقدار بی‌نهایت در نقطه $x = x_\circ$ اتفاق بیفتد تابع را با $\delta(x - x_\circ)$ نمایش می‌دهیم.

$$\delta(x - x_\circ) = \begin{cases} \circ & x \neq x_\circ \\ \infty & x = x_\circ \end{cases}$$

▲

قضیه ۷۸.۳. اگر f روی $[\circ, +\infty)$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{\circ}^{\infty} f(x)\delta(x - x_\circ)dx = f(x_\circ)$$

نتیجه ۷۹.۳.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\delta(x)] &= ۱ \\ \mathscr{L}[\delta(x - x_\circ)] &= \int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\delta(x - x_\circ)dx = e^{-sx_\circ} \end{aligned}$$

به طور معادل:

$$\mathscr{L}^{-۱}[۱] = \delta(x), \quad \mathscr{L}^{-۱}[e^{-sx_\circ}] = \delta(x - x_\circ)$$

از این پس می‌توانیم معادلاتی را حل کنیم که شامل تابع دلتا هستند.

مثال ۸۰.۳. معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + ۲y' + ۵y = ۲\delta(x - \pi)\cos x \qquad y(\circ) = y'(\circ) = ۱$$
$$\mathscr{L}[y''] + ۲\mathscr{L}[y'] + ۵\mathscr{L}[y] = ۲\mathscr{L}[\delta(x - \pi)\cos x]$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\delta(x-\pi)\cos x] &= \int_0^\infty e^{-sx}\cos x\,\delta(x-\pi)dx\\ &= f(\pi) \overset{\text{قضیه } 78.3}{=} e^{-s\pi}\cos\pi\\ &= -e^{-s\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]-sy(0)-y'(0)+2s\mathscr{L}[y]-2y(0)+5\mathscr{L}[y]=-2e^{-s\pi}\\ &\Rightarrow (s^2+2s+5)\mathscr{L}[y]-s-1-2=-2e^{-s\pi}\\ &\Rightarrow (s^2+2s+5)\mathscr{L}[y]=-2e^{-s\pi}+s+3\\ &\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\tfrac{-2e^{-s\pi}+s+3}{s^2+2s+5}\\ &\Rightarrow y=\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{-2e^{-s\pi}+s+3}{s^2+2s+5}]\\ &\Rightarrow y=\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{-2e^{-s\pi}+s+3}{(s+1)^2+4}]\\ &\Rightarrow y=\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{-2e^{-s\pi}}{(s+1)^2+4}]+\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{s+1}{(s+1)^2+4}]+\mathscr{L}^{-1}[\tfrac{2}{(s+1)^2+4}]\\ &\Rightarrow y=-U_\pi(x)e^{-(x-\pi)}\sin 2(x-\pi)+e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x.\end{aligned}$$

▲

تمرین ۸۱.۳. معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $y''+2y'+2y=\delta(x)+3\delta(x-\pi) \quad y(0)=y'(0)=0$

(ب) $y''+y=\cos 2x-\delta(x-1) \quad y(0)=y'(0)=0$

۸.۳ تمرین‌های مروری

معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $y''+4y=(1+U_\pi(x))\sin x \quad y(0)=y'(0)=0$

(ب) $y''+y=U_\pi(x)\delta(x-\pi) \quad y(0)=y'(0)=0$

(ج) $y''+2y'+y=\begin{cases}2 & 0\le x<5\\ \delta(x-6) & x\ge 5\end{cases} \quad y(0)=y'(0)=0$

(د) $\varphi(x)-\delta(x)=e^{2x}+U_\pi(x)+e^x\int_0^x e^{-t}\varphi(t)dt$

(ه) $y(x)=\sin x+4e^{-x}-2\int_0^x\cos(x-t)y(t)dt$

(و) $y'' + y = x\sin x \quad y(۰) = y'(۰) = ۰$

(ی) $y'' + y = x(۱ - U_\pi(x)) \quad y(۰) = ۵,\ y'(۰) = ۰$

۹.۳ خلاصه لاپلاس توابع مورد نیاز و خواص لاپلاس

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_۰^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\begin{array}{l}
\mathscr{L}[۱] = \frac{۱}{s} \\
\mathscr{L}[e^{ax}] = \frac{۱}{s-a} \\
\mathscr{L}[x^a] = \frac{\Gamma(a+۱)}{s^{a+۱}} \\
\mathscr{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+۱}} \\
\mathscr{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^۲+a^۲} \\
\mathscr{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^۲+a^۲} \\
\mathscr{L}[\sinh ax] = \frac{a}{s^۲-a^۲} \\
\mathscr{L}[\cosh ax] = \frac{s}{s^۲-a^۲} \\
\mathscr{L}[U_c(x)] = \frac{e^{-cs}}{s} \\
\mathscr{L}[\delta(x-x_۰)] = e^{-sx_۰}
\end{array}$$

$\mathscr{L}[f'(x)] = s\mathscr{L}[f(x)] - f(۰)$ ۲۷.۳

$\mathscr{L}[f''(x)] = s^۲\mathscr{L}[f(x)] - sf(۰) - f'(۰)$ ۲۷.۳

$\mathscr{L}[xf(x)] = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f(x)]$ ۳۱.۳

$\mathscr{L}[x^n f(x)] = (-۱)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f(x)]$ ۳۱.۳

$\mathscr{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$ ۴۶.۳

$\mathscr{L}[U_c(x) f(x-c)] = e^{-cs}\mathscr{L}[f(x)]$ ۵۶.۳

$\mathscr{L}[\int_۰^x f(t)dt] = \frac{۱}{s}\mathscr{L}[f(x)]$ ۷۰.۳

$\mathscr{L}[f * g] = \mathscr{L}[f] \times \mathscr{L}[g]$

$\mathscr{L}[f(x)\delta(x-x_۰)] = e^{-sx_۰} f(x_۰)$

$\mathscr{L}[f(x)] = \frac{\int_۰^T e^{-sx} f(x)dx}{۱-e^{-sT}}$ تابع متناوب با دوره تناوب T

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌های توانی

در فصل حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، با نحوه حل معادلات دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت آشنا شدیم و دیدیم که اگر ضرایب ثابت نباشد، حل معادله پیچیده‌تر است. در این حالت اگر یک جواب از معادله را داشتیم، جواب دوم را با استفاده از روش کاهش مرتبه به دست می‌آوریم. حال اگر یک جواب را هم نداشته باشیم چه باید کرد؟

بعد از معادلات خطی با ضرایب ثابت، ساده‌ترین معادلات، معادلاتی هستند که ضرایب آنها چندجمله‌ای هستند. یعنی معادلاتی به فرم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

که در آن $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ای هستند. برای حل چنین معادلاتی در این فصل از سری‌های توانی استفاده می‌کنیم. ابتدا یادآوری از سری‌های توانی و مطالب مورد نیاز ارائه می‌کنیم.

۱. یک سری توانی حول نقطه x_0 عبارتست از

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

که $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ اعداد حقیقی ثابت هستند.

۲. در حقیقت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

اگر حد فوق همگرا باشد، گوییم سری همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامیم.

۳. مجموعه همه مقادیر x که سری توانی به ازای آنها همگرا است را دامنه همگرایی سری توانی می‌نامیم.

مثال ۱.۴. برای سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$، دامنه همگرایی $\{x \ : \ |x| < 1\}$ است.
▲

۴.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

۵.

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})(x-x_0)^n$$

۶. اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$، آنگاه

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

و

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x-x_0)^{n-2}$$

۷. تعویض اندیس‌ها
در سری $\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-a)^n$ اگر بخواهیم اندیس از صفر شروع شود، باید در

جمله عمومی n را به $n+۲$ تبدیل کنیم.

$$\sum_{n=۲}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=۰}^{\infty} a_{n+۲}(x-a)^{n+۲}$$

در سری $\sum_{n=۲}^{\infty}(n+۲)(n+۱)a_n(x-a)^{n-۲}$ اگر بخواهیم جمله عمومی توان $(x-a)^n$ باشد باید $n-۲$ را به n یا به عبارتی n را $n+۲$ تبدیل کنیم.

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n+۲)(n+۱)a_n(x-a)^{n-۲} = \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۴)(n+۳)a_{n+۲}(x-a)^n$$

در سری $x^۲\sum_{n=۰}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r-۱}$ اگر بخواهیم جمله عمومی توان $(x-a)^{n+r}$ باشد باید $n+۱$ را به n یا به عبارتی n را به $n-۱$ تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} x^۲\sum_{n=۰}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r-۱} &= \sum_{n=۰}^{\infty}(n+r)a_n(x-a)^{n+r+۱} \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty}(n+r-۱)a_{n-۱}(x-a)^{n+r} \end{aligned}$$

نکته ۲.۴. هرگاه n را در جمله عمومی افزایش دهیم در اندیس $\sum$ را کاهش می‌دهیم و اگر n را در جمله عمومی کاهش دهیم، در اندیس $\sum$ را افزایش می‌دهیم. برای جمع دو سری توانی باید توان‌های جملات عمومی و اندیس‌ها یکی باشد.

۸. توابع چندجمله‌ای در همه $\mathbb{R}$ دارای نمایش به صورت سری توانی است (تحلیلی است). توابع گویا (نسبت دو چندجمله‌ای) در همه نقاط $\mathbb{R}$ دارای نمایش به صورت سری توانی است (تحلیلی است) مگر در نقاطی که مخرج صفر باشد.

۱.۴ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم حول نقطه عادی

اکنون معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = ۰$$

که $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳.۴. اگر x_0 یک نقطه‌ای در $\mathbb{R}$ باشد که $P(x_0) \neq 0$، گوییم x_0 نقطه عادی معادله و در غیر این صورت x_0 را نقطه غیرعادی می‌نامیم. ▲

مثال ۴.۴. نقاط عادی و نقاط غیرعادی در معادلات زیر را تعیین کنید.

(الف) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$ همه نقاط عادی هستند.

(ب) $(2 + x^2)y'' - xy' - 3y = 0$ همه نقاط حقیقی عادی هستند.

$$2 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\mathrm{i}$$

(ج) $(x^2 - 2x)y'' + 5(x - 1)y' + 3y = 0$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 2$ نقاط غیرعادی و سایر نقاط عادی هستند.

(د) $x^2(1 - x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0$

$$x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$$

نقاط $\{0, 1, -1\}$ نقاط غیرعادی و سایر نقاط عادی هستند.

▲

قضیه ۵.۴. اگر x_0 یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد، آنگاه جواب عمومی معادله عبارتست از

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$

که در آن a_0 و a_1 دلخواه و y_1 و y_2 دو سری جواب مستقل خطی هستند.

مثال ۶.۴. جواب عمومی معادله $y'' + x^2y' + 2xy = 0$ را به صورت سری حول نقطه $x = 0$ بیابید.

حل: $x=0$ نقطه عادی است. قرار می‌دهیم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

y، y' و y'' را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+1}=0
\end{aligned}$$

توان‌های x را یکی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+1}=0\\
&\Rightarrow 2a_2x^{-1+1}+\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3}+(n+2)a_n\right]x^{n+1}=0\\
&\Rightarrow 2a_2=0,\quad (n+3)(n+2)a_{n+3}+(n+2)a_n=0 \quad \forall\, n\geq 0\\
&\Rightarrow a_2=0,\quad a_{n+3}=-\tfrac{a_n}{n+3}\quad n=0,1,2,\dots\\
&\Rightarrow a_3=-\tfrac{a_0}{3},\quad a_4=-\tfrac{a_1}{4},\quad a_5=-\tfrac{a_2}{5}=0,\\
&\Rightarrow a_6=-\tfrac{a_3}{6}=\tfrac{a_0}{3\times 6},\quad a_7=-\tfrac{a_4}{7}=\tfrac{a_1}{4\times 7}\\
&\Rightarrow a_8=-\tfrac{a_5}{8}=0,\quad a_9=-\tfrac{a_6}{9}=-\tfrac{a_0}{3\times 6\times 9}\\
&\Rightarrow y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\\
&\Rightarrow y=a_0+a_1x-\tfrac{a_0}{3}x^3-\tfrac{a_1}{4}x^4+\tfrac{a_0}{3\times 6}x^6+\tfrac{a_1}{4\times 7}x^7-\tfrac{a_0}{3\times 6\times 9}\\
&\Rightarrow y=a_0(1-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^6}{3\times 6}-\tfrac{x^9}{3\times 6\times 9}+\cdots)+a_1(x-\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{x^7}{4\times 7}-\cdots).
\end{aligned}$$

▲

مثال ۷.۴. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از سری‌های توانی حول نقطه $x_0=0$ حل کنید.

$$y''-2xy'-2y=e^x$$

حل: قرار می‌دهیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $x_0=0$ نقطه عادی است.

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

y، y' و y'' را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e^x$$

توان‌های x را یکی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = e^x\\
&\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\
&\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n = \tfrac{1}{n!}\\
&\Rightarrow a_{n+2} = (\tfrac{1}{n!} + 2(n+1)a_n)\tfrac{1}{(n+2)(n+1)}\\
&\Rightarrow a_{n+2} = \tfrac{1}{(n+2)!} + \tfrac{2}{n+2}a_n \quad n \geq 0\\
&\Rightarrow a_2 = \tfrac{1}{2!} + a_0,\ a_3 = \tfrac{1}{3!} + \tfrac{2}{3}a_1,\ a_4 = \tfrac{1}{4!} + \tfrac{2}{4}a_2 = \tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} + a_0)\\
&\Rightarrow y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\\
&\Rightarrow y = a_0 + a_1x + (\tfrac{1}{2!} + a_0)x^2 + (\tfrac{1}{3!} + \tfrac{2}{3}a_1)x^3 + (\tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}a_0)x^4 + \cdots\\
&\Rightarrow y = a_0(1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + \cdots) + a_1(x + \tfrac{2}{3}x^3 + \cdots) + (\tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots).
\end{aligned}$$

▲

مثال ۸.۴. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه را به دست آورید.

$$(x^2 - 2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 3$$

حل: چون شرایط اولیه در نقطه $x_0 = 1$ داده شد، جواب را حول $x_0 = 1$ به دست می‌آوریم. $x_0 = 1$ نقطه عادی برای معادله است. قرار می‌دهیم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

y، y' و y'' را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. نکته مهم این است که برای اینکه بتوانیم سری‌ها را با هم جمع کنیم باید همه ضرایب در معادله را هم به صورت سری حول $x_0 = 1$

بنویسیم.

$$P(x) = x^{۲} - ۲x = (x - ۱)^{۲} - ۱$$
$$Q(x) = ۵(x - ۱)$$

$$
\begin{aligned}
& y = a_{۰} + a_{۱}(x - ۱) + a_{۲}(x - ۱)^{۲} + \cdots \\
& y(۱) = a_{۰} = ۶, \quad y^{'}(۱) = a_{۱} = ۳ \\
& ((x - ۱)^{۲} - ۱)\sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^{n-۲} \\
& +۵(x-۱)\sum_{n=۰}^{\infty} na_n(x-۱)^{n-۱} + ۳\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^n = ۰ \\
& \Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^n - \sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^{n-۲} \\
& + \sum_{n=۰}^{\infty} ۵na_n(x-۱)^n + \sum_{n=۰}^{\infty} ۳a_n(x-۱)^n \\
& \Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty} \left[n(n-۱) + ۵n + ۳\right] a_n(x-۱)^n \\
& - \sum_{n=-۲}^{\infty} (n+۲)(n+۱)a_{n+۲}(x-۱)^n = ۰ \\
& \Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty} \left[(n^{۲} + ۴n + ۳)a_n - (n+۲)(n+۱)a_{n+۲}\right](x-۱)^n = ۰ \\
& \Rightarrow (n^{۲} + ۴n + ۳)a_n - (n+۲)(n+۱)a_{n+۲} = ۰ \ \ \forall\, n \geq ۰ \\
& \Rightarrow a_{n+۲} = \frac{(n+۳)(n+۱)}{(n+۲)(n+۱)}a_n \ \ \forall\, n \geq ۰ \\
& \Rightarrow a_{n+۲} = \frac{n+۳}{n+۲}a_n \ \ \forall\, n \geq ۰ \\
& \Rightarrow a_{۲} = \frac{۳}{۲}a_{۰} = \frac{۳}{۲} \times ۶ = ۹,\ a_{۳} = \frac{۴}{۳}a_{۱} = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴,\ a_{۴} = \frac{۵}{۴}a_{۲} = \frac{۵}{۴} \times ۹ = \frac{۴۵}{۴}, \\
& a_{۵} = \frac{۶}{۵}a_{۳} = \frac{۶}{۵} \times ۴ = \frac{۲۴}{۵}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow y = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^n = a_{۰} + a_{۱}(x-۱) + a_{۲}(x-۱)^{۲} + \cdots \\
& \Rightarrow y = ۶ + ۳(x-۱) + ۹(x-۱)^{۲} + ۴(x-۱)^{۳} + \frac{۴۵}{۴}(x-۱)^{۴} + \frac{۲۴}{۵}(x-۱)^{۵} + \cdots
\end{aligned}
$$

▲

تمرین ۹.۴. معادلات دیفرانسیل زیر را به صورت سری توانی حول نقطه داده شده حل کنید.

(الف) $(۲ + x^{۲})y^{''} - xy^{'} - ۳y = ۰, \quad x_{۰} = ۰$

(ب) $y^{''} + (x^{۲} - ۴x + ۴)y^{'} + xy = ۰, \quad y(۲) = ۰, \ \ y^{'}(۲) = ۱$

۲.۴ حل معادله دیفرانسیل حول نقطه غیرعادی منظم.

حال جواب‌ها را حول نقاطی بررسی می‌کنیم که نقطه عادی نیستند. یعنی ضریب y'' در $x_\circ$، صفر می‌شود مانند

$$x^{۲}y'' + xy' + (x^{۲} - v^{۲})y = \circ \quad (\text{بسل})$$

نقطه $x_\circ = \circ$ غیرعادی است.

$$(۱ - x^{۲})y'' - ۲xy' + \alpha(\alpha + ۱)y = \circ \quad (\text{لژاندر})$$

$$۱ - x^{۲} = \circ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \quad \text{نقاط غیرعادی}$$

در مسائل کاربردی معمولاً جواب‌های معادله در همسایگی نقاط غیرعادی رفتار جالب‌تری دارند و لازم است که جواب در این نقاط به طور دقیقی محاسبه شوند. در نقاط غیرعادی روش ارائه شده در بخش قبل قابل استفاده نیست زیرا $\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\frac{R(x)}{P(x)}$ را نمی‌توان به شکل سری توانی حول $x = x_\circ$ نوشت.

ابتدا یک دسته‌بندی روی نقاط غیرعادی انجام می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۴. نقطه $x_\circ$ را نقطه غیرعادی منظم برای معادله

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = \circ$$

(P، Q و R چندجمله‌ای) گوییم هرگاه حدهای $\lim_{x\to x_\circ}(x - x_\circ)\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\lim_{x\to x_\circ}(x - x_\circ)^{۲}\frac{R(x)}{P(x)}$ موجود و متناهی باشند. در غیر این صورت یعنی اگر یکی از این حدها موجود نباشد، نقطه را نقطه غیرعادی نامنظم می‌نامیم. ▲

مثال ۱۱.۴. نقاط غیرعادی منظم و نامنظم را در معادلات زیر مشخص کنید.

(الف)

$$x^{۲}(۱ - x^{۲})y'' + ۲xy' + ۴y = \circ$$

$$x^{۲}(۱ - x^{۲}) = \circ \Rightarrow x = \circ, \quad x = ۱, \quad x = -۱ \quad \text{نقاط غیرعادی}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\circ} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to\circ} x\frac{۲x}{x^{۲}(۱-x^{۲})} = ۲ \\ \lim_{x\to\circ} x^{۲}\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to\circ} x^{۲}\frac{۴}{x^{۲}(۱-x^{۲})} = ۴ \end{array}\right\} \text{نقطه غیرعادی منظم } x = \circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{2x}{x^2(1-x^2)}=-1\\ \lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{4}{x^2(1-x^2)}=0\end{array}\right\}$$ نقطه غیرعادی منظم $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{2x}{x^2(1-x^2)}=-1\\ \lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{4}{x^2(1-x^2)}=0\end{array}\right\}$$ نقطه غیرعادی منظم $x=-1$

(ب) $y''+\frac{x^2}{(1-x)^2}y'+3(1+x^2)y=0$

$(1-x^2)=0\Rightarrow x=1$ نقطه غیرعادی

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{x^2}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x}=\infty\Rightarrow$$ نقطه غیرعادی نامنظم $x=1$

(ج) $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0,$ معادله اویلر

$x^2=0\Rightarrow$ نقطه غیرعادی $x=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}x\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x\frac{\alpha x}{x^2}=\alpha\\ \lim_{x\to 0}x^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}x^2\frac{\beta}{x^2}=\beta\end{array}\right\}$$ نقطه غیرعادی منظم $x=0$

▲

در ادامه به حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقطه غیرعادی منظم می‌پردازیم. برای راحتی $x_0=0$ در نظر می‌گیریم. زیرا در غیر این صورت مانند تغییر متغیر $x-x_0=z$ است. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به فرم در حالت کلی را در نظر می‌گیریم.

