به نام خداوند بخشنده مهربان

روش‌های آماری و اقتصادسنجی

در تحلیل و مدل‌سازی داده‌های حمل و نقلی

محمد مهدی بشارتی

besharati@iut.ac.ir

فصل ششم

استنباط آماری (آزمون فرضیه و فاصله اطمینان)

Statistical Inference

مقدمه

بخش اول: آزمون فرضیه

بخش دوم: استنباط آماری

مقدمه

- ❑ با استفـاده از روش‌های مختلف استنباط آماری و با در نظر گرفتن یک سطح اطمینان معین، می‌توان نتایج به‌دست‌آمده از نمونه تصـادفی را به جـامعه تعمیم داد.
- ❑ روش‌های آمار استنباطی شامل موارد زیر می‌شود:

✓ **الف) آزمون فرضیه‌های آماری** (Hypothesis Testing). منظور از آزمون فرضیه‌های آماری، بررسی ادعاها یا فرضیه‌هایی است که در مورد پارامتر جامعه مطرح می‌شود. در این روش، پارامتر جامعه برآورد نمی‌شود؛ بلکه تنها به بررسی ادعاهایی در مورد مقدار پارامتر جامعه پرداخته می‌شود.

✓ **ب) برآورد پـارامتر مجهول جـامعه.** در این روش، به کمک آمـاره‌های به‌دست‌آمده از نمونه، سعی می‌شود برآورد یا تخمینی از مقدار واقعی پارامتر مجهول جامعه ارائه شود. این برآورد به دو صورت **نقطه‌ای** و **فاصله‌ای** انجام می‌شود.

تفاوت فرض (Assumption) و فرضیه (Hypothesis) ؟

❑ روش‌های برآورد پــارامتر مجهول جــامعه؛

- **برآورد نقطه‌ای:** در این روش، به کمک مقادیر مشاهده‌شده در نمونه تصادفی، مقدار آماره به‌دست‌آمده از نمونه ($\hat{\theta}$) به‌عنوان تخمینی از پارامتر مجهول جامعه (θ) ارائه می‌شود. واضح است که اگر نمونه تصادفی تغییر یابد؛ برآوردهای نقطه‌ای به‌دست‌آمده نیز تغییر خواهند کرد. برای حل این مشکل و ارائه یک برآورد قابل‌اطمینان‌تر، می‌توان از برآورد فاصله‌ای استفاده نمود.

- **برآورد فاصله‌ای:** به کمک مفهوم توزیع‌های نمونه‌ای، می‌توان تنها با داشتن یک نمونه تصادفی و با در نظر گرفتن یک سطح اطمینان معین، فاصله‌ای را به‌عنوان حدود بالا و پایین برای پارامتر مجهول جامعه (مثلاً میانگین)، برآورد نمود. به این روش، برآورد فاصله‌ای گفته می‌شود.

فصل پنجم

استنباط آماری (آزمون فرضیه و فاصله اطمینان)

