به نام خداوند بخشنده مهربان

روش‌های آماری و اقتصادسنجی

در تحلیل و مدل‌سازی داده‌های حمل و نقلی

محمد مهدی بشارتی

besharati@iut.ac.ir

تحلیل واریانس

(آنالیز واریانس، تجزیه‌وتحلیل پراش، ...)

فصل هفتم

Analysis of Variances (ANOVA)

- تحلیل‌واریانس یک‌طرفه
- پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس
- آزمون‌های تعقیبی
- تحلیل‌واریانس دوطرفه

تحلیل واریانس

(آنالیز واریانس، تجزیه‌وتحلیل پراش، ...)

فصل هفتم

Analysis of Variances (ANOVA)

- **تحلیل‌واریانس یک‌طرفه**
- پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس
- آزمون‌های تعقیبی
- تحلیل‌واریانس دوطرفه

تحلیل‌واریانس یک‌طرفه (یک عاملی)

- گاهی اوقات کارشناسان حمل‌ونقل تمایل دارند میانگین‌های بیش از دو جامعه را باهم مقایسه کنند.
- به‌عبارت‌دیگر، ممکن است تحلیل‌گر بخواهد بداند آیا از نظر آماری تفاوت معناداری میان میانگین‌های بیش از دو جامعه وجود دارد یا خیر.
- توجه شود که برخی اوقات ممکن است منظور از «**جامعه‌های آماری**»، **سطوح مختلف یک متغیر طبقه‌ای** باشد.
- بدین ترتیب، اگر داده‌ها بر اساس سطوح یک متغیر طبقه‌ای دسته‌بندی‌شده باشند؛ ممکن است تحلیل‌گر بخواهد بداند، آیا میانگین مقادیر مشاهده‌شده در سطوح مختلف یک متغیر، باهم تفاوتی دارند یا خیر.
- برای مثال، فرض کنید استان‌های کشور را بر اساس تراکم جمعیتی آن‌ها به ۵ دسته تقسیم کرده‌ایم. اکنون می‌خواهیم بدانیم آیا **متوسط مسافر-کیلومتر جابه‌جاشده با اتوبوس برون‌شهری** در هریک از این ۵ گروه تفاوت معناداری با یکدیگر دارد یا خیر.
- مثال‌های دیگر؟
- برای بررسی این نوع فرضیه‌ها (در مورد برابری میانگین‌های بیش از دو جامعه) می‌توان از **روش تحلیل واریانس** استفاده کرد.

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

فرض کنید g جامعه مختلف با توزیع نرمال و میانگین‌های $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_g$ و واریانس مشترک و مجهول σ^2 داریم و می‌خواهیم در مورد تساوی میانگین‌های این جوامع اظهارنظر کنیم.

					میانگین
جامعه ۱	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}	$\bar{x}_1$
جامعه ۲	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}	$\bar{x}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
جامعه i			x_{ij}		$\bar{x}_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
جامعه g	x_{g1}	x_{g2}	$\ldots$	x_{gn}	$\bar{x}_g$
					$\bar{X}_t$

در تحلیل واریانس، فرضیه صفر بیان می‌کند که تفاوت معناداری میان میانگین جامعه‌ها وجود ندارد و تفاوتِ اندکِ مشاهده‌شده **ناشی از تصادف** است:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_g$$

و فرضیه مقابل بیان می‌کند که ***حداقل* یک جامعه، میانگینی متفاوت با میانگین سایر جوامع دارد.**

اکنون فرض کنید برای آزمودن این ادعا، از هریک از جوامع موردمطالعه، یک نمونه تصادفی nتایی انتخاب شده است؛ و

x_{ij}، j-امین داده از نمونه به‌دست‌آمده از جامعه i-ام؛ $\bar{x}_i$، میـانگین جامعه i؛ و $\bar{X}_t$، میـانگین کل می‌باشد.

✓ به‌طورکلی می‌توان گفت در روش تحلیل واریانس، برای بررسی فرضیه صفر از **تجزیه‌وتحلیل «پراکندگی موجود در میان داده‌های نمونـه‌ها»** استفاده می‌شود.

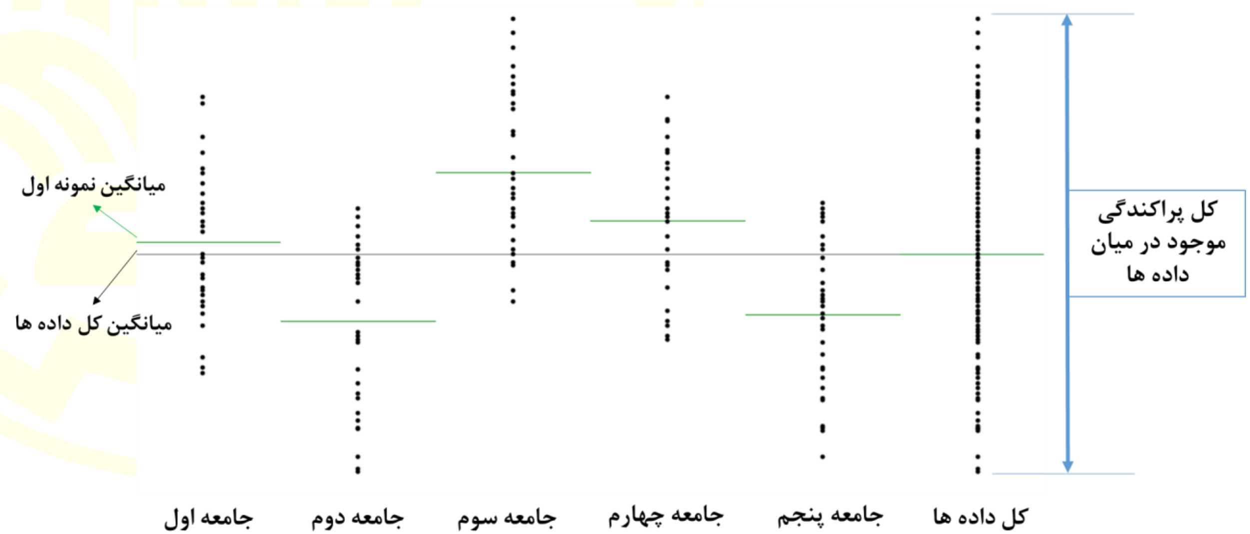
تحلیل‌واریانس یک‌طرفه (یک عاملی)

مدرس: محمدمهدی بشارتی

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

❖ دودسته پراکندگی در میان داده‌ها مشاهده می‌شود:

1. «پراکندگی موجود در میان داده‌های مربوط به هر نمونه» و
2. «پراکندگی موجود در میان میانگین‌های نمونه‌ها».



تحلیل‌واریانس یک‌طرفه (یک عاملی)

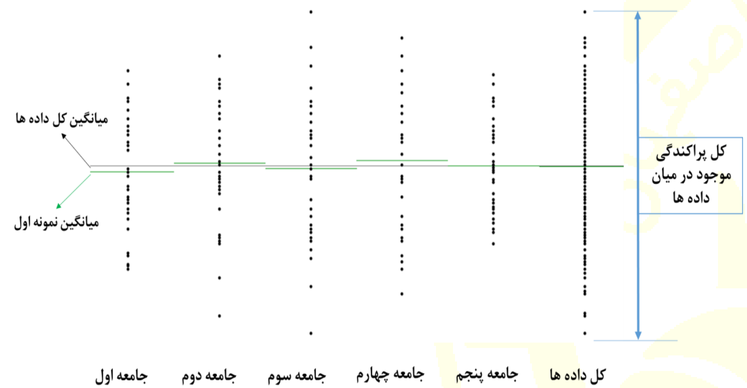
مدرس: محمدمهدی بشارتی

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

بر این اساس، ابتدا کل پراکندگی موجود در میان همه داده‌ها را به‌صورت روبرو تعریف می‌کنیم:

$$SS_t=\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\bar{X}_t\right)^2$$

اگر فرضیه صفر صحیح بوده (شکل بالا) و همه نمونه‌ها از جوامعی با میانگین برابر استخراج شده باشند؛ آنگاه، می‌توان فرض کرد تمام داده‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشترک هستند.