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

که $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند و $x_0=0$ نقطه غیرعادی منظم معادله است. با تقسیم کردن طرفین معادله بر $P(x)$ داریم:

$$y''+\frac{Q(x)}{P(x)}y'+\frac{R(x)}{P(x)}y=0$$

یا

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

که $p(x)$ و $q(x)$ توابع گویا (نسبت دو چندجمله‌ای) هستند. توجه داریم که $x = 0$ نقطه غیرعادی منظم است، یعنی

$$\lim_{x\to 0} xp(x), \quad \lim_{x\to 0} x^2 q(x)$$

موجود و متناهی است.
قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. y' و y'' را در معادله قرار می‌دهیم. پس از انجام محاسبات و ساده‌سازی مقادیر r و روابط بازگشتی a_n را به دست می‌آوریم. به این روش، روش فروبنیوس گفته می‌شود و چنین جواب‌هایی، جواب فروبنیوس نام دارد.

مثال ۱۲.۴. معادله $2xy'' + y' - 2y = 0$ را با استفاده از روش فروبنیوس حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید.
حل: ضریب y'' را یک می‌کنیم.

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0 \tag{1.4}$$

$$\lim_{x\to 0} x\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} x^2\frac{(-1)}{x} = 0$$

قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

y، y' و y'' را در معادله ۱.۴ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$
$$-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+r)a_n x^{n+r-2}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r-1} = 0$$

در سری آخر $n+r-1$ را به $n+r-2$ تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)+\tfrac{1}{2}(n+r)\right]a_n x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r-2}$$

جمله اولی $n=0$ را از دو جمله اول و دوم جدا می‌کنیم

$$\left[r(r-1)+\tfrac{1}{2}r\right]a_0 x^{r-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-\tfrac{1}{2})a_n - a_{n-1}\right]x^{n-r-2} = 0$$

$\Rightarrow r(r-1)+\frac{1}{2}r = r^2-\frac{1}{2}r = r(r-\frac{1}{2}) = 0$ معادله شاخص

$$\Rightarrow r_2 = 0,\quad r_1 = \tfrac{1}{2}$$

$(n+r)(n+r-\frac{1}{2})a_n - a_{n-1} = 0$ رابطه بازگشتی

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & a_n &= \frac{2a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1)} & n\ge 1\\ r_1=\tfrac{1}{2} &\Rightarrow & a_n &= \frac{2a_{n-1}}{(n+\frac{1}{2})(2n)} & n\ge 1\\ && a_n &= \frac{4a_{n-1}}{2n(2n+1)} & n\ge 1 \end{aligned}$$

$$a_1 = \tfrac{4}{3!}a_0,\ a_2 = \tfrac{4}{4\times 5}a_1 = \tfrac{4^2}{5!}a_0, a_0 = 1,\ a_3 = \tfrac{4}{6\times 7}a_2 = \tfrac{4^3}{7!}a_0$$

$$\Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!}x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{2a_{n-1}}{n(2n-1)} n\ge 1$$

می‌توانیم بنویسیم

$$a_1 = \tfrac{2a_0}{1},\ a_2 = \tfrac{2a_1}{2\times 3} = \tfrac{2^2}{3!}a_0,\ a_3 = \tfrac{2\times a_2}{3\times 5} = \tfrac{2^3}{3\times 5\times 3!}a_0$$

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4^n}{2n!}a_0 \quad a_0 = 1$$

$$\Rightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}x^n$$

$\Rightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی

▲

به حل معادله در حالت کلی برمی‌گردیم: (روش فروبنیوس)

معادله در فرم کلی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را در نظر می‌گیریم. $x_0 = 0$ نقطه غیرعادی منظم است. یعنی $\lim_{x\to 0} x^2 q(x)$ و $\lim_{x\to 0} xp(x)$ موجود ومتناهی است. به عبارت دیگر $xp(x)$ و $x^2q(x)$ را می‌توان به صورت سری توانی حول نقطه $x_0 = 0$ نوشت. یعنی $xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)x^n$ و $x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)x^n$ معادله را در

$x^{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$x^{۲}y^{''}+x(xp(x))y^{'}+(x^{۲}q(x))y=\circ \qquad (۲.۴)$$

قرار می‌دهیم

$$y=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

y، $y^{'}$ و $y^{''}$ را در معادله ۲.۴ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
y^{'} &= \textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-۱}\\
y^{''} &= \textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)(n+r-۱)a_nx^{n+r-۲}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^{۲}(\textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)(n+r-۱)a_nx^{n+r-۲})+x(\sum_{n=\circ}^{\infty}p_nx^n)\\
&(\textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-۱})+(\sum_{n=\circ}^{\infty}q_nx^n)(\sum_{n=\circ}^{\infty}a_nx^{n+r})=\circ\\
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)(n+r-۱)a_nx^{n+r}+(\sum_{n=\circ}^{\infty}p_nx^n)(\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r})\\
&\quad+(\textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}q_nx^n)(\sum_{n=\circ}^{\infty}a_nx^{n+r})=\circ\\
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)(n+r-۱)a_nx^{n+r}+\sum_{n=\circ}^{\infty}(\sum_{k=\circ}^{n}(k+r)a_kx^{k+r}p_{n-k}x^{n-k})\\
&\quad+\textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(\sum_{k=\circ}^{n}a_kx^{k+r}q_{n-k}x^{n-k})=\circ\\
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(n+r)(n+r-۱)a_nx^{n+r}+\sum_{n=\circ}^{\infty}(\sum_{k=\circ}^{n}(k+r)p_{n-k}a_k)x^{n+r}\\
&\quad+\textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}(\sum_{k=\circ}^{n}q_{n-k}a_k)x^{n+r}=\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-۱)a_n+\sum_{k=\circ}^{n}((r+k)p_{n-k}+q_{n-k})a_k\right]x^{n+r}=\circ\\
&\Rightarrow \left[r(r-۱)+rp_\circ+q_\circ\right]a_\circ x^r\\
&\quad+\textstyle\sum_{n=\circ}^{\infty}\Big[(n+r)(n+r-۱)a_n+\left[(r+n)p_\circ+q_\circ\right]a_n\\
&\quad+\textstyle\sum_{k=\circ}^{n-۱}((r+k)p_{n-k}+q_{n-k})a_k\Big]x^{n+r}=\circ
\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $F(r):=r(r-۱)+p_\circ r+q_\circ$ رابطه بالا را می‌توانیم به این صورت

بنویسیم:

$$F(r)a_\circ x^r + \sum_{n=\circ}^{\infty}\left[F(r+n)a_n + \sum_{k=\circ}^{n-1}((r+k)p_{n-k}+q_{n-k})a_k\right]x^{n+r} = \circ$$
$$\Rightarrow \begin{cases} F(r) = r(r-1)+p_\circ r + q_\circ = \circ & \text{معادله شاخص} \\ F(r+n)a_n = -\sum_{k=\circ}^{n-1}((r+k)p_{n-k}+q_{n-k})a_k & \text{رابطه بازگشتی} \end{cases}$$

در حقیقت

$$p_\circ = \lim_{x\to\circ}(xp(x))$$
$$q_\circ = \lim_{x\to\circ}(x^2 q(x))$$

در نتیجه از رابطه شاخص $F(r) = r(r-1)+p_\circ r+q_\circ = \circ$ مقادیر r را پیدا می‌کنیم. سپس به ازای هر r از رابطه بازگشتی زیر a_nها را پیدا می‌کنیم.

$$F(r+n)a_n = -\sum_{k=\circ}^{n-1}((r+k)p_{n-k}+q_{n-k})a_k$$

حالت‌های مختلف:
معادله شاخص $F(r) = r(r-1)+p_\circ r+q_\circ = \circ$ یک معادله درجه دو است. در نتیجه بسته به این که ریشه‌های $F(r)$ چگونه باشند، حالت‌های مختلف پیش می‌آید.
حالت اول: $F(r)$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است $(r_1 \le r_2)$. و تفاضل r_1 و r_2 صحیح نیست، $r_2 - r_1 \notin \mathbb{N}$.
حالت دوم: $F(r)$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است $r_1 \le r_2$. و تفاضل r_1 و r_2 صحیح است، $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$.
حالت سوم: $F(r)$ دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2$ است.

در اینجا ما فقط حالت اول را بررسی می‌کنیم، که به ازای هر r یک جواب به فرم فروبنیوس به دست می‌آید.

مثال ۱۳.۴. معادله دیفرانسیل $2xy'' + (1+x)y' - 2y = \circ$ را با روش استفاده از سری حول نقطه $x_\circ = \circ$ به دست آورید.
حل: کافی است از فرمولی که در حالت کلی به دست آوردیم استفاده کنیم. معادله شاخص و رابطه بازگشتی را به دست آوریم و سپس جواب‌های به فرم فروبنیوس را به دست آوریم.

ابتدا نشان می‌دهیم $x_۰ = ۰$ یک نقطه غیرعادی منظم است.

$$p(x) = \frac{۱+x}{۲x} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} xp(x) = \lim_{x\to ۰} x\frac{۱+x}{۲x} = \frac{۱}{۲} = p_۰$$
$$q(x) = \frac{-۲}{۲x} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} x^۲ q(x) = \lim_{x\to ۰} x^۲\frac{-۲}{۲x} = ۰ = q_۰$$

معادله شاخص

$$F(r) = r(r-۱) + p_۰ r + q_۰ = r(r-۱) + \frac{۱}{۲}r = ۰$$
$$F(r) = r^۲ - r + \frac{۱}{۲}r = r^۲ - \frac{۱}{۲}r = ۰$$
$$\Rightarrow r(r-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow r_۲ = ۰,\quad r_۱ = \frac{۱}{۲}$$

رابطه بازگشتی

$$F(r+n)a_n = -\sum_{n=۰}^{n-۱}((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k$$

$$\Rightarrow (r+n)(r+n-\frac{۱}{۲})a_n = -\left[(r+n-۱)\frac{۱}{۲} - ۱\right]a_{n-۱}$$
$$\Rightarrow (r+n)(۲r+۲n-۱)a_n = -(r+n-۳)a_{n-۱}$$
$$\sum_{n=۰}^{\infty} p_n x^n = xp(x) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}x \Rightarrow p_۰ = \frac{۱}{۲},\quad p_۱ = \frac{۱}{۲},\quad p_۲ = \cdots = p_n = ۰$$
$$x^۲ q(x) = -x \Rightarrow q_۰ = ۰,\quad q_۱ = -۱,\quad q_۲ = \cdots = q_n = ۰$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\quad (r+n)(۲r+۲n-۱)a_n = -(r+n-۳)a_{n-۱} \\ r_۱ = \frac{۱}{۲} &\Rightarrow\quad (\frac{۱}{۲}+n)(۱+۲n-۱)a_n = -(\frac{۱}{۲}+n-۳)a_{n-۱} \\ &\Rightarrow\quad (۲n+۱)(۲n)a_n = -(۲n-۵)a_{n-۱} \\ &\Rightarrow\quad a_n = -\frac{۲n-۵}{۲n(۲n+۱)}a_{n-۱} \quad n \geq ۱ \\ &\qquad\ a_۱ = -\frac{-۳}{۲\times۳}a_۰ = \frac{۱}{۲}a_۰, a_۲ = -\frac{-۱}{۴\times۵}a_۱ = \frac{۱}{۲\times۴\times۵}a_۰ \end{aligned}$$

$a_۰ = ۱$ دلخواه

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+r_۱} = a_۰ x^{\frac{۱}{۲}} + a_۱ x^{\frac{۳}{۲}} + \cdots \\ & y_۱ = x^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}x^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۴۰}x^{\frac{۵}{۲}} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 = 0 \Rightarrow \quad & n(2n-1)a_n = -(n-3)a_{n-1} \\
& a_n = -\tfrac{n-3}{n(2n-1)}a_{n-1} \quad n \geq 1 \\
& a_1 = -\tfrac{-2}{1}a_0 = 2a_0, a_2 = -\tfrac{-1}{2\times 3}a_1 = \tfrac{1}{6}a_1 = \tfrac{1}{6}2a_0 = \tfrac{1}{3}a_0
\end{aligned}$$

$a_0 = 1$ دلخواه

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & y_2 = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
& y_2 = 1 + 2x + \tfrac{1}{3}x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

▲

جمع‌بندی:

برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

که $p(x)$ و $q(x)$ توابع گویا (نسبت دو چندجمله‌ای) هستند با روش فروبنیوس حول نقطه غیرعادی منظم x_0، قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$. که r ریشه معادله شاخص

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

است. وقتی معادله شاخص دارای دو ریشه حقیقی $r_2 \leq r_1$ و $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ هر یک از r_1 و r_2 را جداگانه در رابطه بازگشتی

$$F(r+n)a_n = -\sum_{n=0}^{n-1}((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k$$

قرار می‌دهیم و a_nها را به دست می‌آوریم.
توجه داریم که p_iها و q_iها در روابط بالا از بسط سری توانی $x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ و $xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ به دست می‌آید.
دقت داریم که فرمول‌های بالا برای معادله با ضریب y'' مساوی یک است.

مثال ۱۴.۴. معادله دیفرانسیل زیر را با روش فروبنیوس حول نقطه $x=0$ حل کنید.

$$x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$$

۱. ابتدا ضریب y'' را یک می‌کنیم.

$$y'' + \frac{(x+1)}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

۲. سری توابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$ را به دست می‌آوریم. (حول $x=0$)

$$\begin{aligned} xp(x) &= x(\tfrac{x+1}{x}) = x+1 = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots \\ &\Rightarrow p_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = p_3 = \cdots = 0 \\ x^2q(x) &= x^2(\tfrac{-1}{x^2}) = -1 = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q(x)x^n = q_0 + q_1x + q_2x + \cdots \\ &\Rightarrow q_0 = -1, \quad q_1 = q_2 = \cdots = 0 \end{aligned}$$

۳. معادله شاخص را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} &F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = r(r-1) + r - 1 = 0 \\ &\quad r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -1 \\ &F(r) = (r-1)(r+1) \end{aligned}$$

۴. رابطه بازگشتی را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} &F(r+n)a_n = -\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k \\ &(r+n-1)(r+n+1)a_n = -(r+n-1)p_1a_{n-1} \\ &\Rightarrow a_n = -\tfrac{a_{n-1}}{r+n+1} \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

۵. هر یک از $r_۱$ و $r_۲$ را در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم و جواب را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{ll}
r_۱ = ۱ & \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-۱}}{n+۲} \ a_۰ = ۱ \text{ دلخواه} \\
n = ۱ & \Rightarrow a_۱ = -\frac{a_۰}{۳} = -\frac{۱}{۳} \\
n = ۲ & \Rightarrow a_۲ = -\frac{a_۱}{۴} = +\frac{۱}{۱۲} \\
n = ۳ & \Rightarrow a_۳ = -\frac{a_۲}{۵} = -\frac{۱}{۵\times۴\times۳} \\
 & \Rightarrow a_n = \frac{(-۱)^n ۲}{(n+۲)!} \\
 & \Rightarrow y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+r_۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n ۲}{(n+۲)!} x^{n+۱}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
r_۲ = -۱ & \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-۱}}{n} \ a_۰ = ۱ \text{ دلخواه} \\
n = ۱ & \Rightarrow a_۱ = -\frac{a_۰}{۱} = -۱ \\
n = ۲ & \Rightarrow a_۲ = -\frac{a_۱}{۲} = +\frac{۱}{۲} \\
n = ۳ & \Rightarrow a_۳ = -\frac{a_۲}{۳} = -\frac{۱}{۳\times۲} \\
 & \Rightarrow a_n = \frac{(-۱)^n}{(n)!} \\
 & \Rightarrow y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+r_۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(n)!} x^{n-۱} \\
 & y = c_۱ y_۱ + c_۲ y_۲
\end{array}$$

$$y = c_۱ y_۱ + c_۲ y_۲ + \cdots$$

▲

تمرین ۱۵.۴. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش فروبنیوس حول نقطه $x = ۰$ حل کنید.

(الف) $xy'' + (۲ - ۲x^۲)y' + ۶xy = ۰$

(ب) $۲x^۲y'' + ۳xy' - (۱ + x)y = ۰$

(ج) $۴xy'' + (۳ + ۳x)y = ۰$

فصل ۵

دستگاه معادلات دیفرانسیل

۱.۵ مقدمه ماتریس‌ها

تعریف ۱.۵. یک ماتریس $m \times n$، آرایه‌ای است مستطیلی از اعداد مختلط یا حقیقی به شکل زیر

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

و با $A = (a_{ij})_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم که در a_{ij}، i شماره سطر و j شماره ستون است. ▲

- اگر $m = n$، آنگاه A را ماتریس مربعی می‌گوییم.
- ماتریس $m \times ۱$ ماتریس ستونی نام دارد.
- ماتریس $۱ \times n$ ماتریس سطری نام دارد.
- اگر برای هر j, i، $a_{ij} = ۰$، ماتریس صفر نام دارد.

• ماتریس $I_n = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{pmatrix}$، ماتریس همانی نام دارد.

۲.۵ جمع و ضرب ماتریس‌ها

$$\begin{aligned} &A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{m\times n} \\ &A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \\ &A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{n\times p} \\ &A \times B = (\textstyle\sum_{k=۱}^{n} a_{ik} \times b_{kj})_{m\times p} \end{aligned}$$

خواص جمع و ضرب ماتریس‌ها

الف) $A + B = B + A$

ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$

ج) $\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha A = (\alpha a_{ij})_{mn}$

د) $A + (-A) = ۰$

ه) $\forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

و) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

ی) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

م) $AB \neq BA$

ع) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

غ) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

تعریف ۲.۵. اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، A را وارون‌پذیر گوییم هرگاه یک ماتریس $n \times n$، B وجود داشته باشد که $AB = BA = I_n$. ماتریس B را وارون ماتریس A می‌گوییم. ▲

تعریف ۳.۵. دترمینان یک ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = \quad & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & +(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & + \cdots \\ & +(-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \begin{pmatrix} \text{ماتریس حاصل از} \\ \text{حذف سطر } i \text{ام و} \\ \text{ستون } j \text{ام} \end{pmatrix}$$

▲

قضیه ۴.۵. ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

روش یافتن وارون یک ماتریس:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A}, C = (c_{ij}), c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} \text{ماتریس حاصل از} \\ \text{حذف سطر } i\text{ام و} \\ \text{ستون } j\text{ام} \end{pmatrix}$$

C^T ترانهاده ماتریس است. یعنی جای سطرها با ستون‌ها عوض شده است.

۳.۵ دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه خطی از n معادله و n مجهول به صورت زیر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_iها مجهول و a_{ij}ها و b_iها مقادیر ثابت هستند.
اگر قرار دهیم

$$A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

در حقیقت دستگاه را می‌توان به صورت $AX = B$ نوشت. اگر $B = 0$، آنگاه دستگاه را همگن و اگر $B \neq 0$ دستگاه را ناهمگن (غیرهمگن) می‌گوییم.

