



مشتق

۱. فرض کنید تابع f بر $(1, \infty)$ پیوسته و بر $(1, \infty)$ مشتق پذیر باشد. اگر $f(1) = 0$ و برای هر $x \in (1, \infty)$ داشته باشیم $\frac{1}{x^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{x}$ نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \ln x$$

۲. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ مفروض است. الف) مشتق‌پذیری f در $x = 0$ را بررسی کنید. ب) اکستریم‌های f را بر بازه‌ی $[-1, 1]$ به دست آورید.

۳. اکستریم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x) = x + \sqrt{3} \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

۴. فواصل صعودی و نزولی و نقاط اکستریم تابع f با ضابطه زیر را تعیین و سپس آن را رسم کنید.

$$f(x) = x^{\ln x}$$

۵. الف) نشان دهید برای هر x $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

ب) ثابت کنید برای هر $x > 0$ $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

۶. از میان تمامی خطوط مماس بر نمودار $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ ، کدامیک بیشترین و کدامیک کمترین شیب را دارند؟

۷. می دانیم که تابع $f(x)$ بر بازه $[-7, 0]$ پیوسته و مشتق پذیر است. همچنین فرض کنیم $f(-7) = -3$ و $f'(x) \leq 2$. در این صورت ماکزیم مقدار $f(0)$ را بیابید.

۸. نشان دهید که تابع $f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۹. الف) نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \operatorname{tgh} x$ دارای تابع وارون مشتق پذیر است. دامنه تابع وارون و ضابطه مشتق آن را به دست آورید.
ب) نشان دهید معادله $\operatorname{tgh}^{-1}(\ln x) = \ln x$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۱۰. اگر f بر بازه $[a, b]$ تابعی دو بار مشتق پذیر باشد و $f(0) = 0, f(1) = 2, f(3) = 6$ ثابت کنید در (a, b) هست که $f''(c) = 0$.

۱۱. الف) اکستریم‌های تابع f با ضابطه $f(x) = x^{\ln x}$ را بر بازه $(0, \infty)$ تعیین کنید.

ب) اگر $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \int_1^x f(t) dt$ داده شده باشد نشان دهید که معادله $F(x) = \frac{1}{x}$ دقیقاً یک جواب دارد.

۱۲. الف) نشان دهید برای هر $x \geq 1$ ، $\ln x \geq \frac{1}{1-2x}$.
ب) اکستریم‌های تابع $f(x) = \ln x - \frac{1}{1-2x}$ را در $[1, 2]$ به دست آورید.

۱۳. تابع $f(x)$ با ضابطه زیر مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt & x \geq 0 \\ \int_{\frac{-1}{1+x^2}}^0 \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{2}} dt & x < 0 \end{cases}$$

نشان دهید $f(x)$ همه جا مشتق پذیر است و ضابطه f' را به دست آورید.

انتگرال

۲۱. مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\int_{\ln x}^{\ln x} \frac{dt}{e^t - 1}}{\sinh(x - 1)}$$

۲۲. الف) حد مجموع زیر را به دست آورید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \sqrt[3]{3}e + \sqrt{3}e + \sqrt[3]{3}e + \dots + \sqrt[n]{3}e \}$$

ب) همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}} dx$ را محاسبه کنید.

۲۳. همگرایی انتگرال ناسره $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(1+x^3)}} dx$ را بررسی کنید.

۲۴. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x^2} dx$ ب) $\int \sin(\sqrt{x}) dx$

پ) $\int \frac{x+3}{x^5-x} dx$ ت) $\int_0^1 x \sinh^{-1}(x^2+1) dx$

ث) $\int \frac{\sec^{-1}(\sqrt{1+x^2})}{1+x^2} dx$ ج) $\int \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} d\theta$

چ) $\int \frac{x \cdot e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ح) $\int \frac{x-2}{(-x^2+4x-3)^{\frac{2}{3}}} dx$

خ) $\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$ د) $\int x^y (\lambda + 3x^4) dx$

ذ) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(x-1)^2} dx$ ر) $\int_0^{\infty} t e^{-t} dt$

ز) $\int \sqrt{x^2+4x+5} dx$ ژ) $\int_{e^{\frac{\pi}{4}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))}$