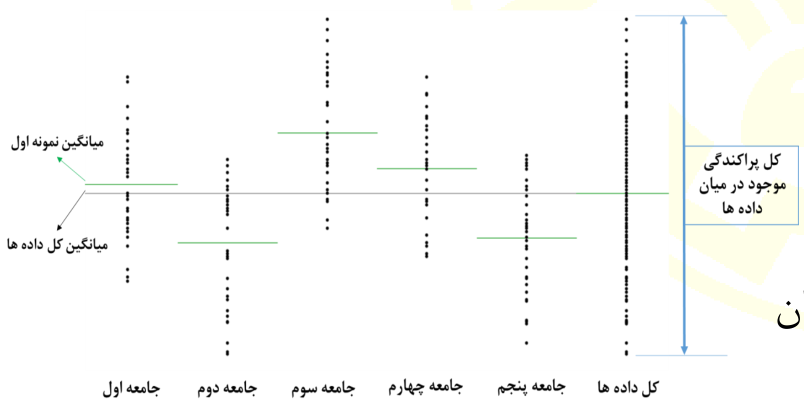


بنابراین، «کلِ پراکندگی مشاهده‌شده در میان نمونه‌ها (SS_t)» تنها ناشی از **تغییرات تصادفی در مقادیر داده‌ها** خواهد بود.

اما اگر فرضیه صفر نادرست باشد (شکل پایین)؛ آنگاه، «کلِ پراکندگی مشاهده‌شده در میان نمونه‌ها»، دو منبع خواهد داشت:

۱) تغییرات تصادفی در مقادیر داده‌های نمونه‌ها و

۲) متفاوت بودن میانگین جوامع با یکدیگر



در روش تحلیل واریانس از این ایده برای رد کردن فرضیه صفر با یک سطح اطمینان معین استفاده می‌شود.

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

برای تعیین سهم هریک از این دو منشأ، می‌توان «**مجموع مربعات انحراف تک‌تک داده‌ها از میانگین کل** (SS_t)» را به‌صورت مجموع دو منبع پراکندگی تعریف کرد:

$$SS_t=SS_b+SS_w$$

که در آن، SS_b، مجموع مربعات انحراف موجود میان میانگین‌های هر گروه از میانگینِ کل، ضرب‌در اندازه نمونه هر گروه (n_i) است؛ که به آن «**مجموع مربعات انحرافات بین گروه‌ها**» گفته می‌شود.

$$SS_b=\sum_{i=1}^{g} n_i(\bar{x}_i-\bar{X}_t)^2$$

و SS_w، مجموع مربعات انحراف تصادفی مقادیر داده‌های هر نمونه از میانگین آن نمونه است؛ که به آن «**مجموع مربعات انحرافات درون گروه‌ها**» گفته می‌شود.

نام دیگر مجموع مربعات درون گروه‌ها، «**مجموع مربعات خطا**» است.

$$SS_w=\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$$

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

برای تعیین سهم هریک از این دو منشأ، می‌توان «**مجموع مربعات انحراف تک‌تک داده‌ها از میانگین کل** (SS_t)» را به‌صورت مجموع دو منبع پراکندگی تعریف کرد:

$$SS_t = SS_b + SS_w$$

از این دو جزء، جزء دومِ پراکندگی (یعنی SS_w) تنها پراکندگی تصادفی مقادیر داده‌های درون گروه‌ها را اندازه‌گیری می‌کند.

اما جزء اول (یعنی SS_b) درصورتی‌که فرضیه صفر نادرست باشد، علاوه بر پراکندگی‌های تصادفی (درون گروه‌ها)، پراکندگی موجود میان میانگین‌ها را نیز منعکس می‌کند.

در گام بعد، مقادیر مجموع انحرافات بین گروه‌ها و درون گروه‌ها بر **مقادیر درجه آزادی آن‌ها** تقسیم شده و به ترتیب، مقادیر **میانگین مربعات انحراف بین گروه‌ها و درون گروه‌ها** به دست می‌آید.

این دو مقدار، دو برآورد مختلف از **واریانس مشترک جوامع (σ^2)** می‌باشند.

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

بدین ترتیب، اگر فرضیه صفر صحیح باشد (میانگین واقعی جوامع باهم برابر باشند)، آنگاه، $\bar{x}_i$ها دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین یکسان و واریانس مشترک σ^2/n خواهند بود.

بنابراین، اگر فرضیه صفر صحیح باشد، آنگاه، میانگین مربعات انحراف بین گروه‌ها (MS_b) که از رابطه زیر به دست می‌آید، برآوردی از واریانس مشترک (σ^2) خواهد بود

$$MS_b = \frac{n.\sum_{i=1}^{g}(\bar{x}_i - \bar{X}_t)^2}{g-1} = \frac{SS_b}{g-1}$$

به‌علاوه، درصورتی‌که فرضیه صفر نادرست باشد (میانگین‌های جوامع باهم متفاوت باشند)، میانگین مربعات انحراف بین گروه‌ها (MS_b)، مقداری بیشتر از σ^2خواهد داشت و هرچه میانگین‌های نمونه‌ها از هم فاصله بیشتری داشته باشند، مقدار این تفاوت نیز بزرگ‌تر خواهد بود.

$$MS_w = \frac{SS_w}{g(n-1)}$$

از سوی دیگر، میانگین مربعات انحراف درون گروه‌ها (MS_w) که از رابطه روبرو به دست می‌آید همواره یک برآوردگر ناااریب برای واریانس مشترک (σ^2) است که برخلاف MS_b، ارتباطی به درستی یا نادرستی فرضیه صفر نخواهد داشت.

❖ بنابراین، انتظار می‌رود

- درصورتی‌که فرضیه صفر صحیح باشد، MS_w و MS_b مقادیر تقریباً برابری داشته باشند (دو برآورد از واریانس مشترک) و
- در شرایطی که فرضیه صفر نادرست باشد، مقدار MS_b به‌طور معنـاداری بیشتر از مقدار MS_w باشد.

❑ منطق کلی روش تحلیل واریانس؛

بر این اساس، آماره آزمون تحلیل واریانس به‌صورت نسبت MS_b به MS_w تعریف می‌شود.