در دستگاه $AX = B$، اگر A وارون‌پذیر باشد یعنی $\det A \neq 0$، می‌توانیم طرفین را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم و جواب دستگاه را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} AX = B \quad &\overset{\det A \neq 0}{\Rightarrow} A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B \\ &\Rightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

که در اینجا اگر معادله همگن باشد یعنی $B = ۰$، جواب منحصر به فرد دستگاه $X = ۰$ است (هرگاه $\det A \neq ۰$). ولی اگر A وارون‌پذیر نباشد یعنی $\det A = ۰$، دستگاه یا اصلا جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

مثال ۵.۵. دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_۱ - x_۲ + x_۳ & = ۱ \\ x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ & = ۰ \\ ۳x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ & = ۰ \end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}, \quad AX = B, \quad B = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\det A = ۱ \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} + ۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} + ۱ \begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$\det A = -۷ + ۱ + ۵ = -۱ \neq ۰ \Rightarrow \text{وارون‌پذیر است } A \Rightarrow X = A^{-۱}B.$$

$A^{-۱} = \frac{C^T}{\det A}$ ماتریس C را به دست می‌آوریم.

$$C = \begin{pmatrix} (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} & (-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} & (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} \\ (-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} & (-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} & (-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} \\ (-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix} & (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} & (-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -۷ & -۱ & ۵ \\ ۳ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -۷ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۵ & -۲ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{C^T}{\det A} = \begin{pmatrix} ۷ & -۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۵ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

جواب دستگاه $$X = A^{-۱}B = \begin{pmatrix} ۷ & -۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۵ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۷ \\ ۱ \\ -۵ \end{pmatrix}$$

▲

۴.۵ استقلال خطی و وابستگی خطی

در ادامه منظور از بردار، ماتریس ستونی $n \times 1$ است. فرض کنید $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$، n بردار باشند. یعنی

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

تعریف ۶.۵. n بردار $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ را وابسته خطی گوییم هرگاه اعداد حقیقی $c_1, c_2, \dots, c_n$ که حداقل یکی از آنها ناصفر بوده وجود داشته باشند به طوری که

$$c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \cdots + c_n X^{(n)} = 0$$

در غیر این صورت، بردارها را مستقل خطی گوییم. ▲

به عبارت دیگر

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} = 0 \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} = 0 \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & \dots & x_{۱n} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} & \dots & x_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n۱} & x_{n۲} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = ۰ \Rightarrow XC = ۰$$

در نتیجه دستگاه دارای جواب غیر صفر است، هرگاه $\det X = ۰$.
(یادآوری: دستگاه $AX = ۰$ دارای جواب یکتای صفر است اگر $\det A \neq ۰$ به طور معادل دارای جواب ناصفر است اگر $\det A = ۰$)

نتیجه ۷.۵. n بردار $X^{(۱)}, X^{(۲)}, \dots, X^{(n)}$ وابسته خطی هستند اگر و فقط اگر $\det X = ۰$.
به طور معادل n بردار $X^{(۱)}, X^{(۲)}, \dots, X^{(n)}$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\det X \neq ۰$.

مثال ۸.۵. وابستگی خطی یا استقلال خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

$$X^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad X^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}, \quad X^{(۳)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

روش اول:

$$c_۱X^{(۱)} + c_۲X^{(۲)} + c_۳X^{(۳)} = c_۱ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + c_۲ \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + c_۳ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_۱ + c_۳ = ۰ \\ c_۱ + c_۲ = ۰ \quad \Rightarrow c_۲ - c_۳ = ۰ \\ c_۲ + c_۳ = ۰ \end{array} \right\} \Rightarrow c_۱ = c_۲ = c_۳ = ۰$$

پس ضرایب غیر صفر $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ وجود دارند که ترکیب خطی $X^{(۱)}$، $X^{(۲)}$ و $X^{(۳)}$ را برابر صفر کنند. یعنی طبق تعریف $X^{(۱)}$، $X^{(۲)}$ و $X^{(۳)}$ مستقل خطی هستند.

روش دوم:

$$X = \left(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det X = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

پس $X^{(1)}$، $X^{(2)}$ و $X^{(3)}$ مستقل خطی است. (زیرا وقتی $\det X \neq 0$ یعنی دستگاه

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

فقط جواب $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ دارد.) ▲

تمرین ۹.۵. مشخص کنید بردارهای $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$، $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ و $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ مستقل خطی یا وابسته خطی هستند؟

۵.۵ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف ۱۰.۵. فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. بردار ستونی ناصفر V را یک بردار ویژه برای ماتریس A می‌گوییم، هرگاه مقدار ثابت r وجود داشته باشد به طوری که $AV = rV$. در این صورت عدد r را مقدار ویژه ماتریس A می‌گوییم. ▲

مثال ۱۱.۵. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ می‌بینیم که

$$A\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۲\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

یعنی $r = ۲$ مقدار ویژه و $V = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $r = ۲$ برای بردار A هستند. ▲

قضیه ۱۲.۵. بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز مستقل خطی هستند.

اثبات. فرض کنید $V^{(۱)}, V^{(۲)}, \ldots, V^{(k)}$ بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز $r_۱, r_۲, \ldots, r_k$ باشند. برای اینکه نشان دهیم $V^{(۱)}, V^{(۲)}, \ldots, V^{(k)}$ مستقل خطی هستند، باید نشان دهیم اگر $c_۱V^{(۱)} + c_۲V^{(۲)} + \cdots + c_kV^{(k)} = ۰$، آنگاه $c_۱ = c_۲ = \cdots = c_k = ۰$. این را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم.
پایه استقرا: $k = ۱$

$$c_۱V^{(۱)} = ۰ \overset{V^{(۱)}\neq ۰}{\Rightarrow} c_۱ = ۰$$

فرض استقرا: قضیه برای $k - ۱$ بردار درست است.
حکم استقرا:

$$\begin{array}{ll}
(۱) & c_۱V^{(۱)} + c_۲V^{(۲)} + \cdots + c_kV^{(k)} = ۰ \overset{?}{\Rightarrow} c_i = ۰,\ i = ۱, \ldots, k \\
(۱) \times A & \Rightarrow c_۱AV^{(۱)} + c_۲AV^{(۲)} + \cdots + c_kAV^{(k)} = ۰ \\
 & \Rightarrow c_۱r_۱V^{(۱)} + c_۲r_۲V^{(۲)} + \cdots + c_kr_kV^{(k)} = ۰ \quad (۲) \\
(۱) \times r_۱ & \Rightarrow c_۱r_۱V^{(۱)} + c_۲r_۱V^{(۲)} + \cdots + c_kr_۱V^{(k)} = ۰ \quad (۳) \\
(۲) - (۳) & \Rightarrow c_۲(r_۲ - r_۱)V^{(۲)} + \cdots + c_k(r_k - r_۱)V^{(k)} = ۰ \\
 & \overset{\text{فرض استقرا}}{\Rightarrow} \forall i \;\; c_i(r_i - r_۱) = ۰ \\
 & \overset{r_i \neq r_۱}{\Rightarrow} \forall i, i = ۲, \ldots, k, \;\; c_i = ۰ \\
(۲) & \Rightarrow c_۱r_۱V^{(۱)} = ۰ \overset{r_۱\neq ۰}{\Rightarrow} c_۱ = ۰ \\
 & \Rightarrow \forall i, i = ۱, ۲, \ldots, k, \;\; c_i = ۰
\end{array}$$

■

حال به این سؤال پاسخ می‌دهیم که چگونه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس را به دست آوریم؟
برای یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A باید r و V را به گونه‌ای پیدا کنیم که $AV = rV$.

$$AV = rV \Leftrightarrow AV - rV = 0 \Leftrightarrow (A - rI)V = 0$$

یعنی V باید جواب ناصفر دستگاه $(A - rI)V = 0$ باشد. پس باید ماتریس $A - rI$ وارون‌پذیر نباشد (اگر وارون‌پذیر باشد، آنگاه $V = 0$) و این یعنی $\det(A - rI) = 0$.

نتیجه ۱۳.۵. مقدار r، مقدار ویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر $\det(A - rI) = 0$. $\det(A - rI)$ را چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A می‌نامیم.

نتیجه ۱۴.۵. برای یافتن مقادیر ویژه یک، ماتریس چندجمله‌ای مشخصه یعنی $\det(A - rI)$ را تشکیل می‌دهیم. ریشه‌های آن یعنی مقادیری که به ازای آنها $\det(A - rI) = 0$، مقادیر ویژه ماتریس A هستند. به ازای هر مقدار ویژه r، جواب‌های دستگاه $(A - rI)V = 0$ بردار ویژه نظیر r هستند.

مثال ۱۵.۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل:

۱. ابتدا ماتریس $A - rI$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A - rI = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r & -2 \\ 1 & -1 - r \end{pmatrix}$$

۲. چندجمله‌ای $\det(A - rI)$ را پیدا می‌کنیم.

$$\det \begin{pmatrix} 1 - r & -2 \\ 1 & -1 - r \end{pmatrix} = (1 - r)(-1 - r) + 2 = r^2 + 1.$$

۳. ریشه‌های $\det(A - rI)$ همان مقادیر ویژه A هستند.

$$\det(A - rI) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = \mathrm{i},\ r_2 = -\mathrm{i}$$

r_1, r_2 مقادیر ویژه A هستند.

۴. به ازای هر r، دستگاه $(A - rI)V = 0$ را حل می‌کنیم.

$$r_1 = \mathrm{i} \Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -2 \\ 1 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

معادله اول همان معادله دوم است که در $(1-\mathrm{i})$ ضرب شده است.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\mathrm{i})v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 + (-1-\mathrm{i})v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = (1+\mathrm{i})v_2$$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

v_2 دلخواه است. قرار می‌دهیم $v_2 = 1$.

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

نکته ۱۶.۵. اگر V بردار ویژه ماتریس A باشد، هر ضریب ثابتی از V نیز بردار ویژه A است.

$$AV = rV \Rightarrow \forall\, k, \quad AkV = kAV = krV = rkV$$

$$r_2 = -\mathrm{i} \Rightarrow \begin{cases} (1+\mathrm{i})v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 + (-1+\mathrm{i})v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = (1-\mathrm{i})v_2$$

معادله اول همان معادله دوم است که در $(1+\mathrm{i})$ ضرب شده است.

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} v_2(1-\mathrm{i}) \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} v_2$$

$v_۲ = ۱$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ - \mathrm{i} \\ ۱ \end{pmatrix}$$

▲

مثال ۱۷.۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

حل: مقادیر ویژه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه A هستند. پس $\det(A - rI) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -r & ۱ & -۱ \\ ۱ & -r & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ - r \end{vmatrix}$$

بر حسب سطر آخر بسط می‌دهیم

$$\det(A - rI) = (۱ - r) \begin{vmatrix} -r & ۱ \\ ۱ & -r \end{vmatrix} = (۱ - r)(r^۲ - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \overset{\text{با تکرار دو}}{r_۱ = ۱}, \quad r_۲ = -۱$$

$$r_۱ = ۱ \Rightarrow (A - r_۱ I)V^{(۱)} = \begin{pmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_۱ + v_۲ - v_۳ = ۰ \Rightarrow v_۳ = ۰ \\ v_۱ - v_۲ = ۰ \Rightarrow v_۱ = v_۲ \end{cases}$$

$v_۱ = ۱$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$r_۲ = -۱ \Rightarrow (A - r_۲ I)V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_۱ + v_۲ - v_۳ = ۰ \\ v_۱ + v_۲ = ۰ \Rightarrow v_۱ = -v_۲ \\ ۲v_۳ = ۰ \Rightarrow v_۳ = ۰ \end{cases}$$

$v_۱ = ۱$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۱۸.۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

(ب) $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}$

(ج) $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$

۶.۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

یک دستگاه معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

که در آن a_{ij}ها اعداد ثابت و g_iها توابع پیوسته معین و x_iها n تابع مجهول هستند.
یک دستگاه معادله به شکل بالا را می‌توانیم به صورت زیر به فرم، ماتریسی نیز نمایش بدهیم.

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X' = AX + g(t)$$

در دستگاه $X' = AX + g(t)$ اگر $g(t) = 0$، آنگاه دستگاه را همگن و در غیر این صورت دستگاه را غیرهمگن می‌نامیم.
شرط اول چنین دستگاهی $x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$، به عبارتی $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ است.

مثال ۱۹.۵. این دستگاه معادله دیفرانسیل خطی همگن است.

$$\begin{array}{ll} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_3 & x_1(0) = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_3 & x_2(0) = -1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3 & x_3(0) = 1 \end{array}$$

و فرم ماتریسی آن به صورت زیر است.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

▲

۷.۵ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از مقادیر ویژه

دستگاه همگن $X' = AX$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲۰.۵. هر ترکیب خطی از جواب‌های معادله $X' = AX$، جوابی از معادله است.

اثبات. فرض کنید $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$ جواب‌هایی ازدستگاه $X' = AX$ باشند. ترکیب خطی $X(t) = c_1X^{(1)}(t) + c_2X^{(2)}(t) + \cdots + c_nX^{(n)}(t)$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $X(t)$ نیز جواب دستگاه است.

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= c_1\frac{dX^{(1)}(t)}{dt} + \cdots + c_n\frac{dX^{(n)}(t)}{dt} \\ &= c_1AX^{(1)}(t) + \cdots + c_nAX^{(n)}(t) \\ &= A(c_1X^{(1)}(t) + \cdots + c_nX^{(n)}(t)) \\ &= AX(t). \end{aligned}$$

■

قضیه ۲۱.۵. اگر $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$، n جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ باشند، آنگاه هر جواب دستگاه را می‌توان به شکل ترکیب

خطی $X^{(۱)}, X^{(۲)}, \dots, X^{(n)}$ نوشت. یعنی جواب عمومی دستگاه به صورت $c_۱X^{(۱)} + c_۲X^{(۲)} + \cdots + c_nX^{(n)}$ است.

نتیجه ۲۲.۵. برای حل دستگاه $X' = AX$ کافی است n جواب مستقل خطی برای دستگاه بیابیم. (n مرتبه ماتریس A است).

می‌دانیم که جواب معادله $x' = ax$، تابع $x(t) = e^{at}$ است. با استفاده از این سعی می‌کنیم برای دستگاه $X' = AX$ جوابی به شکل $X(t) = e^{rt}V$ بیابیم. برای این کار $X(t)$ را در دستگاه جای‌گذاری می‌کنیم و r و V را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
&X(t) = e^{rt}V \Rightarrow \tfrac{dx}{dt} = \tfrac{d}{dt}e^{rt}V = re^{rt}V\\
&X'(t) = AX(t) \Rightarrow re^{rt}V = Ae^{rt}V\\
&\Rightarrow AV = rV \Rightarrow \text{مقادیر ویژه و } V \text{ بردار ویژه است } r
\end{aligned}$$

نتیجه ۲۳.۵. اگر r مقدار ویژه و V بردار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه $X(t) = e^{rt}V$ جواب دستگاه $X' = AX$ است.

مثال ۲۴.۵. جواب عمومی دستگاه $X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} X$ را پیدا کنید.

حل با توجه به مطالب گفته شده کافی است سه جواب مستقل خطی برای دستگاه پیدا کنیم. برای این کار کافی است مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب را پیدا کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} ۱-r & ۱ & ۰ \\ ۱ & -r & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱-r \end{vmatrix} = (۱-r)\begin{vmatrix} -r & ۱ \\ ۱ & ۱-r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱-r \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A-rI) &= (۱-r)(-r(۱-r)-۱)-(۱-r)\\ &= (۱-r)(-r+r^{۲}-۱-۱)\\ &= (۱-r)(r^{۲}-r-۲)\\ &= (۱-r)(r-۲)(r+۱)=۰\\ &\Rightarrow r_{۱}=۱,\quad r_{۲}=۲,\quad r_{۳}=-۱\end{aligned}$$

$$r_{۱}=۱ \quad \Rightarrow (A-r_{۱}I)V^{(۱)}=\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{۱}\\ v_{۲}\\ v_{۳}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{۲}=۰\\ v_{۱}-v_{۲}+v_{۳}=۰ \Rightarrow v_{۱}=-v_{۳}\\ v_{۲}=۰\end{cases}$$

$v_{۱}=۱$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(۱)}=\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ -۱\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(۱)}=e^{r_{۱}t}V^{(۱)}=e^{t}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ -۱\end{pmatrix}$$

$$r_{۲}=۲ \quad \Rightarrow (A-r_{۲}I)V^{(۲)}=\begin{pmatrix}-۱ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{۱}\\ v_{۲}\\ v_{۳}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_{۱}+v_{۲}=۰ \Rightarrow v_{۱}=v_{۲}\\ v_{۱}-۲v_{۲}+v_{۳}=۰\\ v_{۲}-v_{۳}=۰ \Rightarrow v_{۲}=v_{۳}\end{cases}$$

$v_1 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(2)} = e^{r_2 t} V^{(2)} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_3 = -1 \quad \Rightarrow (A - r_3 I)V^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 + 2v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_3$$

$v_1 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(3)} = e^{r_3 t} V^{(3)} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

جواب عمومی

$$X(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-t} \\ -c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۲۵.۵. جواب عمومی دستگاه‌های زیر را بیابید.

$$\text{(الف)}\quad X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱۲ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix} X, \quad X(۰) = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\text{(ب)}\quad X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} X$$

$$\text{(ج)}\quad X' = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} X$$

تا اینجا: برای حل دستگاه معادلات همگن $X' = AX$ با استفاده از مقادیر ویژه کافی است n جواب مستقل خطی (n مرتبه ماتریس A) بیابیم. برای این منظور با قرار دادن $\det(A - rI) = ۰$، مقادیر ویژه A و به ازای هر r، با حل دستگاه $(A - rI)V = ۰$ بردار ویژه نظیر r را پیدا می‌کنیم. به ازای هر مقدار ویژه r و بردار ویژه V نظیر r، تابع $X = e^{rt}V$ یک جواب از دستگاه معادلات است. مقادیر ویژه ماتریس A، می‌توانند حالت‌های مختلف داشته باشند که در ادامه بررسی می‌کنیم.
حالت اول: اگر ماتریس A دارای n مقدار ویژه حقیقی متمایز باشد، یعنی چندجمله‌ای $\det(A - rI) = ۰$، n ریشه حقیقی متمایز داشته باشد. آنگاه به ازای هر مقدار ویژه یک جواب و در نتیجه n جواب مستقل خطی خواهیم داشت.

مثال ۲۶.۵. دستگاه $X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix} X$ را حل کنید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}, \quad A - rI = \begin{pmatrix} ۱ - r & ۴ \\ -۱ & ۱ - r \end{pmatrix}$$

$$\det(A-rI)=\begin{vmatrix}1-r & 4\\ -1 & 1-r\end{vmatrix}=(1-r)^2+4=r^2-2r+5=0$$

$$r=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm 2\mathrm{i} \quad \text{مقادیر ویژه}$$

$$r_1=1+2\mathrm{i}\Rightarrow(A-r_1I)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & 4\\ -1 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\mathrm{i}v_1+4v_2=0\\ -v_1-2\mathrm{i}v_2=0\end{cases}\Rightarrow v_1=-2\mathrm{i}v_2$$

$v_2=1$ دلخواه

$$\Rightarrow V=\begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=e^{rt}V=e^{(1+2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}$$

جواب به دست آمده مختلط است اما ما به دنبال دو جواب حقیقی مستقل خطی هستیم.
▲

قضیه ۲۷.۵. اگر $X(t)=Y(t)+\mathrm{i}Z(t)$ جواب مختلطی از دستگاه $X'=AX$ باشد، آنگاه $Y(t)$ و $Z(t)$ جواب‌های حقیقی دستگاه هستند.

اثبات.

$$\begin{aligned}X(t)\ \text{جواب است}\quad &\Rightarrow (X(t))'=A(X(t))\\ &\Rightarrow (Y(t)+\mathrm{i}Z(t))'=A(Y(t)+\mathrm{i}Z(t))\\ &\Rightarrow Y'(t)+\mathrm{i}Z'(t)=AY(t)+\mathrm{i}AZ(t)\\ &\Rightarrow Y'(t)=AY(t),\quad Z'(t)=AZ(t)\end{aligned}$$

■

نتیجه ۲۸.۵. از هر جواب مختلط برای دستگاه $X'=AX$، دو جواب حقیقی مستقل خطی به دست می‌آید.