اگر فرضیه صفر صحیح باشد؛ آنگاه، آماره آزمون تحلیل‌واریانس از توزیع فیشر (F) با درجه آزادی‌های ۱ -k و k (n-۱) پیروی خواهد کرد:

$$F=\frac{MS_b}{MS_w} \sim F_{\alpha,\, k-1,\, k(n-1)}$$

و اگر فرضیه صفر نادرست باشد، انتظار می‌رود مقدار آماره آزمون از مقدار بحرانی ($F_{\alpha,\, k-1,\, k(n-1)}$) بیشتر باشد. بدین ترتیب، شرط رد فرضیه برابری میانگین‌ها در آزمون تحلیل واریانس، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$F_0=\frac{MS_b}{MS_w} > F_{\alpha,\, k-1,\, k(n-1)}$$

جدول ۷-۱ جدول تحلیل واریانس یک‌طرفه

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F
تغییرات بین گروه‌ها	SS_b	k-۱	MS_b	$\frac{MS_b}{MS_w}$
تغییرات درون گروه‌ها (خطا)	SS_w	k(n-۱)	MS_w	
مجموع	SS_t	nk-۱		

مثال؛

کارشناسان اداره راهداری قصد دارند تأثیر ترکیبات مختلف رنگ تابلوها بر روی میزان قابلیت تشخیص تابلو توسط راننده، مطالعه‌ای انجام دهند. برای این منظور، در یک مطالعه میدانی، فاصله محل شناسایی تابلو توسط هر راننده تا محل نصب تابلو، برای ۳ نوع تابلو با ترکیب رنگ متفاوت اندازه‌گیری و ثبت شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا میانگین فاصله تشخیص تابلو توسط رانندگان برای این سه نوع تابلو تفاوت معناداری با یکدیگر دارد یا خیر؟

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F
تغییرات بین گروه‌ها	۳۴۳۴۴	۲	۱۷۱۷۲	۵۱۰
تغییرات درون گروه‌ها (خطا)	۴۹۵۴	۱۴۷	۳۳/۷	
مجموع	۳۹۲۹۹	۱۴۹		

تحلیل واریانس

(آنالیز واریانس، تجزیه‌وتحلیل پراش، ...)

فصل هفتم

Analysis of Variances (ANOVA)

تحلیل‌واریانس یک‌طرفه

پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس

آزمون‌های تعقیبی

تحلیل‌واریانس دوطرفه

پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس

در تحلیل واریانس، فرض می‌شود نمونه‌های تصادفی مستقل، از جامعه‌هایی با توزیع نرمال و واریانس‌های برابر استخراج شده‌اند.

روابط مورد استفاده در تحلیل واریانس، به کمک این پیش‌فرض‌ها به دست آمده است.

بنابراین، درصورتی‌که این پیش‌فرض‌ها برقرار نباشند، نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل واریانس نیز قابل‌اعتماد نخواهد بود.

ابزار اصلی مورداستفاده برای بررسی پیش‌فرض‌ها، **باقیمانده‌ها (مقادیر خطا)** است.

منظور از باقیمانده‌ها در مدل یک‌طرفه، **مقادیر انحراف داده‌های هر گروه از میانگین آن گروه** می‌باشد:

$$e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i$$

❖ پیش‌فرض‌ها، روش‌های بررسی برقرار بودن آن‌ها و روش‌های مواجهه با موقعیت‌های عدم برقراری هر پیش‌فرض

۱- مستقل بودن نمونه‌ها (استقلال خطاها).

- فرض مستقل بودن به این معناست که میان داده‌های درون یک گروه و یا داده‌های گروه‌های مختلف رابطه‌ای وجود نداشته باشد.
- برای مثال، اگر مشاهدات در طول زمان ثبت شوند و شرایط در طول زمان تغییر کند، مشاهدات درون یک گروه نیز مستقل نخواهد بود.
- به این نوع از همبستگی، همبستگی سریالی یا زمانی گفته می‌شود (مثلا تکمیل یک پرسشنامه توسط افراد ثابت به فاصله ۵ سال).
- رسم نمودار باقیمانده‌ها نسبت به ترتیبِ زمانِ جمع‌آوری داده‌ها، می‌تواند به کشف همبستگی سریالی کمک کند.
- اگر الگوی خاصی در این نمودار مشاهده شود، دلالت بر تخطی از پیش‌فرض استقلال خطاها خواهد بود. به‌عبارت‌دیگر، درصورتی‌که پراکندگی مقادیر باقیمانده‌ها در این نمودار به‌صورت یکنواخت باشد (و یک‌طرف نمودار پراکندگی کمتری نسبت به سمت دیگر نداشته باشد)، می‌توان گفت فرض استقلال خطاها برقرار است.
- توجه شود که مستقل بودن نمونه‌ها و مستقل بودن خطاها، دو گزاره با معنای یکسان می‌باشند. در واقع، هرگاه نمونه‌ها مستقل باشند، انتظار می‌رود که پراکندگی داده‌های حول میانگین، مستقل از هم باشد.
- این پیش‌فرض در برخی کتب آماری با عنوان استقلال نمونه‌ها معرفی‌شده و برخی دیگر از کتب آماری، از این پیش‌فرض با عنوان استقلال خطاها یاد کرده‌اند.

اگر این فرض برقرار نبود: از روش طرح های اندازه گیری مکرر (Repeated Measure Designs)

❖ پیش‌فرض‌ها، روش‌های بررسی برقرار بودن آن‌ها و روش‌های مواجهه با موقعیت‌های عدم برقراری هر پیش‌فرض

۲- نرمال بودن توزیع مقادیر داده‌ها (توزیع خطاها) در جامعه.

برای بررسی این پیش‌فرض، می‌توان از نمودار مستطیلی فراوانی مقادیر خطاها و یا نمودارهای احتمالِ نرمال استفاده نمود.

با رسم نمودار احتمال نرمالِ باقیمانده‌ها می‌توان در مورد نرمال بودن توزیع خطاها اظهارنظر کرد.

باید توجه داشت در آزمون تحلیل واریانس، انحراف‌های جزئی از نرمال بودن، نگران‌کننده نخواهد بود.

در شرایطی که پیش‌فرض نرمال بودن توزیع متغیر وابسته در جوامع برقرار نباشد و یا اندازه نمونه‌ها به‌اندازه‌ای کوچک باشد که نتوان پیش-فرض نرمال بودن توزیع را بررسی کرد؛ از **آزمون‌های ناپارامتری** برای مقایسه میانگین‌ها استفاده می‌شود.

❖ **پیش‌فرض‌ها، روش‌های بررسی برقرار بودن آن‌ها و روش‌های مواجهه با موقعیت‌های عدم برقراری هر پیش‌فرض**

۳- برابری واریانس گروه‌ها ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=...=\sigma_k^2=\sigma^2$).

اگر واریانس گروه‌ها با هم برابر نباشند، نمی‌توان از تحلیل واریانس استفاده کرد.

به‌طورکلی، اگر اندازه نمونه‌ها باهم برابر باشند، آزمون تحلیل واریانس به عدم برقراری این پیش‌فرض حساس نخواهد بود.

اما گاهی اوقات ممکن است اندازه نمونه‌ها با هم برابر نباشند و تحلیل‌گر بخواهد بداند آیا پیش‌فرض تساوی واریانس‌ها برقرار است یا خیر.

یکی از روش‌های بررسی این موضوع، استفاده از **نمودار مقادیر باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی‌شده** است.

درصورتی‌که واریانس خطاها ثابت باشد، نمودار باقیمانده‌ها نسبت به مقادیر پیش‌بینی‌شده نباید دارای الگوی خاصی باشد.

گاهی اوقات، واریانس مشاهدات با بزرگ‌تر شدن x_{ij} ها، بزرگ‌تر می‌شوند. در این حالت نمودار «باقیمانده‌ها نسبت به مقادیر پیش‌بینی‌شده»، به قسمت بیرونی یک قیف شباهت پیدا می‌کند.

ثابت بودن واریانس جوامع را می‌توان به کمک **آزمون لِوین** نیز بررسی کرد.

پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس

مدرس: محمدمهدی بشارتی

❖ **پیش‌فرض‌ها، روش‌های بررسی برقرار بودن آن‌ها و روش‌های مواجهه با موقعیت‌های عدم برقراری هر پیش‌فرض**

۳- برابری واریانس گروه‌ها ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=...=\sigma_k^2=\sigma^2$).

درصورتی‌که آزمون برابری واریانس‌ها نشان دهد که واریانس گروه‌ها به‌طور معناداری با یکدیگر متفاوت هستند؛ آنگاه می‌توان به‌جای آزمون تحلیل واریانس معمولی، از **آزمون ولچ** استفاده کرد.