حال ببینیم این دو جواب حقیقی را چگونه به دست آوریم؟

فرض کنید جواب مختلط به صورت $X(t)=e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}(V^{(1)}+\mathrm{i}V^{(2)})$ است.

$$\begin{aligned}X(t) &= e^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)(V^{(1)}+\mathrm{i}V^{(2)})\\ &= e^{\alpha t}\left[(V^{(1)}\cos\beta t-V^{(2)}\sin\beta t)+\mathrm{i}(V^{(2)}\cos\beta t+V^{(1)}\sin\beta t)\right]\\ &\Rightarrow Y(t)=e^{\alpha t}(V^{(1)}\cos\beta t-V^{(2)}\sin\beta t)\\ &\Rightarrow Z(t)=e^{\alpha t}(V^{(2)}\cos\beta t+V^{(1)}\sin\beta t)\end{aligned}$$

دو جواب حقیقی دستگاه هستند.

حالت دوم: اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژه مختلط $r=\alpha+\mathrm{i}\beta$ باشد و $V=V^{(1)}+\mathrm{i}V^{(2)}$ بردار ویژه نظیر r باشد. از جواب مختلط $X^{(t)}=e^{rt}V$ می‌توان دو جواب حقیقی به دست آوریم.

$$\begin{aligned}X^{(t)} &= e^{\alpha+\mathrm{i}\beta}(V^{(1)}+\mathrm{i}V^{(2)})\\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)(V^{(1)}+\mathrm{i}V^{(2)})\\ &= e^{\alpha t}\left[V^{(1)}\cos\beta t-V^{(2)}\sin\beta t\right]+\mathrm{i}e^{\alpha t}\left[V^{(2)}\cos\beta t+V^{(1)}\sin\beta t\right]\\ &\Rightarrow Y(t)=e^{\alpha t}\left[V^{(1)}\cos\beta t-V^{(2)}\sin\beta t\right]\\ &\Rightarrow Z(t)=e^{\alpha t}\left[V^{(2)}\cos\beta t+V^{(1)}\sin\beta t\right]\end{aligned}$$

$Y(t)$ و $Z(t)$ دو جواب حقیقی مستقل

دیدیم که $X(t)=e^{(1+2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}-2\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$ جواب مختلط دستگاه است. کافی است قسمت حقیقی و قسمت موهومی $X(t)$ را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned}X(t) &= e^{t}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right]\\ X(t) &= e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right]+e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\mathrm{i}\\ X(t) &= e^{t}\left[\begin{pmatrix}0\\\cos 2t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\sin 2t\\0\end{pmatrix}\right]+e^{t}\left[\begin{pmatrix}-2\cos 2t\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\sin 2t\end{pmatrix}\right]\mathrm{i}\\ X(t) &= e^{t}\begin{pmatrix}2\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}+e^{t}\begin{pmatrix}-2\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}\mathrm{i}\\ &\Rightarrow Y(t)=e^{t}\begin{pmatrix}2\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix},\quad Z(t)=e^{t}\begin{pmatrix}-2\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$Y(t)$ و $Z(t)$ دو جواب حقیقی مستقل
در نتیجه جواب عمومی دستگاه

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$
$$X(t) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^t \sin 2t - 2c_2 e^t \cos 2t \\ c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

مثال ۲۹.۵. دستگاه $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} X$ را حل کنید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - rI = \begin{pmatrix} -r & 1 & 0 \\ 0 & -r & 1 \\ 4 & -4 & 1-r \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - rI) &= -r \begin{vmatrix} -r & 1 \\ -4 & 1-r \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -r \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -r(-r(1-r) + 4) - (-4) \\ &= -r^3 + r^2 - 4r + 4 \\ &= -(r-1)(r^2+4) = 0 \end{aligned}$$

$r = 1$ ریشه است.

$$\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -4 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2\mathrm{i}, \quad r_3 = -2\mathrm{i}$$

$$r_1 = 1 \quad \Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ -v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 \\ 4v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(1)} = e^{r_1 t} V^{(1)} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 2\mathrm{i} \quad \Rightarrow (A - r_2 I) V^{(2)} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} & 1 \\ 4 & -4 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\mathrm{i}v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 2\mathrm{i}v_1 \\ -2\mathrm{i}v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 2\mathrm{i}v_2 \quad \Rightarrow v_3 = -4v_1 \\ 4v_1 - 4v_2 + (1-2\mathrm{i})v_3 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(2)} = e^{r_2 t} V^{(2)} = e^{2\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -4 \end{pmatrix}$$ جواب مختلط

$$\begin{aligned}
X^{(۲)}(t) &= (\cos ۲t + \mathrm{i}\sin ۲t)\left[\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۴ \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}\right] \\
X^{(۲)}(t) &= \left[\cos ۲t \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۴ \end{pmatrix} - \sin ۲t \begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}\right] + \left[\cos ۲t \begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} + \sin ۲t \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۴ \end{pmatrix}\right]\mathrm{i} \\
X^{(۲)}(t) &= \begin{pmatrix} \cos ۲t \\ ۲\sin ۲t \\ -۴\cos ۲t \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} \sin ۲t \\ ۲\cos ۲t \\ -۴\sin ۲t \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \cos ۲t \\ ۲\sin ۲t \\ -۴\cos ۲t \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} \sin ۲t \\ ۲\cos ۲t \\ -۴\sin ۲t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

جواب عمومی دستگاه

$$X(t) = c_۱\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_۲\begin{pmatrix} \cos ۲t \\ ۲\sin ۲t \\ -۴\cos ۲t \end{pmatrix} + c_۳\begin{pmatrix} \sin ۲t \\ ۲\cos ۲t \\ -۴\sin ۲t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_۱e^t + c_۲\cos ۲t + c_۳\sin ۲t \\ c_۱e^t + ۲c_۲\sin ۲t + ۲c_۳\cos ۲t \\ c_۱e^t - ۴c_۲\cos ۲t - ۴c_۳\sin ۲t \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۳۰.۵. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

(الف) $X' = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} X$

(ب) $X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} X$

حالت سوم: اگر A دارای مقدار ویژه تکراری باشد. دیدیم که اگر ماتریس A در دستگاه $X' = AX$ دارای مقدار ویژه تکراری باشد، لزوماً نمی‌توانیم n جواب به فرم $e^{rt}V$ (r مقدار ویژه و V بردار ویژه) بیابیم.
در ادامه به دنبال روشی هستیم که بتوانیم به هر تعداد دلخواه جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ بیابیم.

۸.۵ تابع نمایی ماتریسی:

تعریف ۳۱.۵. برای، ماتریس $n \times n$، A تابع نمایی ماتریسی را با e^{At} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$e^{At} := I + tA + \frac{t^۲}{۲!}A^۲ + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$$

یادآوری: $e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ▲

مشتق e^{At}:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= A + tA^۲ + \cdots + \frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!}A^n + \cdots \\ &= A(I + tA + \cdots + \frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!}A^{n-۱} + \cdots) \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

نتیجه ۳۲.۵. برای هر بردار ثابت V، بردار $e^{At}V$ جوابی از دستگاه $X' = AX$ است.

$$\forall\ V,\ \ \frac{d}{dt}(e^{At}V) = Ae^{At}V = A(e^{At}V)$$

پس می‌توانیم با انتخاب Vهای مناسب، به هر تعداد لازم جواب از دستگاه $X' = AX$ به فرم $e^{At}V$ به دست آوریم.

در ادامه کمی بیشتر با شکل توابع $e^{At}V$ و محاسبات آنها آشنا می‌شویم.

خواص تابع e^{At}:

۱. $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$

۲. $(e^{A(t)})^{-1} = e^{-At}$

۳. $e^{At+Bt} = e^{At} \cdot e^{Bt} \Leftrightarrow AB = BA$

۴. $e^{(rI)t} = e^{rt}I$

دلیل (۴)

$$e^{(rI)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(rI)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt)^n}{n!} I^n = e^{rt}I$$

حال نشان می‌دهیم چگونه به هر تعداد لازم جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ با استفاده از تابع e^{At} به دست آوریم.

دیدیم که برای هر بردار ثابت دلخواه V، $e^{At}V$ جواب دستگاه است. برای هر عدد حقیقی $r \in \mathbb{R}$ روابط زیر را در نظر می‌گیریم.

$$e^{At}V = e^{(A-rI)t+rIt}V \overset{\text{خاصیت ۳}}{=} e^{(A-rI)t}e^{rIt}V$$

$$\overset{\text{خاصیت ۴}}{\Rightarrow} e^{At}V = e^{rt}e^{(A-rI)t}V \tag{۱.۵}$$

حال بردار $e^{(A-rI)t}V$ را بیشتر بررسی می‌کنیم.

$$e^{(A-rI)t}V = \left[I + t(A - rI) + \cdots + \frac{t^m}{m!}(A - rI)^m + \cdots\right] V$$

اگر V را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $(A - rI)^m V = 0$، آنگاه داریم:

$$e^{(A-rI)t}V = \left[I + t(A - rI) + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - rI)^{m-1}\right] V$$

در نتیجه به ازای این V جواب $e^{At}V$ به فرم زیر خواهد بود.

$$\Rightarrow e^{At}V = e^{rt}\left[V + t(A - rI)V + \cdots + \frac{t^{(m-1)}}{(m-1)!}(A - rI)^{(m-1)}V\right]$$

۱. اگر V یک بردار ویژه و r مقدار ویژه باشد، یعنی $(A - rI)V = 0$، آنگاه

$e^{At}V = e^{rt}V$. می‌بینیم که جواب‌های قبلی هم از این روش به دست می‌آیند.

۲. اگر r مقدار ویژه تکراری و مثلا با تکرار k باشد و تعداد جواب‌های مستقل خطی کمتر از n تا باشد، آنگاه نیاز به جواب‌های بیشتری داریم. این کار را با Vهای مناسب انجام می‌دهیم.
اگر V را به گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$(A-rI)^{۲}V = ۰, \quad (A-rI)V \neq ۰$$

آنگاه از فرمول $e^{At}V$ خواهیم داشت:

$$e^{At}V = e^{rt}\left[V + t(A-rI)V\right]$$

و این یک جواب دیگر از دستگاه است. اگر هنوز به جواب مستقل نیاز داشته باشیم، V را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$(A-rI)^{۳}V = ۰, \quad (A-rI)^{۲}V \neq ۰$$

در نتیجه جواب دیگر از فرمول $e^{At}V$ به صورت زیر خواهد بود.

$$e^{At}V = e^{rt}\left[V + t(A-rI)V + \frac{t^{۲}}{۲!}(A-rI)^{۲}V\right]$$

حل:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \Rightarrow X' = AX, \quad A - rI = \begin{pmatrix} ۱-r & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱-r & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱-r \end{pmatrix}$$

بر حسب ستون اول بسط می‌دهیم

$$\det(A-rI) = (۱-r)\begin{vmatrix} ۱-r & -۱ \\ ۰ & ۱-r \end{vmatrix} = \det(A-rI) = (۱-r)^{۳} = ۰ \Rightarrow r = ۱$$

مقدار ویژه با تکرار سه

$$r_1 = 1 \quad \Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ -v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(1)} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

نیاز به دو جواب مستقل خطی دیگر داریم. ابتدا دستگاه $(A - rI)^2 V = 0$ را حل می‌کنیم.

$$(A - rI)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = 0, \text{دلخواه} v_1, v_2$$

برای این که با $V^{(۱)}$ مستقل باشد، باید $(A-rI)V^{(۲)} \neq ۰$. دلخواه $v_۲ = ۱,\ v_۱ = ۰$

$$\Rightarrow V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$x^{(۲)} = e^{At}V^{(۲)} = e^{t}\left[\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}\right]$$

$$x^{(۲)} = e^{t}\left[\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}\right] = e^{t}\begin{pmatrix} t \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

نیاز به یک جواب دیگر داریم. پس $V^{(۳)}$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که

$$(A-rI)^{۳}V^{(۳)} = ۰, \quad (A-I)^{۲}V^{(۳)} \neq ۰$$

$$(A-I)^{۳}V^{(۳)} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow v_۱, v_۲, v_۳ \text{ دلخواه}$$

قرار می‌دهیم $v_۱ = v_۲ = v_۳$

$$\Rightarrow V^{(۳)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$x^{(۳)} = e^{t}\left[\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \frac{t^{۲}}{۲!}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}\right]$$

$$X^{(3)}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1+2t+\frac{t^2}{2!} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + c_3 X^{(3)}$$

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1+2t+\frac{t^2}{2!} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t (1+2t+\frac{t^2}{2!}) \\ c_2 e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

تمرین ۳۳.۵.

(الف) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} X$

(ب) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} X$

۹.۵ دستگاه معادله غیرهمگن

تا اینجا دیدیم که چگونه n جواب مستقل خطی برای دستگاه معادلات $X' = AX$ (n مرتبه A است) به دست آوریم.

تعریف ۳۴.۵. اگر $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$، n جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ باشد، آنگاه ماتریس اساسی جواب دستگاه عبارتست از ماتریس $n \times n$ که هر ستون آن یکی از جواب‌های دستگاه است. یعنی $\psi = (X^{(1)}\ X^{(2)}\ \ldots\ X^{(n)})$. ▲

دیدیم که جواب عمومی دستگاه به صورت

$$X(t) = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \cdots + c_n X^{(n)}$$

است. به بیان دیگر جواب عمومی دستگاه به صورت زیر است، که $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

$$X(t) = \psi(t)C$$

حال دستگاه معادله غیرهمگن $X' = AX + g(t)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $X_p(t)$ یک جواب خاص از این دستگاه باشد، آنگاه برای هر جواب دلخواه $X(t)$ از این دستگاه داریم:

$$\begin{gathered}(X - X_p)'(t) = X'(t) - X_p'(t) = AX(t) + g(t) - AX_p(t) - g(t) \\ \Rightarrow (X - X_p)'(t) = A(X - X_p)(t).\end{gathered}$$

نتیجه ۳۵.۵. تفاضل هر دو جواب دستگاه غیرهمگن $X' = AX + g(t)$، جوابی از دستگاه همگن $X' = AX$ است.

نتیجه ۳۶.۵. جواب عمومی دستگاه غیرهمگن $X' = AX + g(t)$ به صورت مجموع جواب عمومی دستگاه همگن به اضافه یک جواب خاص از دستگاه غیرهمگن است به عبارت دیگر

$$X(t) = c_1X^{(1)} + c_2X^{(2)} + \cdots + c_nX^{(n)} + X_p$$

که $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$، n جواب مستقل خطی از دستگاه همگن $X' = AX$ و $X_p(t)$ یک جواب خاص از دستگاه غیرهمگن $X' = AX + g(t)$ است.

بنابرابن برای یافتن جواب عمومی دستگاه غیرهمگن، کافی است بتوانیم یک جواب خاص از دستگاه $X' = AX + g(t)$ بیابیم.

۱۰.۵ روش تغییر پارامتر

در این روش قرار می‌دهیم

$$X_p(t) = U_1(t)X^{(1)}(t) + \cdots + U_n(t)X^{(n)}(t)$$

که $X^{(i)}$ها جواب‌های دستگاه $X' = AX$ هستند و $U_i(t)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $X_p(t)$ در دستگاه $X' = AX + g(t)$ صدق کند. به عبارت دیگر

$$X_p(t) = \psi(t)U(t)$$

که $\psi(t)$ ماتریس اساسی جواب و $U(t) = \begin{pmatrix} U_۱ \\ U_۲ \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$ است. برای اینکه X_p در دستگاه صدق کند، باید

$$X_p' = AX_p + g(t)$$

پس باید

$$\psi'(t)U(t) + \psi(t)U'(t) = A\psi(t)U(t) + g(t)$$

اما می‌دانیم که

$$\begin{aligned} &\psi'(t) = \begin{pmatrix} X^{(۱)'} & \dots & X^{(n)'} \end{pmatrix} = A\psi(t) \\ &\Rightarrow A\psi(t)U(t) + \psi(t)U'(t) = A\psi(t)U(t) + g(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(t)U'(t) = g(t) \tag{۲.۵}$$

یعنی برای یافتن $U_۱, \dots, U_n$ کافی است دستگاه ۲.۵ را حل کنیم تا $U_۱', \dots, U_n'$ به دست آید و سپس $U_۱, \dots, U_n$ را به دست آوریم. از آنجا $\det\psi(t) \neq ۰$، $\psi(t)$ وارون‌پذیر است. پس داریم

$$U'(t) = \psi^{-۱}(t)g(t)$$

مثال ۳۷.۵. جواب عمومی دستگاه $X' = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: ابتدا دستگاه همگن $X' = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} X$ را حل می‌کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} \Rightarrow A - rI = \begin{vmatrix} -۲-r & ۳ \\ -۱ & ۲-r \end{vmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -۲-r & ۳ \\ -۱ & ۲-r \end{vmatrix} = (-۲-r)(۲-r) + ۳ = r^{۲} - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow r^{۲} = ۱ \Rightarrow r_{۱} = ۱,\ r_{۲} = -۱$$

$$r_{۱} = ۱ \Rightarrow (A - r_{۱}I)V^{(۱)} = \begin{pmatrix} -۳ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{۱} \\ v_{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳v_{۱} + ۳v_{۲} = ۰ \\ -v_{۱} + v_{۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow v_{۱} = v_{۲} = ۱ \text{ دلخواه}$$

$$\Rightarrow V^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$X^{(۱)} = e^{t} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$r_{۲} = -۱ \Rightarrow (A - r_{۲}I)V^{(۲)} = \begin{pmatrix} -۱ & ۳ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{۱} \\ v_{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_{۱} + ۳v_{۲} = ۰ \\ -v_{۱} + ۳v_{۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow v_{۱} = ۳v_{۲} \text{ دلخواه } v_{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$X^{(۲)} = e^{-t} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

در نتیجه ماتریس اساسی جواب $\psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & ۳e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$ است. کافی است یک جواب خاص برای دستگاه غیرهمگن بیابیم. با استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم $X_p = \psi(t)U(t)$ و دیدیم که

$$\begin{pmatrix} e^t & ۳e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'_۱ \\ U'_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^tU'_۱ + ۳e^{-t}U'_۲ = e^t \\ e^tU'_۱ + e^{-t}U'_۲ = e^{-t} \end{cases}$$

$U'_۱$ و $U'_۲$ را با روش کرامر به دست می‌آوریم.

$$U'_۱ = \frac{\begin{vmatrix} e^t & ۳e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & ۳e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{۱-۳e^{-۲t}}{۱-۳} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}e^{-۲t}$$

$$\Rightarrow U_۱(t) = \int (-\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}e^{-۲t})dt = -\frac{۱}{۲}t - \frac{۳}{۴}e^{-۲t}$$

$$U_۲' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix}}{۱-۳} = \frac{۱-e^{۲t}}{-۲} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}e^{۲t}$$

$$\Rightarrow U_۲(t) = \int (-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}e^{۲t})dt = -\frac{۱}{۲}t + \frac{۱}{۴}e^{۲t}$$

در نتیجه

$$X_p = \psi(t)U(t) = \begin{pmatrix} e^t & ۳e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲}t - \frac{۳}{۴}e^{-۲t} \\ -\frac{۱}{۲}t + \frac{۱}{۴}e^{۲t} \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲}e^t t - \frac{۳}{۴}e^{-t} - \frac{۳}{۲}te^{-t} + \frac{۳}{۴}e^t \\ -\frac{۱}{۲}e^t t - \frac{۳}{۴}e^{-t} - \frac{۱}{۲}te^{-t} + \frac{۱}{۴}e^t \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^t(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲}t) - e^{-t}(\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۲}t) \\ e^t(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}t) - e^{-t}(\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲}t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \psi(t)C + \psi(t)U$$
$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & ۳e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲}t) - e^{-t}(\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۲}t) \\ e^t(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}t) - e^{-t}(\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲}t) \end{pmatrix}$$

جواب عمومی دستگاه
$$X(t) = \begin{pmatrix} c_۱e^t + ۳c_۲e^{-t} + e^t(\frac{۳}{۴} - \frac{t}{۲}) - e^{-t}(\frac{۳}{۴} - \frac{۳t}{۲}) \\ c_۱e^t + c_۲e^{-t} + e^t(\frac{۱}{۴} - \frac{t}{۲}) - e^{-t}(\frac{۳}{۴} + \frac{t}{۲}) \end{pmatrix}$$

▲

نتیجه ۳۸.۵. جواب عمومی دستگاه غیرهمگن

$$X(t) = \psi(t)C + \psi(t)U(t) = \psi(t)(C + U(t))$$

که $\psi(t)U(t)$ جواب خاص دستگاه غیرهمگن $\psi(t)C$ جواب عمومی دستگاه همگن

است.