آماره آزمون ولچ بر اساس تحلیل واریانس معمولی و باکمی تفاوت به دست می‌آید.

به‌طوری‌که اگر متغیر موردنظر تنها دو سطح داشته باشد، **آزمون ولچ** معادل **آزمون t با واریانس نابرابر** خواهد بود.

به‌علاوه، **آزمون کروسکال–والیس** یک آزمون ناپارامتریِ جایگزین برای آزمون تحلیل واریانس می‌باشد که نسبت به آزمون تحلیل واریانس، به پیش‌فرض‌های کمتری در مورد وضعیت داده‌ها نیاز دارد.

توجه: درصورتی‌که فرض‌های **برابری واریانس‌ها** و **نرمال بودن توزیع داده‌ها** برقرار نباشند؛ ممکن است بتوان با **تبدیل داده‌ها** (مثلاً تبدیل لگاریتمی) به نرمال‌شدن توزیع داده‌ها و یا نزدیک نمودن واریانس گروه‌ها به یکدیگر کمک کرد.

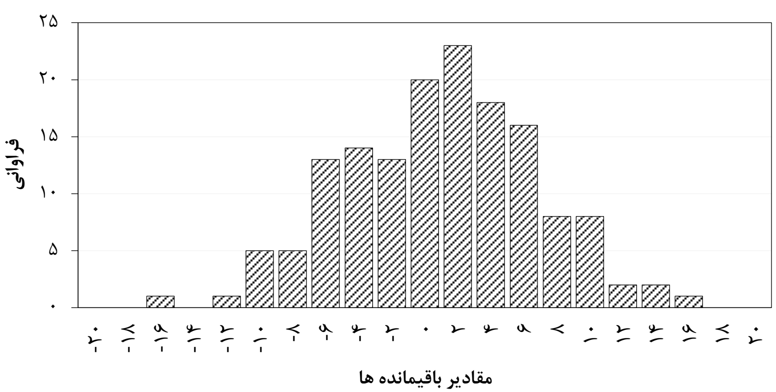
پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس

مدرس: محمدمهدی بشارتی

❖ مثال؛

در مثال قبل، می‌خواهیم بدانیم آیا پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس برقرار است یا خیر؟

درصورتی‌که نمونه‌گیری به‌صورت تصادفی انجام شده باشد؛ پیش‌فرض مستقل بودن خطاها برقرار خواهد بود.



ملاحظه می‌شود، مقادیر باقیمانده‌ها دارای توزیع نرمال هستند

پراکندگی مقادیر باقیمانده‌ها با افزایش مقادیر پیش‌بینی‌شده، تغییر چندانی نکرده است. بر این اساس، می‌توان گفت فرض ثابت بودن واریانس خطاها نیز برقرار است.

فرضیه صفر در آزمون لوین (برابری واریانس‌ها) نیز رد نمی‌شود.

آماره لوین	درجه آزادی صورت ($df_۱$)	درجه آزادی مخرج ($df_۲$)	سطح معناداری
۱.۵۵۹	۲	۱۴۷	۰.۲۱۴

فصل هفتم

تحلیل واریانس

(آنالیز واریانس، تجزیه‌وتحلیل پراش، ...)

Analysis of Variances (ANOVA)

- تحلیل‌واریانس یک‌طرفه
- پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس
- **آزمون‌های تعقیبی**
- تحلیل‌واریانس دوطرفه

آزمون‌های تعقیبی (post hoc)

❖ مقدمه

- در آزمون تحلیل واریانس، هنگامی‌که فرضیه صفر رد می‌شود؛ نمی‌توان فهمید که میانگین کدام گروه، با میانگین سایر گروه‌ها متفاوت است.
- تنها می‌توان با سطح اطمینان مشخصی گفت میانگینِ حداقل یکی از گروه‌ها، با سایرین تفاوت دارد.
- اگر بخواهیم با استفاده از آزمون t بدانیم که میانگین‌های کدام جفت از گروه‌ها باهم متفاوت هستند؛ دیگر نمی‌توانیم مقدار α را در کنترل داشته باشیم.
- برای حل این مشکل، از آزمون‌هایی به نام «آزمون‌های تعقیبی» یا «روش‌های مقایسه چندگانه» استفاده می‌شود.
- این آزمون‌ها به تحلیل‌گر کمک می‌کنند استنباط‌های مستقلی در مورد تفاوت بین میانگین‌های گروه‌ها را در سطح معناداری معینی ارائه کنند.

❖ مقدمه

- در این آزمون‌ها، فرضیه‌های صفر به‌صورت $H_0: \mu_i=\mu_j\ ,\ i\neq j\ ,$ است.
- تفاوت اصلی میان آزمون‌هـای تعقیبی، در روشی است که برای تعدیـل سطح معنـاداری مشـاهده‌شده به‌کار می‌برند.
- علاوه بر این، برخی از آزمون‌هـای تعقیبی، مانند آزمون **کمترین تفاوت معنادار**، **شفه** و **دانت**، تنها در صورتی قابل‌استفاده هستند که فرضیه صفر در تحلیل واریانس رد شده باشد.
- برخی دیگر مانند آزمون‌هـای **توکی** و **دانــکن**، به نتیجه آزمون تحلیل واریانس وابسته نیستند و بدون انجام آزمون تحلیل واریانس نیز امکان انجام این آزمون‌ها وجود خواهد داشت.

Least Significant Difference (LSD)

Scheffe's test

Dunnett’s test

معادل لاتین آزمون توکی، Tukey’s Honestly Significant Difference (HSD) است؛ که در برخی از کتب آماری با نام‌های دیگری ازجمله، تفاوت معنادار صادقانه یا راستین توکی نیز معرفی شده است.

Duncan’s test

آزمون‌های تعقیبی (post hoc)

❖ مقدمه

- باید توجه داشت که نتایج به‌دست‌آمده از هریک از آزمون‌های تعقیبی، لزوماً یکسان نخواهد بود.
- بدین معنا که ممکن است اختلاف مشاهده‌شده بین میانگین‌های دو گروه، در یک آزمون، معنادار تشخیص داده شود؛ اما در آزمون دیگر، این اختلاف، معنادار تشخیص داده نشود.
- نمی‌توان به‌صورت علمی ثابت کرد که کدام روش برتر از سایر روش‌هاست. بدین ترتیب، انتخاب نوع آزمون تعقیبی، بیشتر با توجه به تجربه و قضاوت تحلیل‌گر انجام می‌شود.
- هرچند کارشناسان آمار نسبت به استفاده از روش‌های مختلف و این‌که کدام روش، برتر است، اختلاف‌نظر دارند. اما نتایج مطالعات پیشین نشان می‌دهد که آزمون‌های **کمترین تفاوت معنادار** و **دانکن**، تواناتر از سایر آزمون‌ها هستند.
- آزمون‌های **دانکن** و **شفه**، محافظه‌کارتر بوده و اختلاف‌های نسبتاً کوچک را هم معنادار تشخیص می‌دهند.

❖ روش کمترین تفــاوت معنــادار Least Significant Difference (LSD)

در این روش که به آزمون t شباهت دارد؛ میانگین‌های جوامع به‌صورت جفت‌جفت با یکدیگر بررسی می‌شوند.

فرضیه صفر بیان می‌کند که میانگین دو گروه، تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند ($H_0: \mu_i = \mu_j$).

روند انجام آزمون: ابتدا کمترین تفاوت معنادارِ ممکن میان دو میانگین با در نظر گرفتن واریانس درون‌گروهی محاسبه می‌شود. سپس اختلاف مشاهده‌شده بین جفت میانگین‌ها، با کمترین تفاوتِ معنادار مقایسه می‌شود. درصورتی‌که اختلاف مشاهده‌شده بین میانگین‌های دو گروه، از مقدار «کمترین تفاوت معنادار (LSD)» بیشتر باشد؛ می‌توان گفت دو میانگینِ موردبررسی، ازنظر آماری تفاوت معناداری با یکدیگر دارند. بنابراین، فرضیه صفر رد می‌شود.

این آزمون، تنها پس از رد شدن فرضیه صفر در آزمون تحلیل واریانس، قابل انجام خواهد بود.

مقدار کمترین تفاوت معنادار از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$LSD = t_{\alpha/۲, N-g}\sqrt{MS_w\left(\frac{۱}{n_i}+\frac{۱}{n_j}\right)}$$

که در آن، n_i اندازه نمونه گروه i و n_j اندازه نمونه گروه j است

❖ روش کمترین تفاوت معنادار Least Significant Difference (LSD)

اگر تفاضل مشاهده‌شده بین جفت میانگین‌ها، از کمترین تفاوت معنادارِ متناظر با آن‌ها بیشتر باشد؛ فرضیه صفر رد شده و آزمون، اختلاف میان میانگین‌های دو گروه i و j را معنادار تشخیص می‌دهد.

$$\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right| \geq t_{\alpha/۲,N-g} \times \sqrt{MS_w\left(\frac{۱}{n_i}+\frac{۱}{n_j}\right)}$$

توجه: گاهی مشاهده می‌شود درحالی‌که آماره F در تحلیل واریانس معنادار است؛ روش کمترین تفاوت معنادار در یافتن جفت گروه-هایی که تفاوت معناداری با یکدیگر دارند، عاجز می‌ماند. این وضعیت به این دلیل پیش می‌آید که آزمون تحلیل واریانس، به‌طور هم‌زمان نه‌فقط مقایسه‌های جفتی بلکه تمام مقایسه‌های ممکن بین میانگین‌های گروه‌ها را در نظر می‌گیرد.

❖ روش کمترین تفــاوت معنــادار Least Significant Difference (LSD)

در مثال قبلی، پس از انجام آزمون تحلیل واریانس به این نتیجه رسیدیم که حداقل یکی از گروه‌ها میانگینی متفاوت از سایر گروه‌ها دارد. در این قسمت می‌خواهیم با استفاده از انواع آزمون‌های تعقیبی، آن دسته از گروه‌هایی که میانگین متفاوتی از یکدیگر دارند را شناسایی کنیم.

جدول ۵-۷ **جدول مقایسه‌های چندگانه با روش کمترین تفاوت معنادار**

گروه اول	گروه دوم	اختلاف میانگین‌ها	$\sqrt{MS_w(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j})}$	سطح معناداری	فاصله اطمینان ٪۹۵	
۱	۲	-۳۰/۷۸۹	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	-۳۳/۰۸	-۲۸/۴۹
	۳	-۳۳/۲۶۵	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	-۳۵/۵۶	-۳۰/۹۷
۲	۱	۳۰/۷۸۹	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	۲۸/۴۹	۳۳/۰۸
	۳	-۲/۴۷۶	۱/۱۶۱	۰/۰۳۵	-۴/۷۷	-۰/۱۸
۳	۱	۳۳/۲۶۵	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	۳۰/۹۷	۳۵/۵۶
	۲	۲/۴۷۶	۱/۱۶۱	۰/۰۳۵	۰/۱۸	۴/۷۷

❖ آزمون دامنه تغییرات چندگانه دانکن

برای استفاده از آزمون دانکن، ابتدا میانگین‌های گروه‌ها را به ترتیب افزایشی مرتب کرده و خطای استانداردِ اختلاف میانگین‌ها را از رابطه روبرو محاسبه می‌کنند.

$$S_{\bar{x}_i}=\sqrt{\frac{MS_W}{n}}$$

سپس، مقادیر $r_\alpha(p,df)$ را به ازای p= ۲،۳،...،g از جدول دامنه‌های معنادار دانکن (جدول ۷ در پیوست الف کتاب) به دست می‌آورند.

که در آن، αسطح معناداری، df تعداد درجات آزادی درون‌گروهی (خطا) و p تعداد گروه‌هایی است که در دامنه بین دو گروه موردنظر، قرار می‌گیرند)

در گام بعد، این دامنه‌ها را با استفاده از رابطه زیر، به مجموعه g-1 کمترین دامنه‌های معنادار (R_p) برمی‌گردانند.

$$R_p= r_\alpha(p,df)\times S_{\bar{x}_i} \qquad p=۲،۳،...،g$$

❖ آزمون دامنه تغییرات چندگانه دانکن

سپس، «تفاوت‌های مشـاهده‌شده بین هر جفت میـانگین» با «کمترین دامنه معنـادار R_p» متناظر با آن‌ها مقایسه می‌شود.

اگر تفاوت مشاهده‌شده بین یک جفت میانگین، از کمترین دامنه معنادارِ متناظر با آن‌ها تجاوز کند؛ آنگاه فرضیه صفر رد شده و نتیجه می-گیریم که جفت میانگین موردنظر به‌صورت معناداری با یکدیگر متفاوت هستند.

توجه: حتی درصورتی‌که فرضیه صفر در آزمون تحلیل واریانس رد نشود، بازهم می‌توان از آزمون دانکن برای مقایسه تمام جفت میانگین‌ها استفاده کرد.

❖ مثال

مثال قبلی را با روش آزمون دانکن حل می‌کنیم.

ابتدا میانگین گروه‌ها را به ترتیب افزایشی مرتب می‌کنیم.

رتبه ۱	$\bar{x}_۱=۹۹/۳۳$
رتبه ۲	$\bar{x}_۲=۱۳۰/۱۲$
رتبه ۳	$\bar{x}_۳=۱۳۲/۶$

توجه شود که در این مثال، به‌صورت اتفاقی، مقادیر میانگین‌ها از همان ابتدا از کم به زیاد مرتب شده بودند؛ اما ممکن بود پس از مرتب نمودن میانگین‌ها بر اساس مقدار، مثلاً میانگین گروه ۳ در رتبه ۲ قرار بگیرد. خطای معیار هر میانگین برابر با،

$$S_{\bar{x}_i}=\sqrt{\frac{۳۳/۶۹۹}{۵۰}}=۰/۸۲۱$$

خواهد بود. در گام بعد، به کمک جدول پیوست، دامنه‌های معنادار برای ۱۴۷ درجه آزادی و سطح اطمینان ۵٪ را به دست می‌آوریم.

$r_{۰/۰۵}(۲,۱۴۷)\cong ۲/۷۹$	$;\quad r_{۰/۰۵}(۳,۱۴۷)\cong ۲/۹۴$	

❖ مثال

مثال قبلی را با روش آزمون دانکن حل می‌کنیم.

بنابراین، کمترین دامنه‌های معنادار برای تفاضل میانگین‌ها در این مثال، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$R_{۲}=r_{۰/۰۵}(۲,۱۴۷).S_{\bar{x}_i}=۲/۷۹\times۰/۸۲۱=۲/۲۹۱$$

$$R_{۳}=r_{۰/۰۵}(۳,۱۴۷).S_{\bar{x}_i}=۲/۹۴\times۰/۸۲۱=۲/۴۱۴$$

بر این اساس، درصورتی‌که بخواهیم میانگین دو گروه معین را با یکدیگر مقایسه کنیم؛ ابتدا باید بر اساس رتبه‌بندی انجام‌شده برای میانگین‌ها، مشخص کنیم که اختلاف رتبه این دو میانگین، چقدر است. درصورتی‌که این دو گروه پشت سر هم قرارگرفته باشند، از $R_۲$ به‌عنوان کمترین دامنه معنادار برای تفاضل میانگین‌های این دو گروه استفاده می‌شود. همچنین، درصورتی‌که میانگین یک گروه دیگر، بین میانگین‌های این دو گروه قرارگرفته باشد، از $R_۳$ به‌عنوان کمترین دامنه معنادار برای تفاضل میانگین‌های این دو گروه استفاده می‌شود. به همین ترتیب، بر اساس اختلاف رتبه‌های هر جفت میانگین، می‌توان کمترین دامنه معنادار برای مقایسه آن جفت میانگین را تعیین کرد.