مثال ۳۹.۵. دستگاه $X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \\ e^{۲t} \end{pmatrix}$ را حل کنید.

حل: ابتدا دستگاه همگن $X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{pmatrix} X$ را حل می‌کنیم.(تمرین۳۴.۵ (ب))

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{pmatrix} \Rightarrow A - rI = \begin{vmatrix} ۱-r & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲-r & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۲-r \end{vmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} ۱-r & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲-r & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۲-r \end{vmatrix} = (۱-r)\begin{vmatrix} ۲-r & -۳ \\ ۱ & -۲-r \end{vmatrix}$$

$$\det(A - rI) = (۱-r)\left[(۲-r)(-۲-r)+۳\right] = (۱-r)(r^{۲}-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow r = ۱,\ \ r^{۲} = ۱ \Rightarrow r_{۱} = -۱,\ \ r_{۲} = ۱ \text{ با تکرار دو}$$

$$r_{۱} = -۱ \Rightarrow (A - r_{۱}I)V^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & -۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{۱} \\ v_{۲} \\ v_{۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲v_{۱} = ۰ \\ ۳v_{۲} - ۳v_{۳} = ۰ \\ v_{۲} - v_{۳} = ۰ \end{cases} \Rightarrow v_{۲} = v_{۳} = ۱ \text{ دلخواه}$$

$$\Rightarrow V^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = e^{r_1 t} V^{(1)} = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 1 \Rightarrow (A - r_2 I)V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 - 3v_3 = 0 \quad \Rightarrow v_2 = 3v_3 \Rightarrow v_2 = v_3 = 0, \ \text{دلخواه}\ v_1 = 1$$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = e^{r_2 t} V^{(2)} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یک جواب دیگر لازم داریم. دستگاه $(A - r_2 I)^2 V = 0$ را حل می‌کنیم.

$$r_2 = 1 \Rightarrow (A - I)^2 V^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -2v_2 + 6v_3 = 0 \quad \Rightarrow v_2 = 3v_3, \ \text{دلخواه}\ v_1$$

باید دقت کنیم $(A-I)V^{(3)} \neq 0$.

$$v_1 = 0, \quad \text{دلخواه } v_3 = 1 \Rightarrow v_2 = 3, V^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)}(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ماتریس اساسی جواب $\psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix}$ است.

در نتیجه جواب عمومی دستگاه همگن:

$$X_h(t) = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + c_3 X^{(3)} = \psi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$X_h = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

برای یافتن یک جواب خاص از دستگاه غیرهمگن باید U را به گونه‌ای بیابیم که

$$X_p(t) = \psi(t)U(t) \text{و} \psi(t)U'(t) = g(t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{t}U_2' = e^{t} \Rightarrow U_2' = 1 \Rightarrow U_2(t) = t \\ e^{-t}U_1' + 3e^{t}U_3' = e^{-t} \\ e^{-t}U_1' + e^{t}U_3' = e^{2t} \end{cases}$$

$$U_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^{t} \\ e^{2t} & e^{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix}} = \frac{1-3e^{3t}}{1-3} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{3t}$$
$$\Rightarrow U_1(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$U_3' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix}} = \frac{e^{t}-e^{-2t}}{1-3} = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$
$$\Rightarrow U_3(t) = -\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{t} & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^{t} \\ e^{-t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ t \\ -\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \psi(t)C + \psi(t)U$$
$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{t} & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^{t} \\ e^{-t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ c_2 + t \\ c_3 - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۴۰.۵. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

(الف) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix}$

(ب) $X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} ۰ \\ e^{-t}\sin ۲t \\ e^{t}\cos ۲t \end{pmatrix}$

(ج) $X' = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۴ & -۱ \\ ۰ & ۵ & ۰ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} ۲e^{-t} \\ e^{۳t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

(د) $X' = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} ۱ \\ t \\ e^{t} \end{pmatrix}$

۱۱.۵ یک روش محاسبه برای تابع e^{At}

قضیه ۴۱.۵. اگر $\psi(t)$ ماتریس اساسی جواب برای دستگاه $X' = AX$ باشد، آنگاه

$$e^{At} = \psi(t)\psi^{-۱}(۰).$$

اثبات. قرار می‌دهیم $F(t) = e^{-At}\psi(t)$

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}F(t) &= -Ae^{-At}\psi(t) + e^{-At}\psi'(t), \quad \psi'(t) = A\psi(t) \\
&= -Ae^{-At}\psi(t) + Ae^{-At}\psi(t) \\
&= ۰ \Rightarrow F(t) = C \\
F(۰) &= e^{-A۰}\psi(۰) = \psi(۰) \\
&\Rightarrow F(t) = e^{-At}\psi(t) = \psi(۰) \\
(e^{-At})^{-۱} = e^{At} &\Rightarrow e^{At}\psi(۰) = \psi(t) \\
&\Rightarrow e^{At} = \psi(t)\psi^{-۱}(۰).
\end{aligned}$$

■

نتیجه ۴۲.۵. برای محاسبه تابع e^{At}، کافی است دستگاه همگن $X' = AX$ را حل کنیم و ماتریس اساسی جواب آن را به دست آوریم. در این صورت $e^{At} = \psi(t)\psi^{-۱}(۰)$.

تمرین ۴۳.۵. برای ماتریس‌های زیر تابع e^{At} را به دست آورید.

(الف) $A = \begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{pmatrix}$

(ب) $A = \begin{pmatrix} ۴ & ۶ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & -۴ & -۳ \end{pmatrix}$

(ج) $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}$

فصل ۶

پاسخ تمرین‌ها

۱.۶ حل تمرین‌های فصل اول

۱.۱.۶ پاسخ تمرین ؟؟

معادله $(x^2 y \ln y + xy^2 - y\sin x)dx + (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + y^2 \cos y)dy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x^2 y \ln y + xy^2 - y\sin x \quad &\Rightarrow M_y = x^2 \ln y + x^2 + 2xy - \sin x \\ N(x,y) &= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 y + y^2 \cos y \quad &\Rightarrow N_x = x^2 + xy \end{aligned}$$

$M_y \neq N_x$ معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{x^2 \ln y + x^2 + 2xy - \sin x - x^2 - xy}{-(x^2 y \ln y + xy^2 - y\sin x)} = R(y) = \frac{-1}{y}$$

در نتیجه معادله دارای عامل انتگرال ساز است و

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\int R(y)d(y)} \\ \mu(y) &= e^{\int \frac{-1}{y}dy} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

$$\times\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \frac{1}{y}(x^2\ln y + xy - \sin x)dx + (\frac{1}{3}\frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + y\cos y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} M(x,y) = x^2\ln y + xy - \sin x & \Rightarrow M_y = \frac{x^2}{y} + x \\ N(x,y) = \frac{1}{3}\frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + y\cos y & \Rightarrow N_x = \frac{x^2}{y} + x \end{array}$$

$M_y = N_x$ معادله کامل است.

$$\exists\psi(x,y) \quad \begin{array}{ll} \psi_x = x^2\ln y + xy - \sin x & (1) \\ \psi_y = \frac{1}{3}\frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + y\cos y & (2) \end{array}$$

از (۱) انتگرال می‌گیریم بر حسب x

$$\psi(x,y) = \frac{1}{3}x^3\ln y + \frac{1}{2}x^2y + \cos x + h(y)$$

مشتق گیری بر حسب y

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \psi_y = \frac{1}{3}\frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + h'(y) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{3}\frac{x^3}{y} + \frac{1}{2}x^2 + y\cos y \\ &\Rightarrow h'(y) = y\cos y \\ &\Rightarrow h(y) = \int y\cos y dy \\ &y = u \Rightarrow dy = du \\ &\cos y dy = dv \Rightarrow \sin y = v \\ &\Rightarrow h(y) = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y \\ &\Rightarrow \psi(x,y) = \frac{1}{3}x^3\ln y + \frac{1}{2}x^2y + \cos x + y\sin y + \cos y = c. \end{aligned}$$

$\psi(x,y)$ جواب عمومی معادله است.

۲.۱.۶ پاسخ تمرین ؟؟

$\sin y(x+\sin y)dx + ۲x^۲ \cos y dy = ۰$

$$\begin{aligned}
\sin y = u \quad & \Rightarrow \cos y dy = du \\
& \Rightarrow u(x+u) + ۲x^۲ u' = ۰ \\
& \Rightarrow u' + \tfrac{۱}{۲x}u = -\tfrac{۱}{۲x^۲}u^۲ \quad \text{برنولی} \\
\times u^{-۲} \quad & \Rightarrow u^{-۲}u' + \tfrac{۱}{۲x}uu^{-۲} = -\tfrac{۱}{۲x^۲} \\
u^{-۱} = z \quad & \Rightarrow -u^{-۲}u' = z' \\
& \Rightarrow -z' + \tfrac{۱}{۲x}z = -\tfrac{۱}{۲x^۲} \\
& \Rightarrow z' - \tfrac{۱}{۲x}z = \tfrac{۱}{۲x^۲} \\
& \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{۱}{۲x}dx} = x^{-\frac{۱}{۲}} \\
& \Rightarrow x^{-\frac{۱}{۲}}z' - \tfrac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}z = \tfrac{۱}{۲}x^{-\frac{۵}{۲}} \\
& \Rightarrow \tfrac{d(x^{-\frac{۱}{۲}}z)}{dx} = \tfrac{۱}{۲}x^{-\frac{۵}{۲}} \\
& \Rightarrow x^{-\frac{۱}{۲}}z = \int \tfrac{۱}{۲}x^{-\frac{۵}{۲}}dx = -\tfrac{۱}{۳}x^{-\frac{۳}{۲}} + c \\
& \Rightarrow z = -\tfrac{۱}{۳}x^{-۱} + cx^{\frac{۱}{۲}} \\
& \Rightarrow \tfrac{۱}{\sin y} = -\tfrac{۱}{۳x} + \tfrac{c}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

۳.۱.۶ پاسخ تمرین ؟؟

معادله $(-۳x + ۶xy) + (\frac{x^۲}{y} + \frac{۳y}{x})\frac{dy}{dx} = ۰$ را حل کنید.

$$(-۳x^۲y + ۶x^۲y^۲)dx + (x^۳ + ۳y^۲)dy = ۰$$

$$\left.\begin{aligned}
M(x,y) = -۳x^۲y + ۶x^۲y^۲ \quad & \Rightarrow M_y = -۳x^۲ + ۱۲x^۲y \\
N(x,y) = x^۳ + ۳y^۲ \quad & \Rightarrow N_x = ۳x^۲
\end{aligned}\right. \Rightarrow M_y \neq N_x$$

معادله کامل نیست.

$$R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-۳x^۲ + ۱۲x^۲y - ۳x^۲}{۳x^۲y - ۶x^۲y} = \frac{-۲}{y}$$

در نتیجه معادله دارای عامل انتگرال ساز است و

$$\mu(y) = e^{\int R(y)d(y)}$$
$$\mu(y) = e^{\int \frac{-۲}{y}dy} = y^{-۲}$$

$$\times y^{-۲} \quad \Rightarrow (-۳x^۲y^{-۱} + ۶x^۲)dx + (\frac{x^۳}{y^۲} + ۳)dy = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{array}{ll} M(x,y) = -\frac{۳x^۲}{y} + ۶x^۲ & \Rightarrow M_y = \frac{۳x^۲}{y^۲} \\ N(x,y) = \frac{x^۳}{y^۲} + ۳ & \Rightarrow N_x = \frac{۳x^۲}{y^۲} \end{array} \Rightarrow M_y = N_x$$

معادله کامل است.

$$\exists\psi(x,y) \quad \begin{array}{ll} \psi_x = -\frac{۳x^۲}{y} + ۶x^۲ & (۱) \\ \psi_y = \frac{x^۳}{y^۲} + ۳ & (۲) \end{array}$$

$$\psi(x,y) = -\frac{x^۳}{y} + ۲x^۳ + h(y)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \psi_y = \frac{x^۳}{y^۲} + h^{'}(y) \\ &= \frac{x^۳}{y^۲} + ۳ \\ &\Rightarrow h^{'}(y) = ۳ \\ &\Rightarrow h(y) = ۳y \\ &\Rightarrow \psi(x,y) = -\frac{x^۳}{y} + ۲x^۳ + ۳y = c. \end{aligned}$$

$(-۳x+۶xy)+(\frac{x^۲}{y}+\frac{۳y}{x})\frac{dy}{dx}=۰$

$$
\begin{aligned}
& -۳xx^{'}+۶xyx^{'}+\frac{x^۲}{y}+\frac{۳y}{x}=۰\\
& x^{'}-۲yx^{'}-\frac{x}{۳y}-\frac{y}{x^۲}=۰\\
& (۱-۲y)x^{'}-\frac{۱}{۳y}x=yx^{-۲}\\
\Rightarrow\quad & x^{'}-\frac{۱}{۳y(۱-۲y)}x=\frac{y}{۱-۲y}x^{-۲} \text{ برنولی}\\
& x^۲x^{'}-\frac{۱}{۳y(۱-۲y)}x^۳=\frac{y}{۱-۲y}\\
x^۳=z\Rightarrow\quad & ۳x^۲x^{'}=z^{'}\\
& \frac{z^{'}}{۳}-\frac{۱}{۳y(۱-۲y)}z=\frac{y}{۱-۲y}\\
\Rightarrow\quad & z^{'}-\frac{۱}{y(۱-۲y)}z=\frac{۳y}{۱-۲y}\\
& \mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y(۱-۲y)}}=\frac{۱}{y}-۲\\
\Rightarrow\quad & \frac{d((\frac{۱}{y}-۲)z)}{dy}=\frac{۱-۲y}{y}\times\frac{۳y}{۱-۲y}=۳\\
& (\frac{۱}{y}-۲)z=۳y+c\\
& (\frac{۱}{y}-۲)x^۳=۳y+c\\
& \frac{۱-۲y}{y}x^۳=۳y+c\\
& x^۳-۲yx^۳=۳y^۲+cy\\
\Rightarrow\quad & -\frac{x^۳}{y}+۲x^۳+۳y=c.
\end{aligned}
$$

۴.۱.۶ پاسخ تمرین ۴۱.۱

$$
\begin{aligned}
& (x-\sqrt{xy})y^{'}=y\\
\Rightarrow\quad & y^{'}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}=\frac{\frac{y}{x}}{۱-\sqrt{\frac{y}{x}}} && \text{معادله همگن}\\
z=\frac{y}{x}\quad & \Rightarrow y=xz\Rightarrow y^{'}=z+xz^{'}\\
& \Rightarrow z+xz^{'}=\frac{z}{۱-\sqrt{z}} && \text{بازنویسی}\\
& \Rightarrow xz^{'}=\frac{z}{۱-\sqrt{z}}-z\\
& \Rightarrow xz^{'}=\frac{z-z+z\sqrt{z}}{۱-\sqrt{z}}=\frac{z\sqrt{z}}{۱-\sqrt{z}} && \text{معادله جدا شدنی}\\
& \Rightarrow dz(\frac{۱-\sqrt{z}}{z\sqrt{z}})=\frac{dx}{x}\\
& \Rightarrow \int(\frac{۱}{z\sqrt{z}}-\frac{۱}{z})dz=\int\frac{dx}{x}\\
& \Rightarrow \int z^{\frac{-۳}{۲}}dz-\ln z=\ln x+c\\
& \Rightarrow -\frac{۲}{\sqrt{z}}-\ln z=\ln x+c\\
& \Rightarrow -\frac{۲}{\sqrt{\frac{y}{x}}}-\ln\frac{y}{x}=\ln x+c.
\end{aligned}
$$

۵.۱.۶ پاسخ تمرین ۴۴.۱

(الف)

$$
\begin{aligned}
& \qquad ۲xyy' + x^۲ - y^۲ = ۰ \\
\Rightarrow & \qquad y' = \frac{y^۲ - x^۲}{۲xy} = \frac{۱}{۲}\frac{y}{x} - \frac{۱}{۲}\frac{x}{y} = \frac{۱}{۲}\frac{y}{x} - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{\frac{y}{x}} \quad \text{همگن} \\
z = \frac{y}{x} & \quad \Rightarrow y = xz \\
\Rightarrow & \qquad y' = z + xz' \\
\Rightarrow & \qquad z + xz' = \frac{۱}{۲}z - \frac{۱}{۲z} \\
\Rightarrow & \qquad xz' = -\frac{۱}{۲}z - \frac{۱}{۲z} \\
\Rightarrow & \qquad xz' = -\frac{z^۲+۱}{۲z} \\
\Rightarrow & \qquad \frac{۲z}{z^۲+۱}dz = -\frac{dx}{x} \\
\Rightarrow & \qquad \int \frac{۲z}{۱+z^۲}dz = -\int \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow & \qquad \ln(۱+z^۲) = -\ln x + c_۱ \\
\Rightarrow & \qquad ۱ + z^۲ = -cx \\
\Rightarrow & \qquad ۱ + \frac{y^۲}{x^۲} = -cx.
\end{aligned}
$$

(ب)

$$
\begin{aligned}
& \quad (x - ۳y + ۳)dx - (۲x - ۶y + ۱)dy = ۰ \\
\Rightarrow & \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x - ۳y + ۳}{۲x - ۶y + ۱}
\end{aligned}
$$

حالت دوم $ae = bd$ اتفاق افتاده است.

تغییر متغیر

$$
\begin{aligned}
& z = x - ۳y \Rightarrow z' = ۱ - ۳y' \\
& \Rightarrow y' = \frac{۱ - z'}{۳} \\
& \Rightarrow \frac{۱ - z'}{۳} = \frac{z + ۳}{۲z + ۱} \\
& \Rightarrow z' = ۱ - \frac{۳z + ۹}{۲z + ۱} \\
& \Rightarrow z' = \frac{-z - ۸}{۲z + ۱} \\
& \Rightarrow \frac{۲z + ۱}{z + ۸}dz = dx \\
& \Rightarrow \frac{۲z + ۱۶ - ۱۶}{z + ۸}dz = dx \\
& \Rightarrow (۲ - \frac{۱۶}{z + ۸})dz = dx \qquad \text{انتگرال گیری} \\
& \Rightarrow \int (۲ - \frac{۱۶}{z + ۸})dz = \int dx \\
& \Rightarrow ۲z - ۱۶\ln(z + ۸) = x + c \\
& \Rightarrow ۲(x - ۳y) - ۱۶\ln|x - ۳y + ۸| = x + c.
\end{aligned}
$$

۶.۱.۶ پاسخ تمرین ۴۷.۱

(الف)

$$
\begin{aligned}
& yy' \sin x = \cos x(\sin x - y^۲) \\
& \Rightarrow z = y^۲ \Rightarrow z' = ۲yy' && \text{تغییر متغیر} \\
& \Rightarrow \tfrac{۱}{۲} z' \sin x = \cos x(\sin x - z) \\
& \Rightarrow \tfrac{۱}{۲} z' \sin x + (\cos x) z = \cos x \cdot \sin x && \text{معادله خطی مرتبه اول} \\
& \Rightarrow z' + ۲\tfrac{\cos x}{\sin x} z = ۲\cos x \\
& \Rightarrow \mu(x) = e^{\int ۲\frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{۲\ln(\sin x)} = (\sin x)^۲ \\
& \Rightarrow (\sin x)^۲ z' + ۲\sin x \cos x \cdot z = ۲\cos x \cdot (\sin x)^۲ \\
& \Rightarrow \frac{d(\sin^۲ x \cdot z)}{dx} = ۲\cos x(\sin x)^۲ \\
& \Rightarrow \sin^۲ x \times z = \int ۲\cos x \sin^۲ x dx \\
& \sin x = u, \Rightarrow \cos x dx = du \\
& \Rightarrow \sin^۲ x \cdot y^۲ = \int ۲u^۲ du = \tfrac{۲}{۳}u^۳ + c = \tfrac{۲}{۳}\sin^۳ x + c.
\end{aligned}
$$

(ب)

$$
\begin{aligned}
& (۱ + y^۲) + (x - e^{\tan^{-۱} y}) y' = ۰ \\
& z = \tan^{-۱} y \Rightarrow z' = \frac{y'}{۱+y^۲} && \text{تغییر متغیر} \\
& \Rightarrow ۱ + (x - e^{\tan^{-۱} y}) \frac{y'}{۱+y^۲} = ۰ && \text{بازنویسی} \\
& \Rightarrow ۱ + (x - e^z) z' = ۰ \\
& \times \frac{dx}{dz} = x' && \text{برای تغییر نقش} \\
& \Rightarrow x' + x - e^z = ۰ && \text{خطی مرتبه اول} \\
& \Rightarrow \mu(z) = e^{\int dz} = e^z \\
& \Rightarrow e^z x' + e^z x = e^{۲z} \\
& \Rightarrow \frac{d(e^z x)}{dz} = e^{۲z} && \text{انتگرال گیری} \\
& \Rightarrow e^z x = \int e^{۲z} dz = \tfrac{۱}{۲} e^{۲z} + c \\
& \Rightarrow e^{\tan^{-۱} y} x = \tfrac{۱}{۲} e^{۲\tan^{-۱} y} + c.
\end{aligned}
$$

(ج)

$$
\begin{aligned}
& xy' = e^{-xy} - y \\
& \Rightarrow z = xy \Rightarrow z' = y + xy' && \text{تغییر متغیر} \\
& \Rightarrow y + xy' = e^{-xy} \\
& \Rightarrow z' = e^z \Rightarrow e^{-z} dz = dx \\
& \Rightarrow -e^{-z} = x + c \Rightarrow -e^{-xy} = x + c.
\end{aligned}
$$

(د)

$$
\begin{aligned}
& y' = xy + ۲y\ln y \\
& \Rightarrow z = \ln y \Rightarrow z' = \frac{y'}{y} && \text{تغییر متغیر} \\
& \Rightarrow \frac{y'}{y} = x + ۲\ln y \\
& \Rightarrow z' = x + ۲z \Rightarrow z' - ۲z = x \\
& \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int ۲dx} = e^{-۲x} \\
& \Rightarrow d(e^{-۲x}z) = xe^{-۲x}dx \\
& \Rightarrow e^{-۲x}z = -\tfrac{۱}{۲}xe^{-۲x} + c \\
& \Rightarrow e^{-۲x}\ln y = -\tfrac{۱}{۲}e^{-۲x} + c.
\end{aligned}
$$

۷.۱.۶ پاسخ تمرین ۵۱.۱

(الف)

$$xy' + y = ۲y'x^{۲}\ln y \quad y(۱) = e$$

نسبت به y خطی نیست. ولی نسبت به x برنولی است. تغییر نقش می‌دهیم.

$$
\begin{aligned}
\times\frac{dx}{dy} \quad & \Rightarrow x + y\frac{dx}{dy} = ۲x^{۲}\ln y \\
& \Rightarrow y\frac{dx}{dy} + x = ۲\ln yx^{۲} \\
\times x^{-۲} \quad & \Rightarrow yx^{-۲}\frac{dx}{dy} + x^{-۱} = ۲\ln y \\
z = x^{-۱} \quad & \Rightarrow z' = \frac{-۱}{x^{۲}}\frac{dx}{dy} \\
& \Rightarrow -yz' + z = ۲\ln y \Rightarrow z' - \frac{۱}{y}z = -\frac{۲\ln y}{y} \\
& \Rightarrow \mu(y) = e^{-\int\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{۱}{y} \\
& \Rightarrow \frac{d(\frac{۱}{y}z)}{d(y)} = \frac{۱}{y}z' - \frac{۱}{y^{۲}}z = -۲\ln y \times \frac{۱}{y^{۲}} \\
& \Rightarrow \frac{۱}{y}z = -۲\int\frac{\ln y}{y^{۲}}dy \\
& \ln y = u \Rightarrow y = e^{u}, \frac{dy}{y} = du \\
& \Rightarrow \frac{۱}{y}z = -۲\int e^{-u}udu = -۲(-ue^{-u} - e^{-u}) + c && \text{جزء به جزء} \\
& \Rightarrow \frac{۱}{y}x^{-۱} = -۲(-\ln y \times \frac{۱}{y} - \frac{۱}{y}) + c && \text{جای‌گذاری متغیرها} \\
& y(۱) = e \Rightarrow \begin{matrix} x = ۱ \\ y = e \end{matrix} \Rightarrow && c \text{ را پیدا کنید}
\end{aligned}
$$

(ب)

$$xy'(x-۱+xe^y)=۱$$

تغییر نقش می‌دهیم $\Rightarrow x^۲y'-xy'+x^۲e^yy'=۱$

$\times\frac{dx}{dy}$ $\Rightarrow x^۲-x+x^۲e^y=\frac{dx}{dy}$

بازنویسی $\Rightarrow \frac{dx}{dy}+x=(۱+e^y)x^۲$ معادله برنولی

$$\Rightarrow z=x^{-۱}\Rightarrow x^{-۲}\frac{dx}{dy}+x^{-۱}=۱+e^y$$

$$\Rightarrow z'=-x^۲x'\Rightarrow -z'+z=۱+e^y$$

$\Rightarrow z'-z=-۱-e^y$ خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow \mu(y)=e^{-\int dy}=e^{-y}$$

$\Rightarrow \frac{d(e^{-y}z)}{dy}=e^{-y}z'-e^{-y}z=-e^{-y}-۱$ انتگرال گیری

$$\Rightarrow e^{-y}z=e^{-y}-y+c$$

$$\Rightarrow e^{-y}x^{-۱}=e^{-y}-y+c.$$

(ج)

$$ydx-(۲xy-e^{۲y})dy=۰$$

$$\Rightarrow y\frac{dx}{dy}-۲xy+e^{۲y}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}-۲x=-\frac{۱}{y}e^{۲y}$$

$$\Rightarrow \mu(y)=e^{-\int ۲dy}=e^{-۲y}$$

$$\Rightarrow \frac{d(e^{-۲y}x)}{dy}=-\frac{۱}{y}$$

$$\Rightarrow e^{-۲y}x=-\ln y+c.$$

۸.۱.۶ حل تمرین‌های مروری داده شده از فصل اول

(الف)

$$xdy=(x^۲y^۲(۱+e^x)-y)dx$$

$\div dx$ $\Rightarrow xy'+y=x^۲(۱+e^x)y^۲$ معادله برنولی

$\times y^{-۲}$ $\Rightarrow xy^{-۲}y'+y^{-۱}=x^۲(۱+e^x)$

$y^{-۱}=z$ $\Rightarrow -y^{-۲}y'=z'$

$$\Rightarrow -xz'+z=x^۲(۱+e^x)$$

$$\Rightarrow z'-\frac{۱}{x}z=-x(۱+e^x)$$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x}z'-\frac{۱}{x^۲}z=-۱-e^x$$

$$\Rightarrow d(\frac{۱}{x}z)=(-۱-e^x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x}z=-x-e^x+c$$

$$\Rightarrow y^{-۱}=-x^۲-xe^x+cx.$$

(ب)

$$ye^y = (y^۳ + ۲xe^y)y'$$

با تغییر نقش متغیر وابسته و مستقل معادله خطی می‌شود.

$$\begin{array}{lll}
\times \frac{dx}{dy} & \Rightarrow ye^y \frac{dx}{dy} = y^۳ + ۲xe^y & \\
& \Rightarrow ye^y \frac{dx}{dy} - ۲e^y x = y^۳ & \text{خطی مرتبه اول} \\
& \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{۲}{y}x = y^۲ e^{-y} & \\
& \Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\frac{۲}{y}dy} = y^{-۲} & \\
& \Rightarrow \frac{d(y^{-۲}x)}{dy} = y^{-۲}\frac{dx}{dy} - ۲y^{-۳}x = e^{-y} & \\
\text{انتگرال گیری} & \Rightarrow y^{-۲}x = \int e^{-y}dy = -e^{-y} + c & \\
& \Rightarrow x = -y^۲ e^{-y} + cy^۲. &
\end{array}$$

(ج)

$$(xy + y^۲)dx + (xy - x^۲)dy = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l}
M(x,y) = xy + y^۲ \Rightarrow M_y = x + ۲y \\
N(x,y) = xy - x^۲ \Rightarrow N_x = y - ۲x \\
R(y) = \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{x + ۲y - y + ۲x}{xy + y^۲}
\end{array}\right\} \quad \text{این روش جواب نداد!}$$

$$\begin{array}{lll}
& \Rightarrow y' = \frac{-xy - y^۲}{xy - x^۲} & \text{بازنویسی معادله} \\
\times \frac{۱}{x^۲} & \Rightarrow y' = \frac{-\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^۲}{\frac{y}{x} - ۱} & \text{معادله همگن} \\
z = \frac{y}{x} & \Rightarrow y = xz & \text{تغییر متغیر} \\
& \Rightarrow y' = z + xz', \quad z + xz' = \frac{-z - z^۲}{z - ۱} & \\
& \Rightarrow xz' = \frac{-z - z^۲ - z^۲ + z}{z - ۱} & \\
& \Rightarrow \frac{z - ۱}{۲z^۲}dz = -\frac{dx}{x} & \text{معادله جداشدنی} \\
& \Rightarrow (-\frac{۱}{۲}z^{-۱} - \frac{۱}{z^۲})dz = -\frac{dx}{x} & \\
& \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\ln z + \frac{۱}{z} = -\ln x + c & \\
& \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\ln\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\ln x + c. &
\end{array}$$

(د)

$$\begin{aligned}
& ۲xyy' + (۱+x)y^۲ = e^x \\
& y^۲ = z \Rightarrow ۲yy' = z' && \text{تغییر متغیر} \\
\Rightarrow\ & xz' + (۱+x)z = e^x && \text{خطی مرتبه اول} \\
\Rightarrow\ & z' + \tfrac{۱+x}{x}z = \tfrac{e^x}{x} \\
\Rightarrow\ & \mu(x) = e^{\int \frac{۱+x}{x}dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot e^{dx} = xe^x \\
\overset{\times\mu}{\Rightarrow}\ & xe^x z' + (۱+x)e^x z = e^{۲x} \\
\Rightarrow\ & \tfrac{d(xe^x z)}{dx} = e^{۲x} \\
\Rightarrow\ & xe^x z = \tfrac{۱}{۲}e^{۲x} + c && \text{انتگرال گیری} \\
\Rightarrow\ & z = \tfrac{۱}{۲}x^{-۱}e^x + cx^{-۱}e^{-x} \\
\Rightarrow\ & y^۲ = \tfrac{۱}{۲}x^{-۱}e^x + cx^{-۱}e^{-x}.
\end{aligned}$$

(ه)

$$\begin{aligned}
& & & y^۲ + (x^۲ - xy + y^۲)y' = ۰ \\
& & & \Rightarrow y' = -\tfrac{y^۲}{x^۲-xy+y^۲} = -\tfrac{(\frac{y}{x})^۲}{۱-(\frac{y}{x})+(\frac{y}{x})^۲} \\
& \tfrac{y}{x} = z & & \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz' && \text{معادله همگن} \\
& & & \Rightarrow z + xz' = \tfrac{-z^۲}{۱-z+z^۲} \\
& & & \Rightarrow xz' = \tfrac{z^۲}{۱-z+z^۲} - z \\
& xz' & & = \tfrac{-z^۲-z+z^۲-z^۳}{۱-z-z^۲} = -\tfrac{z^۳}{۱-z-z^۲} && \text{جداشدنی} \\
& & & \Rightarrow \tfrac{۱-z-z^۲}{z^۳}dz = -\tfrac{dx}{x} \\
& & & \Rightarrow \int \tfrac{۱}{z^۳}dz - \int \tfrac{۱}{z^۲}dz - \int \tfrac{dz}{z} = -\ln x + c \\
& & & \Rightarrow -\tfrac{۱}{۲}z^{-۲} + \tfrac{۱}{۱}z^{-۱} - \ln z = -\ln x + c \\
& & & \Rightarrow -\tfrac{۱}{۲}\tfrac{x^۲}{y^۲} + \tfrac{x}{y} - \ln\tfrac{y}{x} = -\ln x + c.
\end{aligned}$$

(ی)

$$\begin{aligned}
& (۲ + ۲x^۲y^{\frac{۱}{۲}})ydx + (x^۲y^{\frac{۱}{۲}} + ۲)xdy = ۰ \\
& \left.\begin{aligned} M(x,y) &= (۲ + ۲x^۲y^{\frac{۱}{۲}})y \Rightarrow M_y = ۲ + ۳x^۲y^{\frac{۱}{۲}} \\ N(x,y) &= (x^۲y^{\frac{۱}{۲}} + ۲)x \Rightarrow N_x = ۳x^۲y^{\frac{۱}{۲}} + ۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{معادله کامل است} \\
\Rightarrow\ & \exists\psi(x,y)\ \begin{aligned} \psi_x &= ۲y + ۲x^۲y^{\frac{۳}{۲}} \\ \psi_y &= x^۳y^{\frac{۱}{۲}} + ۲x\ (۱) \end{aligned} \\
\Rightarrow\ & \psi = ۲xy + \tfrac{۲}{۳}x^۳y^{\frac{۳}{۲}} + h(y) \\
\Rightarrow\ & \psi_y = ۲x + x^۳y^{\frac{۱}{۲}} + h'(y) \overset{(۱)}{=} x^۳y^{\frac{۱}{۲}} + ۲x \\
\Rightarrow\ & h'(y) = ۰ \\
\Rightarrow\ & h(y) = c_۱ \\
\Rightarrow\ & \psi(x,y) = ۲xy + \tfrac{۲}{۳}x^۳y^{\frac{۳}{۲}} = c.
\end{aligned}$$

(ر)

$$(x - y\ln y + y\ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = ۰$$

$$(x - y\ln\tfrac{y}{x})dx + x\ln\tfrac{y}{x}dy = ۰$$

همگن است
$$y' = \frac{-x+y\ln\frac{y}{x}}{x\ln\frac{y}{x}} = \frac{-۱+\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}}{\ln\frac{y}{x}}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \quad y = xz$$

$$\Rightarrow \quad y' = z + xz', \quad z + xz' = \frac{-۱+z\ln z}{\ln z}$$

$$\Rightarrow \quad xz' = \frac{-۱+z\ln z}{\ln z} - z$$

جداشدنی است
$$\Rightarrow \quad xz' = \frac{-۱+z\ln z - z\ln z}{\ln z}$$

$$\Rightarrow \quad \ln z dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \ln z dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad z\ln z - z = -\ln x + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -\ln x + c.$$

(ز)

$$ydx + (۲x - xy + ۲)dy = ۰$$

$$M = y \Rightarrow M_y = ۱$$

$$N = ۲x - xy + ۲ \quad \Rightarrow N_x = ۲ - y$$

$$R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{۱-۲+y}{-y} = \frac{-y+۱}{y} = -۱ + \frac{۱}{y}$$

عامل انتگرال ساز بر حسب y
$$\mu(y) = e^{\int R(y)dy} = e^{\int(-۱+\frac{۱}{y})dy}$$

$$\mu(y) = ye^{-y}$$

معادله $\times\, ye^{-y}$
$$y^۲e^{-y}dx + (۲x - xy + ۲)ye^{-y}dy = ۰$$

$$M(x,y) = y^۲e^{-y}$$

$$\Rightarrow M_y = ۲ye^{-y} - y^۲e^{-y}$$

$$N(x,y) = (۲x - xy + ۲)ye^{-y}$$

$$\Rightarrow N_x = ۲ye^{-y} - y^۲e^{-y}$$

معادله کامل است
$$\Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\psi(x,y)\begin{cases} \psi_x = y^۲e^{-y} & (۱) \\ \psi_y = ۲xye^{-y} - xy^۲e^{-y} + ۲ye^{-y} & (۲) \end{cases}$$

از (۱) انتگرال گیری می‌کنیم نسبت به x

$$\Rightarrow \psi(x,y) = \int y^۲e^{-y}dx = y^۲e^{-y}x + h(y)$$

از ψ نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\psi_y = ۲ye^{-y}x - y^۲e^{-y}x + h^{'}(y)$$

$$\begin{aligned}
(۲) \qquad & \Rightarrow ۲ye^{-y}x - y^۲e^{-y}x + h^{'}(y) = ۲xye^{-y} - xy^۲e^{-y} + ۲ye^{-y} \\
& \Rightarrow h^{'}(y) = ۲ye^{-y} \\
h(y) \quad & = \int ۲ye^{-y}dy = -۲ye^{-y} + ۲\int e^{-y}dy = -۲ye^{-y} - ۲e^{-y} \\
& \Rightarrow \psi(x,y) = y^۲e^{-y}x - ۲ye^{-y} - ۲e^{-y} = c.
\end{aligned}$$

(س)

$$\begin{aligned}
& ۲yy^{'} + y^۲\sin x - \sin x = ۰ \\
& z = y^۲ \Rightarrow z^{'} = ۲yy^{'} && \text{تغییر متغیر} \\
\Rightarrow \quad & z^{'} + \sin xz = \sin x && \text{خطی مرتبه اول} \\
\Rightarrow \quad & \mu(x) = e^{\int \sin xdx} = e^{-\cos x} \\
\Rightarrow \quad & e^{-\cos x}z^{'} + \sin xe^{-\cos x}z = \sin xe^{-\cos x} \\
\Rightarrow \quad & \frac{d(e^{-\cos x}z)}{dx} = \sin xe^{-\cos x} \\
\Rightarrow \quad & e^{-\cos x}z = \int \sin xe^{-\cos x}dx \\
& -\cos x = u \Rightarrow \sin xdx = du \\
\Rightarrow \quad & e^{-\cos x}z = \int e^u du = e^u + c \\
\Rightarrow \quad & e^{-\cos x}y^۲ = e^{-\cos x} + c.
\end{aligned}$$

۲.۶ پاسخ تمرین‌های فصل دوم

۱.۲.۶ پاسخ تمرین ۶۴.۲

(الف)

$$۲xy^{''} + (۱ - ۴x)y^{'} + (۲x - ۱)y = e^x$$

قدم اول حل معادله همگن نظیر یعنی:

$$۲xy^{''} + (۱ - ۴x)y^{'} + (۲x - ۱)y = ۰$$

مجموع ضرایب y''، y' و y صفر است. در نتیجه $y_1 = e^x$ یک جواب از معادله است. جواب دوم بالا را با استفاده از روش کاهش مرتبه به دست می‌آوریم.

$$y_2 = v(x)y_1 = v(x)e^x$$
$$v'(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

دقت: باید ضریب y'' را برابر یک کنیم. پس معادله به شکل $y'' + \frac{(1-4x)}{2x}y' + \frac{(2x-1)}{2x}y = 0$ است و $p(x) = \frac{1-4x}{2x}$.

$$v'(x) = \frac{1}{e^{2x}}e^{-\int \frac{1-4x}{2x}dx} = \frac{1}{e^{2x}}x^{\frac{-1}{2}} \cdot e^{2x}$$
$$v'(x) = x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow v(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow y_2 = 2x^{\frac{1}{2}}e^x$$
$$\Rightarrow c_1e^x + c_2e^xx^{\frac{1}{2}} \quad \text{جواب عمومی معادله همگن}$$

قدم دوم یافتن یک جواب از معادله غیر همگن
حال با استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1e^x + u_2x^{\frac{1}{2}}e^x$$
$$u_1' = \frac{-gy_2}{W(y_1,y_2)}, \quad u_2' = \frac{gy_1}{W(y_1,y_2)}$$

دقت: برای $g(x)$ در فرمول بالا باید ضریب y'' یک باشد. پس داریم

$$y'' + \frac{(1-4x)}{2x}y' + \frac{(2x-1)}{2x}y = g(x) = \frac{1}{2}x^{-1}e^x$$
$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x^{\frac{1}{2}}e^x \\ e^x & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^x + x^{\frac{1}{2}}e^x \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x} + x^{\frac{1}{2}}e^{2x} - x^{\frac{1}{2}}e^{2x}$$
$$\Rightarrow W(y_1,y_2) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow u_1' = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1}e^x \times 2x^{\frac{1}{2}}e^x}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}} = -2\\
&u_1 = -2x\\
&\Rightarrow u_2' = \frac{\frac{1}{2}x^{-1}e^x \times e^x}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}} = x^{\frac{-1}{2}}\\
&u_2 = 2x^{\frac{1}{2}}\\
&\Rightarrow y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -2xe^x + 2x^{\frac{1}{2}} \times 2x^{\frac{1}{2}}e^x\\
&y_p = 2xe^x\\
&y = c_1e^x + c_2x^{\frac{1}{2}}e^x + 2xe^x \quad \text{جواب عمومی}
\end{aligned}$$

(ب)

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = 12x$$

قدم اول حل معادله $x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$ این یک معادله اویلر است و دیدیم که با تغییر متغیر $z = \ln x$ به معادله با ضرایب ثابت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

معادله شاخص

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

دقت: ضریب y^2 یک است و $\alpha = 7$ و $\beta = 5$.

$$\begin{aligned}
&r^2 + 6r + 5 = 0 \Rightarrow (r+1)(r+5) = 0\\
&\Rightarrow r_1 = -1, \quad r_2 = -5\\
&y_1 = e^{-z}, \quad y_2 = e^{-5z}\\
&y_1 = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad y_2 = e^{-5\ln x} = \frac{1}{x^5}
\end{aligned}$$

قدم دوم: یافتن یک جواب از معادله غیر همگن

$$\begin{aligned}
&y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1x^{-1} + u_2x^{-5}\\
&u_1' = \frac{-gy_2}{W(y_1,y_2)}, \quad u_2' = \frac{gy_1}{W(y_1,y_2)}
\end{aligned}$$

دقت: برای قرار دادن g در فرمول‌های بالا ضریب y'' باید یک باشد. پس

$$\begin{aligned}
&g(x) = \frac{۱۲x}{x^۲} = ۱۲x^{-۱}\\
&W(y_۱, y_۲) = \begin{vmatrix} x^{-۱} & x^{-۵} \\ -x^{-۲} & -۵x^{-۶} \end{vmatrix} = -۵x^{-۷} + x^{-۷} = -۴x^{-۷}\\
&u_۱' = \frac{-۱۲x^{-۱} \times x^{-۵}}{-۴x^{-۷}} = ۳x \Rightarrow u_۱ = \frac{۳}{۲}x^۲\\
&u_۲' = \frac{۱۲x^{-۱} \times x^{-۱}}{-۴x^{-۷}} = ۳x^۵ \Rightarrow u_۲ = \frac{۳}{۶}x^۶\\
&y_p = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}x^۶ x^{-۵} = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}x = ۲x\\
&y = c_۱x^{-۱} + c_۲x^{-۵} + ۲x \quad \text{جواب عمومی}
\end{aligned}$$

۲.۲.۶ پاسخ تمرین ۷۳.۲

یادآوری

$$ay'' + by' + cy = g(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x \\ \text{یا} \\ e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x \end{cases}$$

فرم کلی یک جواب خاص به صورت زیر است.

$$y_p = x^s e^{\alpha x} \left[\cos \beta x (A_۰ x^n + \cdots + A_n) + \sin \beta x (B_۰ x^n + \cdots + B_n)\right].$$

n مرتبه چند جمله‌ای در $g(x)$ است.
$s = ۰$ اگر $\alpha + i\beta$ ریشه معادله شاخص $ar^۲ + br + c = ۰$ نباشد.
$s = ۱$ اگر $\alpha + i\beta$ ریشه معادله شاخص با تکرار یک باشد.
$s = ۲$ اگر $\alpha\beta = ۰$ ریشه معادله شاخص با تکرار دو (ریشه مضاعف) باشد.