❖ مثال

مثال قبلی را با روش آزمون دانکن حل می‌کنیم.

نکته–۱: مشاهده می‌شود که در آزمون دانکن، با افزایش تعداد گروه‌هایی که در دامنه یک جفت گروه قرار می‌گیرند، لازم است اختلاف‌های بزرگ‌تری بین جفت میانگین مشاهده شود تا آزمون دانکن این اختلاف را معنادار تشخیص دهد.

نکته–۲: مقدار بحرانی $R_۲$ همواره برابر با مقدار LSD است

در ادامه، جفت میانگین‌ها را به ترتیب زیر با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. توجه شود که اعداد داخل پرانتز، تعداد گروه‌هایی که در دامنه مقایسه قرار می‌گیرند را نشان می‌دهد.
مشاهده می‌شود که در همه مقایسه‌ها، تفاضل مشاهده‌شده بین میانگین‌ها، از کمترین اختلاف معنادار متناظر با آن‌ها بیشتر است. بنابراین، در تمام مقایسه‌های این مثال، فرضیه صفر رد شده و نتایج آزمون دانکن حاکی از آن است که تمام جفت میانگین‌ها به‌طور معناداری از یکدیگر متفاوت هستند.

مقایسه میانگین گروه ۳ با گروه ۱ (۳)	$۱۳۲/۶۰-۹۹/۳۳=۳۳/۲۷>۲/۴۱۴(R_۳)$
مقایسه میانگین گروه ۳ با گروه ۲ (۲)	$۱۳۲/۶۰-۱۳۰/۱۲=۲/۴۸>۲/۲۹۱(R_۲)$
مقایسه میانگین گروه ۲ با گروه ۱ (۲)	$۱۳۰/۱۲-۹۹/۳۳=۳۰/۷۹>۲/۲۹۱(R_۲)$

❖ مثال

مثال قبلی را با روش آزمون دانکن حل می‌کنیم.

میانگین‌هایی که تفاوت معناداری از هم ندارند، در یک ستون قرار می‌گیرند.

اما ملاحظه می‌شود که هیچ‌کدام از جفت میانگین‌ها در یک ستون قرار نگرفته‌اند، بلکه هریک از میانگین‌ها در ستون‌های جداگانه نمایش داده‌شده‌اند. به این معنا که تفاوت میان همه جفت میانگین‌ها، ازنظر آماری معنادار تشخیص داده شده است.

جدول ۷-۶ **جدول مقایسه‌های چندگانه با روش دانکن**

گروه	اندازه نمونه	۱	۲	۳
۱	۵۰	۹۹/۳۳		
۲	۵۰		۱۳۰/۱۲	
۳	۵۰			۱۳۲/۶۰
سطح معناداری (Sig.)	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	

❖ آزمون تفاوت معنادار واقعی توکی (HSD)

آزمون توکی در صورتی تفاوت میان دو میانگین را *معنادار* تشخیص داده و فرضیه صفر را رد می‌کند که مقدار قدر مطلق تفاضل میان دو میانگین موردنظر، بیشتر از مقدار بحرانی (LSD) باشد.

$$\left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right| \geq LSD = q_{\alpha,\, g,\, df} \times S_{\bar{x}_i}$$

$S_{\bar{x}_i}$ خطای استاندارد اختلاف میانگین‌ها بوده و

q مقادیر بحرانی آزمون توکی است (از جداول آماده به دست می‌آید).

در این جداول، سطر اول مربوط به تعداد گروه‌های موردبررسی (g) و اولین ستون (df) مربوط به درجه آزادی مخرجِ آماره آزمون F می‌باشد.

در جدول ۸ پیوست کتاب، مقادیر q به ازای $\alpha=$ ۰/۰۵ ارائه‌شده است.

✓ آزمون توکی نسبت به آزمون دانکن توان کمتری دارد.

❖ **مثال** مثال قبلی را با روش آزمون توکی HSD حل می‌کنیم.

آزمون معناداری اختلاف بین میانگین‌های گروه ۲ و ۳ که در ردیف چهارم ارائه‌شده است

با توجه به این‌که $df_w=۱۴۷$ و $g=۳$ می‌باشد؛ به کمک جدول ۸ پیوست کتاب، $q_{\alpha,\ g,\ df} \cong ۳/۳۵$ به دست می‌آید. بدین ترتیب،

$$HSD=q_{\alpha,\ g,\ df}.S_{\bar{x}_i}=۳/۳۵ \times \sqrt{۳۳/۶۹۹\times(\frac{۱}{۵۰}+\frac{۱}{۵۰})}=۳/۸۸۹$$

و با توجه به این‌که شرط رد شدن فرضیه صفر به‌صورت زیر، برقرار نیست.

$$|\bar{x}_i-\bar{x}_j|\geq HSD \quad \rightarrow \quad |-۲/۴۷۶| \geq ۳/۸۸۹$$

بنابراین، فرضیه صفر را نمی‌توان رد کرد. نتیجه می‌گیریم که میانگین این دو گروه اختلاف معناداری با یکدیگر ندارند.

آزمون‌های تعقیبی (post hoc)

❖ **مثال** مثال قبلی را با روش آزمون توکی HSD حل می‌کنیم.

همان‌طور که در ردیف چهارم این جدول مشاهده می‌شود، آزمون توکی تفاضل بین میانگین دو گروه ۲ و ۳ را معنادار تشخیص نداده است (Sig.=۰/۰۸۷). به این معنا که بر اساس این آزمون، اختلاف بین میانگین این دو گروه ازنظر آماری معنادار نیست. به‌علاوه، بازه اطمینان ۹۵ درصدی ارائه‌شده برای تفاضل بین میانگین‌های این دو گروه، **شامـل عدد صفـر** می‌شود که این موضوع نیز مؤید آن است که میانگین این دو گروه تفاوت معناداری ندارند.

جدول ۷-۷ **جدول مقایسه‌های چندگانه با روش تفاوت معنادار واقعی توکی**

گروه اول	گروه دوم	اختلاف میانگین‌ها	$\sqrt{MS_w(\frac{۱}{n_i}+\frac{۱}{n_j})}$	سطح معناداری	فاصله اطمینان ۹۵٪	
۱	۲	-۳۰/۷۸۹	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	-۳۳/۵۴	-۲۸/۰۴
	۳	-۳۳/۲۶۵	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	-۳۶/۰۱	-۳۰/۵۲
۲	۱	۳۰/۷۸۹	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	۲۸/۰۴	۳۳/۵۴
	۳	-۲/۴۷۶	۱/۱۶۱	۰/۰۸۷	-۵/۲۳	۰/۲۷
۳	۱	۳۳/۲۶۵	۱/۱۶۱	۰/۰۰۰	۳۰/۵۲	۳۶/۰۱
	۲	۲/۴۷۶	۱/۱۶۱	۰/۰۸۷	-۰/۲۷	۵/۲۳

تحلیل واریانس

(آنالیز واریانس، تجزیه‌وتحلیل پراش، ...)