(الف)

$$\begin{aligned}
&y'' + ۹y = ۳۶x \cos ۳x + ۲e^x \sinh x\\
\Rightarrow\quad &r^۲ + ۹ = ۰ \qquad \text{معادله شاخص}\\
\Rightarrow\quad &r^۲ = -۹ \Rightarrow r = \pm ۳i\\
&g(x) = ۳۶x \cos ۳x + ۲e^x \times \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = ۳۶x \cos ۳x + e^{۲x} - ۱
\end{aligned}$$

(۱)
$$y'' + ۹y = ۳۶x\cos ۳x,\quad \begin{array}{l}\alpha = ۰, \beta = ۳, n = ۱\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۳\mathrm{i}\end{array} \Rightarrow$$ ریشه است $s = ۱$

$$y_{p_۱} = x^s e^{\alpha x}\left[\cos ۳x(Ax + B) + \sin ۳x(Cx + D)\right]$$
$$\Rightarrow \quad y_{p_۱} = x\left[\cos ۳x(Ax + B) + \sin ۳x(Cx + D)\right]$$

(۲)
$$y'' + ۹y = e^{۲x},\quad \begin{array}{l}\alpha = ۲, \beta = ۰, n = ۰\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۲\end{array} \Rightarrow$$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۲} = e^{۲x}\left[\cos ۰x(E) + \sin ۰x(F)\right] = Ee^{۲x}$$

(۳)
$$y'' + ۹y = -۱,\quad \begin{array}{l}\alpha = ۰, \beta = ۰, n = ۰\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۰\end{array} \Rightarrow$$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۳} = G$$

$$y_p = y_{p_۱} + y_{p_۲} + y_{p_۳} = G + Ee^{۲x} + x(\cos ۳x(Ax+B) + \sin ۳x(Cx+D)).$$

(ب)
$$y'' - ۲y' + ۳y = x^۳ + e^x \cos ۲x + (\sin \sqrt{۲}x)\sinh x$$
$$\Rightarrow \quad r^۲ - ۲r + ۳ = ۰$$ معادله شاخص
$$\Rightarrow \quad r^۲ = ۱ \pm \sqrt{۱ - ۳} \Rightarrow r = ۱ \pm \sqrt{۲}\mathrm{i}$$

(۱)
$$y'' - ۲y' + ۳y = x^۳,\quad \begin{array}{l}\alpha = ۰, \beta = ۰, n = ۳\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۰\end{array} \Rightarrow$$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۱} = Ax^۳ + Bx^۲ + Cx + D$$

(۲)
$$y'' - ۲y' + ۳y = e^x \cos ۲x,\quad \begin{array}{l}\alpha = ۱, \beta = ۲, n = ۰\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۱ + ۲\mathrm{i}\end{array} \Rightarrow$$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۲} = e^x\left[E\cos ۲x + F\sin ۲x\right]$$

(۳)
$$y'' - ۲y' + ۳y = \tfrac{۱}{۲}e^x \sin \sqrt{۲}x,\quad \begin{array}{l}\alpha = ۱, \beta = \sqrt{۲}, n = ۰\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۱ + \mathrm{i}\sqrt{۲}\end{array} \Rightarrow$$ ریشه است $s = ۱$

$$y_{p_۳} = xe^x(G\cos \sqrt{۲}x + H\sin \sqrt{۲}x)$$

(۴)
$$y'' - ۲y' + ۳y = \tfrac{۱}{۲}e^{-x} \sin \sqrt{۲}x,\quad \begin{array}{l}\alpha = -۱, \beta = \sqrt{۲}, n = ۰\\ \alpha + \mathrm{i}\beta = -۱ + \mathrm{i}\sqrt{۲}\end{array} \Rightarrow$$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۴} = e^{-x}(I\cos \sqrt{۲}x + J\sin \sqrt{۲}x)$$

$$y'' + ۲y' + ۲y = e^x \sin^۲ \frac{x}{۲} \cosh ۲x = e^x (\frac{۱-\cos x}{۲})(\frac{e^{۲x}+e^{-۲x}}{۲})$$
$$= \frac{۱}{۴}e^{۳x} + \frac{۱}{۴}e^{-x} - \frac{۱}{۴}e^{۳x}\cos x - \frac{۱}{۴}e^{-x}\cos x$$
$$\Rightarrow \quad r^۲ + ۲r + ۲ = ۰$$ معادله شاخص
$$\Rightarrow \quad r = -۱ \pm \mathrm{i}$$

(ج) (۱) $y'' + ۲y' + ۲y = \frac{۱}{۴}e^{۳x}, \quad \begin{matrix} \alpha = ۳, \beta = ۰, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۳ \end{matrix} \quad \Rightarrow$ ریشه نیست $s = ۰$

$y_{p_۱} = Ae^{۳x}$

(۲) $y'' + ۲y' + ۲y = \frac{۱}{۴}e^{-x}, \quad \begin{matrix} \alpha = -۱, \beta = ۰, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = -۱ \end{matrix} \quad \Rightarrow$ ریشه نیست $s = ۰$

$y_{p_۲} = Be^{-x}$

(۳) $y'' + ۲y' + ۲y = -\frac{۱}{۴}e^{۳x}\cos x, \quad \begin{matrix} \alpha = ۳, \beta = ۱, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۳ + \mathrm{i} \end{matrix} \quad \Rightarrow$ ریشه نیست $s = ۰$

$y_{p_۳} = e^{۳x}(C\cos x + D\sin x)$

(۴) $y'' + ۲y' + ۲y = -\frac{۱}{۴}e^{-x}\cos x, \quad \begin{matrix} \alpha = -۱, \beta = ۱, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = -۱ + \mathrm{i} \end{matrix} \quad \Rightarrow$ ریشه است $s = ۱$

$y_{p_۴} = xe^{-x}(E\cos x + F\sin x)$

$$y_p = y_{p_۱} + y_{p_۲} + y_{p_۳} + y_{p_۴} = \dots.$$

(د)
$$y'' + ۲y' + ۵y = ۲e^{-x}\sin^۲ x = ۲e^{-x}(\frac{۱-\cos x}{۲})$$
$$\Rightarrow \quad r^۲ + ۲r + ۵ = ۰$$ معادله شاخص
$$\Rightarrow \quad r = -۱ \pm ۲\mathrm{i}$$

(۱) $y'' + ۲y' + ۵y = e^{-x}, \quad \begin{matrix} \alpha = -۱, \beta = ۰, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = -۱ \end{matrix} \quad \Rightarrow$ ریشه نیست $s = ۰$

$y_{p_۱} = Ae^{-x}$

(۲) $y'' + ۲y' + ۵y = e^{-x}\cos ۲x, \quad \begin{matrix} \alpha = -۱, \beta = ۲, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = -۱ + ۲\mathrm{i} \end{matrix} \quad \Rightarrow$ ریشه است $s = ۱$

$y_{p_۲} = xe^{-x}(B\cos ۲x + C\sin ۲x)$

$$y_p = y_{p_۱} + y_{p_۲} = Ae^{-x} + xe^{-x}(B\cos ۲x + C\sin ۲x).$$

$$y'' - ۲y' + ۵y = ۲x^۲ e^x \cos^۲ x + ۱ = ۲x^۲ e^x (\frac{۱+\cos ۲x}{۲})$$

(۰) $\Rightarrow \quad r^۲ - ۲r + ۵ = ۰$ معادله شاخص

$\Rightarrow \quad r = ۱ \pm ۲\mathrm{i}$

(۱) $y'' - ۲y' + ۵y = x^۲ e^x, \quad \begin{array}{l} \alpha = ۱, \beta = ۰, n = ۲ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۱ \end{array} \Rightarrow$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۱} = e^x (Ax^۲ + Bx + C)$$

(۲) $y'' - ۲y' + ۵y = x^۲ e^x \cos ۲x, \quad \begin{array}{l} \alpha = ۱, \beta = ۲, n = ۲ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۱ + ۲\mathrm{i} \end{array} \Rightarrow$ ریشه است $s = ۱$

$$y_{p_۲} = xe^x (\cos ۲x (Ex^۲ + Fx + G) + \sin ۲x (Hx^۲ + Ix + J))$$

(۳) $y'' - ۲y' + ۵y = ۱, \quad \begin{array}{l} \alpha = ۰, \beta = ۰, n = ۰ \\ \alpha + \mathrm{i}\beta = ۰ \end{array} \Rightarrow$ ریشه نیست $s = ۰$

$$y_{p_۳} = K$$

$$y_p = y_{p_۱} + y_{p_۲} + y_{p_۳} = \ldots.$$

دقت کنید، اگر در این مسائل جواب عمومی معادله خواسته شود باید به y_p جواب عمومی معادله همگن را نیز اضافه کنیم.

۳.۶ حل تمرین‌های فصل سوم

۱.۳.۶ پاسخ تمرین ۴۳.۳

قسمت (ب)

$$\begin{aligned}
& \mathscr{L}[\int_{\circ}^{x} e^{-\text{۳}t}\frac{\text{۱}-e^{-t}}{t}dt] \\
& \int_{\circ}^{x} e^{-\text{۳}t}\frac{\text{۱}-e^{-t}}{t}dt = f(x) \Rightarrow \\
f'(x) &= e^{-\text{۳}x}\frac{\text{۱}-e^{-x}}{x} = \frac{e^{-\text{۳}x}-e^{-\text{۴}x}}{x} \quad \text{قضیه اساسی حساب} \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= s\mathscr{L}[f(x)] - f(\circ) \quad f(\circ) = \circ \;\; \text{۲۷.۳} \Rightarrow \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \mathscr{L}[f'(x)] \times \frac{\text{۱}}{s} \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= \mathscr{L}[\frac{e^{-\text{۳}x}-e^{-\text{۴}x}}{x}] \\
&= \int_{s}^{\infty} \mathscr{L}[e^{-\text{۳}x} - e^{-\text{۴}x}]du \quad \text{۳۹.۳} \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= \int_{s}^{\infty}(\frac{\text{۱}}{u+\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{u+\text{۴}})du \\
&= \ln|\frac{u+\text{۳}}{u+\text{۴}}|\Bigg|_{s}^{\infty} \\
\mathscr{L}[f'(x)] &= \ln|\frac{s+\text{۴}}{s+\text{۳}}| \Rightarrow \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{\text{۱}}{s}\ln|\frac{s+\text{۴}}{s+\text{۳}}|.
\end{aligned}$$

۲.۳.۶ پاسخ تمرین ۶۰.۳

قسمت (ب)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \sin x & \circ \le x < \frac{\pi}{\text{۶}} \\ \cos \text{۲}x & x \ge \frac{\pi}{\text{۶}} \end{cases} \\
f(x) &= \sin x(U_{\circ}(x) - U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)) + \cos \text{۲}xU_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x) \\
f(x) &= \sin x + U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\cos \text{۲}x - U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\sin x \\
f(x) &= \sin x + U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\cos(\text{۲}(x - \frac{\pi}{\text{۶}} + \frac{\pi}{\text{۶}})) - U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\sin(x - \frac{\pi}{\text{۶}} + \frac{\pi}{\text{۶}}) \\
f(x) &= \sin x + U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\cos \text{۲}(x - \frac{\pi}{\text{۶}})\cos\frac{\pi}{\text{۳}} - U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\sin \text{۲}(x - \frac{\pi}{\text{۶}})\sin\frac{\pi}{\text{۳}} \\
& -U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\sin(x - \frac{\pi}{\text{۶}})\cos\frac{\pi}{\text{۶}} - U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\cos(x - \frac{\pi}{\text{۶}})\sin\frac{\pi}{\text{۶}} \Rightarrow \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \mathscr{L}[\sin x] + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\mathscr{L}[U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\cos \text{۲}(x - \frac{\pi}{\text{۶}})] - \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}\mathscr{L}[U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\sin \text{۲}(x - \frac{\pi}{\text{۶}})] \\
& -\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}\mathscr{L}[U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\sin(x - \frac{\pi}{\text{۶}})] - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\mathscr{L}[U_{\frac{\pi}{\text{۶}}}(x)\cos(x - \frac{\pi}{\text{۶}})] \Rightarrow \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{\text{۱}}{s^{\text{۲}}+\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}e^{-\frac{\pi}{\text{۶}}s}\frac{s}{s^{\text{۲}}+\text{۴}} - \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}e^{-\frac{\pi}{\text{۶}}s}\frac{\text{۲}}{s^{\text{۲}}+\text{۴}} \\
& -\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}e^{-\frac{\pi}{\text{۶}}s}\frac{\text{۱}}{s^{\text{۲}}+\text{۱}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}e^{-\frac{\pi}{\text{۶}}s}\frac{s}{s^{\text{۲}}+\text{۱}}
\end{aligned}$$

۳.۳.۶ پاسخ تمرین ۳۰.۳

قسمت (ب)

$y'' - ۳y' + ۲y = e^{-x} \quad y(۲) = ۰,\ y'(۲) = ۱$
$\mathscr{L}[y''] - ۳\mathscr{L}[y'] + ۲\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{-x}]$ ۱۷.۳
$s^۲\mathscr{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) - ۳s\mathscr{L}[y] + ۳y(۰) + ۲\mathscr{L}[y] = \frac{۱}{s+۱}$
قرار می‌دهیم$c_۱ := y(۰)$ و $c_۲ := y'(۰)$.
$(s^۲ - ۳s + ۲)\mathscr{L}[y] - (s - ۳)c_۱ - c_۲ = \frac{۱}{s+۱}$
$(s^۲ - ۳s + ۲)\mathscr{L}[y] = \frac{۱}{s+۱} + c_۲ + (s - ۳)c_۱$
$\mathscr{L}[y] = \frac{۱}{(s+۱)(s^۲-۳s+۲)} + \frac{c_۲}{s^۲-۳s+۲} + \frac{(s-۳)c_۱}{s^۲-۳s+۲}$
$\frac{۱}{(s+۱)(s^۲-۳s+۲)} = \frac{A}{s+۱} + \frac{B}{s-۱} + \frac{C}{s-۲}$ تفکیک کسر اول
$\Rightarrow A = \frac{۱}{۶},\quad B = -\frac{۱}{۲},\quad C = \frac{۱}{۳}$
$\frac{c_۱s+c_۲-۳c_۱}{s^۲-۳s+۲} = \frac{D}{s-۱} + \frac{E}{s-۲}$ تفکیک کسر دو م و سوم
$\Rightarrow D = ۲c_۱ - c_۲,\quad E = c_۲ - c_۱$

حالا از رابطه

$$\mathscr{L}[y] = \frac{۱}{(s+۱)(s^۲ - ۳s + ۲)} + \frac{c_۲}{s^۲ - ۳s + ۲} + \frac{(s - ۳)c_۱}{s^۲ - ۳s + ۲}$$

لاپلاس وارون می‌گیریم.

$$y = \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{(s + ۱)(s^۲ - ۳s + ۲)}] + \mathscr{L}^{-۱}[\frac{c_۱s - ۳c_۱ + c_۲}{s^۲ - ۳s + ۲}]$$

با توجه به تفکیک کسرهای انجام شده، خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{۱}{۶}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}] - \tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s-۱}] + \tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s-۲}] \\ &\quad + (۲c_۱ - c_۲)\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s-۱}] + (c_۲ - c_۱)\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s-۲}] \\ y &= \tfrac{۱}{۶}e^{-x} - \tfrac{۱}{۲}e^{x} + \tfrac{۱}{۳}e^{۲x} + (۲c_۱ - c_۲)e^{x} + (c_۲ - c_۱)e^{۲x} \\ y &= \tfrac{۱}{۶}e^{-x} + (۲c_۱ - c_۲ - \tfrac{۱}{۲})e^{x} + (c_۲ - c_۱ + \tfrac{۱}{۳})e^{۲x} \end{aligned}$$

شرایط اولیه $y(۲) = ۰$, $y'(۲) = ۱$ را اعمال می‌کنیم تا $c_۱$ و $c_۲$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} y(۲) &= \tfrac{۱}{۶}e^{-۲} + (۲c_۱ - c_۲ - \tfrac{۱}{۲})e^{۲} + (c_۲ - c_۱ + \tfrac{۱}{۳})e^{۴} = ۰ \\ y'(x) &= -\tfrac{۱}{۶}e^{-x} + (۲c_۱ - c_۲ - \tfrac{۱}{۲})e^{x} + ۲(c_۲ - c_۱ + \tfrac{۱}{۳})e^{۲x} \\ y'(۲) &= -\tfrac{۱}{۶}e^{-۲} + (۲c_۱ - c_۲ - \tfrac{۱}{۲})e^{۲} + ۲(c_۲ - c_۱ + \tfrac{۱}{۳})e^{۴} = ۱ \end{aligned}$$

دو معادله دو مجهول را حل می‌کنیم و $c_۱$ و $c_۲$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} (۲e^{۲} - e^{۴})c_۱ + (e^{۴} - e^{۲})c_۲ = \tfrac{۱}{۲}e^{۲} - \tfrac{۱}{۶}e^{-۲} - \tfrac{۱}{۳}e^{۴} \\ (۲e^{۲} - ۲e^{۴})c_۱ + (۲e^{۴} - e^{۲})c_۲ = \tfrac{۱}{۲}e^{۲} + \tfrac{۱}{۶}e^{-۲} - \tfrac{۲}{۳}e^{۴} \end{cases}$$

قسمت (ج)

$$\begin{aligned} & y'' + y' - ۲y = x \quad y(۰) = ۲,\ y'(۰) = ۰ \\ & \mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[y'] - ۲\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[x] \\ & s^{۲}\mathscr{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) + s\mathscr{L}[y] - y(۰) - ۲\mathscr{L}[y] = \tfrac{۱}{s^{۲}} \\ & (s^{۲} + s - ۲)\mathscr{L}[y] - ۲(s + ۱) = \tfrac{۱}{s^{۲}} \\ & (s^{۲} + s - ۲)\mathscr{L}[y] = \tfrac{۱}{s^{۲}} + ۲s + ۲ = \tfrac{۱ + ۲s^{۳} + ۲s^{۲}}{s^{۲}} \\ & \mathscr{L}[y] = \tfrac{۲s^{۳} + ۲s^{۲} + ۱}{s^{۲}(s^{۲} + s - ۲)} \\ & \tfrac{۲s^{۳} + ۲s^{۲} + ۱}{s^{۲}(s^{۲} + s - ۲)} = \tfrac{۲s^{۳} + ۲s^{۲} + ۱}{s^{۲}(s - ۱)(s + ۲)} \\ & = \tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{s - ۱} + \tfrac{C}{s + ۲} + \tfrac{D}{s^{۲}} \\ & \Rightarrow A = -\tfrac{۱}{۴},\ \ B = \tfrac{۵}{۳},\ \ C = \tfrac{۷}{۱۲},\ D = -\tfrac{۱}{۲} \\ & \Rightarrow y = -\tfrac{۱}{۴}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s}] + \tfrac{۵}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s - ۱}] + \tfrac{۷}{۱۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s + ۲}] - \tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s^{۲}}] \\ & \Rightarrow y = \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۵}{۳}e^{x} + \tfrac{۷}{۱۲}e^{-۲x} - \tfrac{۱}{۲}x \end{aligned}$$

۴.۳.۶ پاسخ تمرین ؟؟

قسمت (؟)

$$\begin{aligned}
y(x) &= x - \int_{۰}^{x} e^{x-t} y(t)dt \\
\mathscr{L}[y] &= \mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[\int_{۰}^{x} e^{(x-t)} y(t)dt] \\
\mathscr{L}[y] &= \mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[e^{x} * y(x)] \;\; ؟؟ \\
\mathscr{L}[y] &= \frac{۱}{s^{۲}} - \mathscr{L}[e^{x}] \times \mathscr{L}[y] \\
\mathscr{L}[y] &= \frac{۱}{s^{۲}} - \frac{۱}{s-۱}\mathscr{L}[y] \\
\mathscr{L}[y](۱ + \frac{۱}{s-۱}) &= \frac{۱}{s^{۲}} \\
\mathscr{L}[y](\frac{s}{s-۱}) &= \frac{۱}{s^{۲}} \\
\mathscr{L}[y] &= \frac{s-۱}{s^{۳}} = \frac{۱}{s^{۲}} - \frac{۱}{s^{۳}} \\
y &= \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{۲}}] - \mathscr{L}^{-۱}[\frac{۱}{s^{۳}}] \\
y &= x - \frac{x^{۲}}{۲}.
\end{aligned}$$

۵.۳.۶ پاسخ تمرین ؟؟

قسمت (؟)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[x^{۲} e^{-۲x} \cos^{۲} ۴x] &= \mathscr{L}[x^{۲} e^{-۲x} \frac{۱+\cos ۸x}{۲}] \\
&= \mathscr{L}[\frac{۱}{۲} x^{۲} e^{-۲x}] + \mathscr{L}[\frac{۱}{۲} x^{۲} e^{-۲x} \cos ۸x]
\end{aligned}$$

می‌دانیم که $\mathscr{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$ (خاصیت ۴۶.۳) همچنین $\mathscr{L}[x^{۲} f(x)] = \frac{d^{۲}}{ds^{۲}} F(s)$ (خاصیت ۳۱.۳)

در نتیجه با استفاده از این دو خاصیت داریم:

$$\begin{aligned}
L &= \mathscr{L}[x^۲]|_{s\mapsto s+۲} + \tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}[x^۲\cos ۸x]|_{s\mapsto s+۲}\\
L &= \tfrac{۱}{۲}\tfrac{۲}{(s+۲)^۳} + \tfrac{۱}{۲}\tfrac{d^۲}{ds^۲}\mathscr{L}[\cos ۸x]|_{s\mapsto s+۲}\\
\mathscr{L}[\cos ۸x] &= \tfrac{s}{s^۲+۶۴} \Rightarrow\\
\tfrac{d}{ds}(\tfrac{s}{s^۲+۶۴}) &= \tfrac{s^۲+۶۴-۲s^۲}{(s^۲+۶۴)^۲}\\
\tfrac{d^۲}{ds^۲}\mathscr{L}[\cos ۸x] &= \tfrac{d}{ds}[\tfrac{۶۴-s^۲}{(s^۲+۶۴)^۲}]\\
&= \tfrac{-۲s(s^۲+۶۴)^۲-۴s(s^۲+۶۴)(۶۴-s^۲)}{(s^۲+۶۴)^۴} \quad \text{ساده سازی}\\
\tfrac{d^۲}{ds^۲}\mathscr{L}[\cos ۸x] &= \tfrac{۲s^۳-۳۸۴s}{(s^۲+۶۴)^۳} \Rightarrow\\
L &= \tfrac{۱}{(s+۲)^۳} + \tfrac{(s+۲)^۳-۱۹۴(s+۲)}{((s+۲)^۲+۶۴)^۳}.
\end{aligned}$$

۶.۳.۶ پاسخ تمرین ۸.۳

قسمت (ج)

$$y'' + ۲y' + y = \begin{cases} ۲ & ۰ \le x < ۵ \\ \delta(x-۶) & x \ge ۵ \end{cases} \qquad y(۰) = y'(۰) = ۰$$

$$\begin{aligned}
&s^۲\mathscr{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) + ۲s\mathscr{L}[y] - ۲y(۰) + \mathscr{L}[y] = F(s)\\
&(s^۲+۲s+۱)\mathscr{L}[y] = F(s)
\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & ۰ \le x < ۵ \\ \delta(x-۶) & x \ge ۵ \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & f(x) = ۲(U_۰(x) - U_۵(x)) + \delta(x-۶)U_۵(x)\\
& F(s) = \mathscr{L}[f(x)] = \tfrac{۲}{s} - ۲\tfrac{e^{-۵s}}{s} + \mathscr{L}[\delta(x-۶)U_۵(x)]\\
\Rightarrow\quad & F(s) = \tfrac{۲}{s} - ۲\tfrac{e^{-۵s}}{s} + e^{-۶s}U_۵(۶)\\
& \mathscr{L}[\delta(x-۶)U_۵(x)] \overset{?}{=} e^{-۶s}U_۵(۶) \quad \text{دلیل اینکه}
\end{aligned}$$

طبق قضیه‌ای می‌دانیم که

$$\int_{\circ}^{\infty} f(x)\delta(x-x_{\circ})dx = f(x_{\circ})$$

پس

$$\mathscr{L}[\delta(x-۶)U_۵(x)] = \int_{\circ}^{\infty} \delta(x-۶)e^{-sx}U_۵(x)dx = e^{-۶s}U_۵(۶)$$

اما $U_۵(۶) = ۱$ پس در نهایت داریم از تساوی $(s^۲+۲s+۱)\mathscr{L}[y] = F(s)$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[y] = \tfrac{۱}{(s^۲+۲s+۱)}(\tfrac{۲}{s} - \tfrac{۲e^{-۵s}}{s} + e^{-۶s})\\
&s^۲+۲s+۱ = (s+۱)^۲\\
&\tfrac{۱}{s(s+۱)^۲} = \tfrac{a}{s} + \tfrac{B}{s+۱} + \tfrac{C}{(s+۱)^۲}\\
&\Rightarrow A = ۱,\quad B = -۱,\quad C = -۱
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s(s+۱)^۲}] - ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۵s}}{s(s+۱)^۲}] + \mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۶s}}{(s+۱)^۲}]\\
y &= ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s}] - ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}] - ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{(s+۱)^۲}]\\
&-۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۵s}}{s}] - ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۵s}}{s+۱}] - ۲\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۵s}}{(s+۱)^۲}]\\
&+\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۶s}}{(s+۱)^۲}]\\
y &= ۲ - ۲e^{-x} - ۲e^{-x}x - ۲U_۵(x) - ۲U_۵(x)e^{-(x-۵)}\\
&-۲U_۵(x)e^{-(x-۵)}(x-۵) + U_۶(x)(x-۶)e^{-(x-۶)}.
\end{aligned}$$

۷.۳.۶ پاسخ تمرین ۸.۳

قسمت (الف)

$$y'' + ۴y = (۱+U_\pi(x))\sin x \quad y(\circ) = y'(\circ) = \circ$$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[y''] + ۴\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\sin x] + \mathscr{L}[U_\pi(x)\sin x]\\
&s^۲\mathscr{L}[y] - sy(\circ) - y'(\circ) + ۴\mathscr{L}[y] = \tfrac{۱}{s^۲+۱} + \mathscr{L}[U_\pi(x)\sin(x-\pi+\pi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s^۲+۴)\mathscr{L}[y] &= \tfrac{۱}{s^۲+۱}+\mathscr{L}[-U_\pi(x)\sin(x-\pi)]\\
(s^۲+۴)\mathscr{L}[y] &= \tfrac{۱}{s^۲+۱}-e^{-\pi s}\mathscr{L}[\sin x] \quad ۵۶.۳\\
(s^۲+۴)\mathscr{L}[y] &= \tfrac{۱}{s^۲+۱}-e^{-\pi s}\tfrac{۱}{s^۲+۱}\\
\mathscr{L}[y] &= \tfrac{۱}{(s^۲+۱)(s^۲+۴)}-\tfrac{e^{-\pi s}}{(s^۲+۱)(s^۲+۴)}\\
\tfrac{۱}{(s^۲+۱)(s^۲+۴)} &= \tfrac{AS+B}{(s^۲+۱)}+\tfrac{CS+D}{(s^۲+۴)} \Rightarrow\\
& A=۰,\quad B=\tfrac{۱}{۳},\quad C=۰,\quad D=-\tfrac{۱}{۳}\\
y &= \tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s^۲+۱}]-\tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s^۲+۴}]\\
& -\tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-\pi s}}{s^۲+۱}]+\tfrac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-\pi s}}{s^۲+۴}]\\
y &= \tfrac{۱}{۳}\sin x-\tfrac{۱}{۶}\sin ۲x-\tfrac{۱}{۳}U_\pi(x)\sin(x-\pi)\\
& +\tfrac{۱}{۶}U_\pi(x)\sin ۲(x-\pi).
\end{aligned}$$

۸.۳.۶ پاسخ تمرین ۴۳.۳

(الف)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\tfrac{\sinh ax}{x}] &= \int_s^\infty \mathscr{L}[\sinh ax]du\\
&= \int_s^\infty \tfrac{a}{u^۲-a^۲}du\\
&= \int_s^\infty \tfrac{۱}{a}\tfrac{du}{(\frac{u}{a})^۲-۱}\\
& \quad \tfrac{u}{a}=t,\quad \tfrac{du}{a}=dt\\
& \quad u=s\Rightarrow t=\tfrac{s}{a}\\
& \quad u\to\infty\Rightarrow t\to\infty\\
&= \int_{\frac{s}{a}}^\infty \tfrac{dt}{t^۲-۱}\\
&= -\tanh^{-۱}t|_{\frac{s}{a}}^\infty\\
&= -۱+\tanh^{-۱}\tfrac{s}{a}.
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\int_۰^x e^{-۳t}\tfrac{۱-e^{-t}}{t}dt] &= F(s)\\
\int_۰^x e^{-۳t}\tfrac{e^{-۳t}-e^{-۴t}}{t}dt &= f(x)\\
\text{قضیه اساسی} &\Rightarrow f'(x)=\tfrac{e^{-۳t}-e^{-۴t}}{t}\\
\mathscr{L}[f'(x)] &= s\mathscr{L}[f(x)]-f(۰) \quad ۲۷.۳
\end{aligned}$$

در این مثال خاص از خاصیت ۷۰.۳ هم می‌شود مستقیما نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}\mathscr{L}[\frac{e^{-3x}-e^{-4x}}{x}]\\
\Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathscr{L}[e^{-3x}-e^{-4x}]du\\
\Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}\lim_{A\to\infty}[(\int_s^A(\frac{1}{u+3}-\frac{1}{u+4})du]\\
\Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}lim_{A\to\infty}[\ln(u+3)-\ln(u+4)]_s^A\\
\Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}lim_{A\to\infty}[\ln(\frac{A+3}{A+4})-\ln(\frac{s+3}{s+4})]\\
\Rightarrow \mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}\ln(\frac{s+4}{s+3}).
\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^3(s^2+1)^2}]\\
&\frac{1}{s^3(s^2+1)^2} = \frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{Ds+E}{(s^2+1)^2}+\frac{Fs+G}{s^2+1}\\
&\Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=-2,\ D=1,\ E=0,\ F=2,\ G=0\Rightarrow\\
&\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^3(s^2+1)^2}] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^3}]-2\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]+\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)^2}]+\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s}{(s^2+1)}]\\
&= \frac{x^2}{2}-2+2\cos x+\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)^2}]
\end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)^2}] &= f(x)\Rightarrow\\
\mathscr{L}[\frac{f(x)}{x}] &= \int_s^\infty \frac{u}{(u^2+1)^2}du\\
&\qquad u^2+1=t\\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{s}{(s^2+1)^2},\quad 2udu=dt\\
&\qquad u=s\Rightarrow t=s^2+1\\
\mathscr{L}[\frac{f(x)}{x}] &= \int_{s^2+1}^\infty \frac{1}{2}\frac{dt}{t^2}\\
&= \lim_{A\to\infty}[\frac{-1}{2t}]_{s^2+1}^A\\
&= \frac{1}{2(s^2+1)}\Rightarrow\\
\frac{f(x)}{x} &= \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}]\\
&= \frac{1}{2}\sin x\Rightarrow\\
f(x) &= \frac{1}{2}x\sin x.
\end{aligned}$$

۹.۳.۶ پاسخ تمرین ۲۱.۳

قسمت (ه)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\sin^{۲} x\cos^{۳} x] &=?\\
\sin^{۲} x\cos^{۳} x &= (\sin^{۲} x\cos^{۲} x)\cos x\\
&= (\tfrac{۱}{۲}\sin ۲x)^{۲}\cos x\\
&= \tfrac{۱}{۴}\sin^{۲} ۲x\cos x\\
&= \tfrac{۱}{۴}(\tfrac{۱-\cos ۴x}{۲})\cos x\\
&= \tfrac{۱}{۸}\cos x-\tfrac{۱}{۸}\cos ۴x\cos x\\
&= \tfrac{۱}{۸}\cos x-\tfrac{۱}{۱۶}(\cos ۵x+\cos ۳x)\Rightarrow\\
\mathscr{L}[\sin^{۲} x\cos^{۳} x] &= \tfrac{۱}{۸}\mathscr{L}[\cos x]-\tfrac{۱}{۱۶}\mathscr{L}[\cos ۵x]-\tfrac{۱}{۱۶}\mathscr{L}[\cos ۳x]\\
&= \tfrac{۱}{۸}\tfrac{s}{s^{۲}+۱۶}-\tfrac{۱}{۱۶}\tfrac{s}{s^{۲}+۲۵}-\tfrac{۱}{۱۶}\tfrac{s}{s^{۲}+۹}.
\end{aligned}$$

۱۰.۳.۶ پاسخ تمرین ۶۰.۳

قسمت (د)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{e^{-۳s}(۳s+۱)}{s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۷}] &= U_{۳}(x)\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{(۳s+۱)}{s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۷}]_{x\mapsto x-۳}\\
s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۷ &= (s+۱)(s^{۲}+۴s+۷)\\
\tfrac{(۳s+۱)}{s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۷} &= \tfrac{(۳s+۱)}{(s+۱)(s^{۲}+۴s+۷)}\\
&= \tfrac{A}{s+۱}+\tfrac{Bs+C}{s^{۲}+۴s+۷}\\
&\Rightarrow A=-\tfrac{۱}{۲},\ B=\tfrac{۱}{۲},\ C=\tfrac{۹}{۲}\\
\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{(۳s+۱)}{s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۷}] &= -\tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}]+\tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{s+۹}{s^{۲}+۴s+۷}]\\
&= -\tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{s+۱}]+\tfrac{۱}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{s+۲}{(s+۲)^{۲}+۳}]+\tfrac{۷}{۲}\mathscr{L}^{-۱}[\tfrac{۱}{(s+۲)^{۲}+۳}]\\
&= -\tfrac{۱}{۲}e^{-x}+\tfrac{۱}{۲}e^{-۲x}\cos\sqrt{۳}x+\tfrac{۷}{۲\sqrt{۳}}e^{-۲x}\sin\sqrt{۳}x\\
\text{جواب نهایی} &= U_{۳}(x)[-\tfrac{۱}{۲}e^{-(x-۳)}+\tfrac{۱}{۲}e^{-۲(x-۳)}\cos\sqrt{۳}(x-۳)\\
&+\tfrac{۷}{۲\sqrt{۳}}e^{-۲(x-۳)}\sin\sqrt{۳}(x-۳)].
\end{aligned}$$

۱۱.۳.۶ پاسخ تمرین ؟؟

قسمت (؟)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<1 \\ -1 & 1\leq x<2 \end{cases} \quad f(x+2)=f(x)$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{\int_0^2 e^{-sx} f(x)dx}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{\int_0^1 e^{-sx} 1dx+\int_1^2 e^{-sx}(-1)dx}{1-e^{-2s}} \\
\int e^{-sx}dx &= -\frac{1}{s}e^{-sx} \Rightarrow \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{[-\frac{1}{s}e^{-sx}]|_0^1-[-\frac{1}{s}e^{-sx}]|_1^2}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-s}}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{1}{s}\frac{1+e^{-2s}-2e^{-s}}{1-e^{-2s}} \\
\mathscr{L}[f(x)] &= \frac{1}{s}\frac{(1-e^{-s})^2}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{1}{s}\times\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.
\end{aligned}$$

۱۲.۳.۶ پاسخ تمرین ۴۵.۳

قسمت (ج)

$$\begin{aligned}
&xy'' + y' + xy = 0 \quad y(0)=1 \\
&\mathscr{L}[xy''] + \mathscr{L}[y'] + \mathscr{L}[xy] = 0 \\
&-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[y'] - \frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] = 0 \\
&-\frac{d}{ds}(s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0)) + s\mathscr{L}[y] - y(0) - \frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] = 0 \\
&-2s\mathscr{L}[y] - s^2\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] + 1 + s\mathscr{L}[y] - 1 - \frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] = 0 \\
&(-s^2-1)\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y] = (2s-s)\mathscr{L}[y]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathscr{L}[y]}{\mathscr{L}[y]} &= \frac{-s}{s^2+1}ds \\
\ln(\mathscr{L}[y]) &= -\tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) \quad \text{انتگرال می‌گیریم} \\
&= \ln(s^2+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \\
\mathscr{L}[y] &= \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{J}_0(x) \quad \text{تابع بسل} \\
\mathscr{L}[\tfrac{y}{x}] &= \int_s^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \\
&= \sinh^{-1} s
\end{aligned}$$

۱۳.۳.۶ پاسخ تمرین ۸۱.۳

قسمت (ب)

$$y'' + y = \cos 2x - \delta(x-1) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$
$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[\cos x] - \mathscr{L}[\delta(x-1)]$$
$$(s^2+1)\mathscr{L}[y] = \frac{s}{s^2+4} - e^{-s}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathscr{L}[y] &= \frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{(S^2+1)} \\
\Rightarrow y &= \mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)}] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s^2+1}] \\
\frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)} &= \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)} \\
\Rightarrow & \quad A = -\tfrac{1}{3},\ B = 0,\ C = \tfrac{1}{3},\ D = 0 \\
\Rightarrow y &= \mathscr{L}^{-1}[\frac{-\frac{1}{3}s}{s^2+4}] + \mathscr{L}^{-1}[\frac{\frac{1}{3}s}{s^2+1}] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s^2+1}] \\
\Rightarrow y &= -\tfrac{1}{3}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos x - U_1(x)\sin(x-1).
\end{aligned}$$

مراجع