فصل هفتم

Analysis of Variances (ANOVA)

تحلیل‌واریانس یک‌طرفه

پیش‌فرض‌های آزمون تحلیل واریانس

آزمون‌های تعقیبی

تحلیل‌واریانس دوطرفه

تحلیل واریانس دوطرفه

- منظور از تحلیل واریانس یک‌طرفه (یک عاملی)، تحلیلی است که در آن نمونه‌ها بر اساس سطوح یک متغیر مستقل، دسته‌بندی‌شده باشند.
- چنانچه در پژوهشی با شرایطی مواجه باشیم که تحلیل‌گر بخواهد تأثیر هم‌زمان دو یا چند متغیر مستقل را بررسی کند، در این صورت از «**طرح عاملی**» استفاده می‌شود.
- به‌عبارت‌دیگر، در تحلیل واریانس عاملی، به تحلیل اثرهای اصلی و تعاملیِ دو یا چند متغیر مستقل بر روی یک متغیر وابسته پرداخته می‌شود.
- در تحلیل واریانس، متغیر مستقل که غالباً از نوع **گسسته** و با مقیاس **اسمی** یا **ترتیبی** می‌باشد؛ تحت عنوان «عامل (Factor)» شناخته شده و به طبقات مختلف آن متغیر، «سطح (Level)» گفته می‌شود.
- برای مثال، عاملی که بین سه وضعیت، تغییر می‌کند؛ دارای سه سطح خواهد بود.
- بدین ترتیب، اگر نمونه‌های برآمده از جامعه موردمطالعه بر اساس دو متغیر طبقه‌بندی شوند؛ با تحلیل واریانس دوطرفه روبرو خواهیم بود.
- روش کار در تحلیل واریانس دوطرفه به این صورت است که آزمودنی‌ها به‌گونه‌ای تصادفی و مستقل از هم، از درون یک جامعه با توزیع نرمال انتخاب می‌شوند و به‌گونه‌ای تصادفی به هریک از گروه‌ها اختصاص داده می‌شوند.

تحلیل واریانس دوطرفه

- روش کار در تحلیل واریانس دوطرفه به این صورت است که آزمودنی‌ها به‌گونه‌ای تصادفی و مستقل از هم، از درون یک جامعه با توزیع نرمال انتخاب می‌شوند و به‌گونه‌ای تصادفی به هریک از گروه‌ها اختصاص داده می‌شوند.
- برای مثال، فرض کنید یک تحلیل‌گر بخواهد به بررسی اثر هم‌زمان وضعیت آب‌وهوا و تعداد چراغ‌های راهنمایی موجود در طول یک کریدور، بر سرعت تردد خودروها در آن کریدور بپردازد.
- برای این کار لازم است نمونه‌هایی از سرعت تردد خودروها در حالت‌های مختلف این دو متغیر جمع‌آوری گردیده و به کمک آزمون تحلیل واریانس دوطرفه، معنادار بودن تفاوت میان میانگین‌های این نمونه‌ها آزموده شود.
- اگر در یک تحلیل واریانس دوطرفه، تعداد سطوح عامل A را با a و تعداد سطوح عامل B را با b مشخص کنیم، بدین ترتیب، با ترکیب دوعاملی که طبقه‌بندی مشاهدات بر اساس آن‌ها انجام می‌گیرد، $a \times b$ جامعه به وجود می‌آید که هریک از آن‌ها تشکیل یک سطح می‌دهند.

تحلیل واریانس دوطرفه

- باید توجه داشت که در آزمون‌های تحلیل واریانس چند طرفه، دو نوع اثر را می‌توان در میان متغیرها بررسی کرد.
- این اثرات عبارت‌اند از اثرات اصلی (Main effect) و اثرات تعاملی (Interaction effect).
- **اثرِ اصلیِ یک عامل**، عبارت است از مقدار تغییر در متغیر وابسته براثر تعویض سطوح آن عامل، بدون در نظر گرفتن سایر عامل‌ها.
- در اینجا، **فرضیه صفر** بیان می‌کند که تفاوت معناداری بین میانگین گروه‌ها وجود ندارد و یا به‌عبارت‌دیگر، تعویض سطوح مختلفِ عاملِ مذکور، تأثیری بر مقدار متغیر وابسته ندارد.
- برای مثال، اگر اثر متغیرهای تعداد چراغ راهنمایی و وضعیت آب‌وهوا را بر سرعت تردد خودروها به‌طور جداگانه بررسی کنیم؛ درواقع، اثر اصلی هریک از این متغیرها را بررسی کرده‌ایم.
- در این راستا، اگر بخواهیم اثر اصلی عامل وضعیت آب‌وهوا (مثلاً با دو سطح آب‌وهوای آفتابی و غیر آفتابی) بر متوسط سرعت‌ها را بررسی کنیم،
- اثر اصلیِ عاملِ آب‌وهوا را می‌توان به‌صورت تفاوت بین **(۱)** متوسط سرعت‌ها در اولین سطح وضعیت آب‌وهوا (مثلاً هوای آفتابی) و **(۲)** متوسط سرعت‌ها در دومین سطح وضعیت آب‌وهوا (مثلاً هوای غیر آفتابی) تصور کرد.

تحلیل واریانس دوطرفه

- باید توجه داشت که در آزمون‌های تحلیل واریانس چند طرفه، دو نوع اثر را می‌توان در میان متغیرها بررسی کرد.
- این اثرات عبارت‌اند از اثرات اصلی (Main effect) و اثرات تعاملی (Interaction effect).
- **اثر تعاملی (متقابل)**، عبارت است از تأثیر هم‌زمان عامل‌های موردنظر در مقدار متغیر وابسته.
- درواقع، در اینجا می‌خواهیم بدانیم آیا عامل‌های موردبررسی، برای اثرگذاری بر روی متغیر وابسته با یکدیگر تعامل معناداری دارند یا خیر.
- در این حالت نیز **فرضیه صفر**، بیان می‌کند که میانگین گروه‌ها با یکدیگر تفاوت معناداری ندارند و بنابراین، ترکیب‌های مختلف سطوح عامل‌های موردبررسی، اثری بر مقدار متغیر وابسته ندارند.
- یکی از رایج‌ترین روش‌های بررسی و تفسیر اثرات تعـاملی (به صورت بصری)، استفاده از **نمودار اثرات تعاملی** است.
- در این نمودار، میانگین مقادیر متغیر وابسته روی محور عمودی و سطوح یکی از عامل‌ها بر روی محور افقی مشخص می‌شوند.
- سپس، به ازای هریک از سطوحِ عاملِ دوم، یک نمودار ترسیم می‌شود. بدین ترتیب، میانگین مقادیر متغیر وابسته به ازای سطوح مختلف هریک از عامل‌ها، بر روی نمودار نمایش داده‌شده و وجود یا عدم وجود اثرات اصلی و تعاملی موردبررسی قرار می‌گیرد.

تحلیل واریانس دوطرفه

مدرس: محمدمهدی بشارتی

- در این‌گونه نمودارها، هرکدام از خطوط، یکی از سطوح متغیر مستقل اول را به‌صورت تابعی از تمام سطوح متغیر مستقل دوم نمایش می‌دهند. شیب هریک از خطوط تا حدودی نشان‌دهنده میزان ارتباط بین عامل مربوطه با متغیر وابسته است. هرچه شیب بیشتر باشد، نشان‌دهنده ارتباط زیادتر خواهد بود.
- اگر خطوط، به‌صورت موازی باشند؛ می‌توان نتیجه گرفت که تعامل معناداری میان عامل‌ها وجود ندارد. به‌عبارت‌دیگر، اگر هیچ‌گونه اثر تعاملی (**اندرکنشی**) میان دو عامل وجود نداشته باشد؛ آنگاه تمامی خطوط باهم موازی خواهند بود.
- برعکس، اگر یک اثر تعاملیِ معنادار بین دو عامل وجود داشته باشد؛ خطوط مذکور به‌طور قابل‌توجهی موازی نخواهند بود؛ زیرا ناموازی بودن خطوط به این معناست که اثر عامل‌ها در مقدار متوسط متغیر وابسته به ازای سطوح مختلف آن عامل‌ها به یک اندازه نیست.
- اگر خطوط از حالت موازی بودن کاملاً خارج شده باشند؛ برای ارزیابی اثر عامل‌ها می‌بایست به‌جای اثرات اصلی آن‌ها، اثرات تعاملی آن‌ها را به کمک محاسبه میانگین حداقل مربعات در نظر گرفته و با آزمون‌هایی مانند آزمون تفاوت معنادار توکی بسنجیم.
- **توجه:** نمایش اثرات متقابل به‌صورت نموداری، غالباً در تعبیر اثرهایی که معنادار تشخیص داده‌شده و در گزارش به افراد غیرآماری می‌تواند بسیار مفید باشد. اما این روش، به‌عنوان یک فن مستقل برای تحلیل داده‌ها به‌حساب نمی‌آید.

❖ مثال

داده‌های سرعت خودروها در ۴ کریدور ترافیکی که هریک بین صفر تا ۳ چراغ‌راهنمایی در طول خود دارند؛ در شرایط مختلف آب‌وهوایی (که با شماره‌های ۱ تا ۴ در جدول داده‌ها نشان داده‌شده)، جمع‌آوری گردیده است. می‌خواهیم بدانیم:

الف) آیا تعداد چراغ راهنمایی و نیز وضعیت آب‌وهوا تأثیری در میانگین سرعت تردد خودروها دارد؟

ب) آیا تأثیر تعاملیِ دو عامل تعداد چراغ راهنمایی و وضعیت آب‌وهوا بر میانگین سرعت‌ها، معنادار است؟

❖ مثال

پاسخ:

جدول تحلیل واریانس دوطرفه، شامل آزمون‌های فرضیه در مورد معناداری اثر اصلی متغیرها (ردیف ۳ و ۴) و نیز اثرات تعاملی (ردیف ۵) می‌باشد. در اینجا نیز همانند تحلیل واریانس یک‌طرفه، فرضیه صفر بیان می‌کند که میانگین گروه‌ها با یکدیگر تفاوت معناداری ندارند و می‌توان قبول کرد که همه گروه‌ها از یک جامعه با میانگین یکسان برآمده‌اند. یکی از تفاوت‌های موجود میان جدول خروجی تحلیل واریانس یک‌طرفه و دوطرفه، آن است که در حالت دوطرفه، سه دسته میانگین وجود دارد: میانگین‌های مربوط به سطوح متغیر اول (آب‌وهوا)، میانگین‌های مربوط به سطوح متغیر دوم (تعداد چراغ) و میانگین‌های مربوط به ترکیب سطوح دو متغیر مستقل (آب‌وهوا × تعداد چراغ).

جدول ۷-۹ **جدول نتایج آزمون تحلیل واریانس دوطرفه**

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F	سطح معناداری
مدل	۱۱۷۲۹۳۷۶	۱۶	۷۳۳۰۸۶	۱۰۳۲۷	۰/۰۰۰
آب‌وهوا	۴۱۱۸	۳	۱۳۷۳	۱۹/۳۴	۰/۰۰۰
تعداد چراغ	۱۶۱۸	۳	۵۳۹	۷/۵۹۶	۰/۰۰۰
(آب‌وهوا)×(تعداد چراغ)	۵۶۸۹	۹	۶۳۲	۸/۹۰۵	۰/۰۰۰
خطا	۶۸۴۳۳۶	۹۶۴۰	۷۰/۹۹		
مجموع	۱۲۴۱۳۷۱۲	۹۶۵۶			
R^2=۰/۹۴۵					

❖ **مثال**

پاسخ:

تفاوت دیگر آن است که میانگین مربعات پراکندگی درون‌گروهی در جدول تحلیل واریانس یک‌طرفه، در جدول تحلیل واریانس دوطرفه تحت عنوان خطا ارائه می‌شود.

همچنین، درحالی‌که در جدول تحلیل واریانس یک‌طرفه، تنها یک عدد به‌عنوان میانگین مربعات پراکندگی بین گروهی وجود داشت؛ در اینجا به ازای هریک از اثرات اصلی و تعاملی، یک مقدار جداگانه به‌عنوان میانگین مربعات پراکندگی بین گروه‌ها ارائه می‌شود.

به‌علاوه، به خاطر داریم که میانگین مربعات پراکندگی بین گروهی، تنها زمانی برآورد صحیحی از واریانس مشترک جامعه بود که فرضیه صفر صحیح باشد.

بنابراین، با تقسیم کردن مقادیر میانگین مربعات پراکندگی هریک از اثرات اصلی یا تعاملی بر میانگین مربعات خطا، آماره F_o مربوط به اثرِ موردنظر به دست می‌آید.

درصورتی‌که مقدار سطح معناداری (مقدار احتمال) مشاهده‌شده (ستون .sig) برای هریک از اثرات، کمتر از سطح معناداری آزمون (مثلاً ۰/۰۵) باشد؛ آنگاه، فرضیه صفر مربوط به عدم معناداری آن اثر رد شده و می‌توان با ۹۵٪ اطمینان گفت که اثر موردنظر (اصلی یا تعاملی) معنادار است.

❖ مثال

پاسخ:

به کمک مجموع مربعات ارائه‌شده در ردیف اول جدول ۷-۹، می‌توان فهمید که چقدر از کل پراکندگی مشاهده‌شده در مقادیر متغیر پاسخ مربوط به اثراتِ اصلی و تعاملی در نظر گرفته‌شده در این تحلیل می‌باشد.

برای مثال، در جدول ۷-۹ مشاهده می‌شود که مجموع مربعات کل حدوداً برابر با ۱۲۴۱۳۷۱۲ است و از این مقدار، حدود ۱۱۷۲۹۳۷۶ واحد (مجموع مربعات مدل) را می‌توان به تفاوت‌های مشاهده‌شده در مقادیر متغیر پاسخ به ازای سطوح مختلف دو اثر اصلی و یک اثر تعاملی در این تحلیل نسبت داد.

بنابراین، حدود ٪۹۴/۵ از کل پراکندگیِ مقادیر سرعت تردد خودروها را می‌توان با مقادیر این سه عامل توضیح داد. این درصد، همان R^2 مربوط به مدل می‌باشد. در فصل ۱۰، توضیحات کاملی در مورد مفهوم R^2 ارائه خواهد شد.

آزمون F ارائه‌شده در ردیف اول، به این سؤال پاسخ می‌دهد که آیا درمجموع، اثرات در نظر گرفته‌شده در این تحلیل، ازنظر آماری پیش‌بینی کننده‌های خوبی برای مقادیر متغیر پاسخ هستند یا خیر؟ (فصل ۱۰).

پس از رد فرضیه صفر برای هریک از اثرات در نظر گرفته‌شده در تحلیل واریانس، این سؤال مطرح می‌شود که کدام‌یک از گروه‌ها با یکدیگر تفاوت معناداری دارند (با استفاده از آزمون‌های تعقیبی).

تحلیل واریانس دوطرفه

❖ **مثال**

پاسخ:

نمودار اثرات تعاملی دو متغیر «تعداد چراغ راهنمایی در طول کریدور» و «وضعیت آب‌وهوا»