Statistical Inference

مقدمه

بخش اول: آزمون فرضیه

بخش دوم: استنباط آماری

آزمون فرضیه

مدرس: محمدمهدی بشارتی

- **فرضیه آماری،** فرضیه یا حدسی درباره توزیع جامعه و یا پارامترهای جامعه است که می‌خواهیم آن را بیازماییم.
- **آزمون فرضیه،** آزمونی است که در آن تلاش می‌شود به کمک نتایج به‌دست‌آمده از نمونه‌گیری، درست بودن فرضیه آماری بررسی گردد.
- در آزمون فرضیه می‌خواهیم با استفاده از شواهد به‌دست‌آمده از یک نمونه‌گیری تصادفی، به این سؤال پاسخ دهیم که آیا مقدار مورد ادعا در فرضیه با مقدار واقعی پارامتر جامعه مطابقت دارد؟
- **مثال_۱؛** فرض کنید ادعا شده است که متوسط سرعت تردد خودروها در قطعه‌ای از یک راه، ۹۵ کیلـومتربرسـاعت است. به کمک یک نمونه تصادفی از سرعت خودروها در این قطعه، می‌خواهیم بدانیم آیا متوسط سرعت تردد خودروها در این قطعه تفاوت معناداری با مقدار مورد ادعا (۹۵ کیلـومتربرسـاعت) دارد یا خیر؟
  - درواقع، با استفاده از داده‌های جمع‌آوری‌شده (و مقایسه میانگین نمونه با عدد مورد ادعا) تلاش می‌کنیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا تفاوت مشاهده‌شده میانِ میانگین نمونه (مثلا ۹۳.۴ کیلومتربرساعت) و مقدار مورد ادعا (۹۵ کیلومتربرساعت)، تنها ناشی از تصادفی بودن نمونه‌گیری است؛ یا این‌که میانگین سرعت تردد در این قطعه واقعا با مقدار مورد ادعا تفاوت معناداری دارد؟

آزمون فرضیه

- **فرضیه آماری،** فرضیه یا حدسی درباره توزیع جامعه و یا پارامترهای جامعه است که می‌خواهیم آن را بیازماییم.

- **آزمون فرضیه،** آزمونی است که در آن تلاش می‌شود به کمک نتایج به‌دست‌آمده از نمونه‌گیری، درست بودن فرضیه آماری بررسی گردد.

- در آزمون فرضیه می‌خواهیم با استفاده از شواهد به‌دست‌آمده از یک نمونه‌گیری تصادفی، به این سؤال پاسخ دهیم که آیا مقدار مورد ادعا در فرضیه با مقدار واقعی پارامتر جامعه مطابقت دارد؟

- **مثال_۲؛** فرض کنید سرعت مجاز تردد در یک جاده دوطرفه، از ۹۰ کیلومتربرساعت به ۸۰ کیلومتربرساعت کاهش داده‌شده است. به کمک دو نمونه تصادفی که در قبل و بعد از این اقدام جمع‌آوری شده، می‌خواهیم بدانیم آیا تفاوت معناداری میان میانگین سرعت تردد خودروها در این دو حالت رخ داده است یا خیر؟

  - درواقع، از داده‌های جمع‌آوری‌شده استفاده می‌کنیم تا به این سؤال پاسخ دهیم که آیا تفاوت مشاهده‌شده در میانگین سرعت تردد در این دو نمونه، تنها ناشی از تصادفی بودن نمونه‌گیری است؛ یا این‌که میانگین سرعت تردد در این دو حالت، با یکدیگر تفاوت معناداری دارند (کاهش سرعت مجاز بر روی میانگین سرعت تردد خودروها تأثیر معناداری گذاشته است)؟

آزمون فرضیه

در آزمون فرضیه، ابتدا یک فرضیه یا ادعا مطرح می‌شود؛ سپس، تحلیل‌گر به بررسی میزان صحت آن فرضیه می‌پردازد. ازآنجاکه این ادعا ممکن است در دنیای واقعی (جامعه آماری) درست یا نادرست باشد، دو فرضیه رقیب، به نام‌های فرضیه صفر (H_0) و فرضیه مقابل (H_a)، در مورد موضوع موردمطالعه در نظر گرفته می‌شود.

Observed value
Hypothesized value
Statistically significant

فرضیه صفر، فرضیه‌ای است که برای رد شدن تنظیم می‌شود؛

فرضیه مقابل، فرضیه‌ای است که در مقابل فرضیه صفر قرار می‌گیرد.

- در آزمون فرضیه هدف این است که فرضیه صفر رد شود؛ تا خلاف آن ثابت شود.
- بدین ترتیب، بر اساس داده‌های موجود، امکان دارد نتیجه تحلیل، رد یا عدم رد شدن فرضیه صفر باشد.
- فرضیه صفر بیان می‌کند که اختلاف مشاهده‌شده میان «مقدار به‌دست‌آمده از نمونه» با «مقدار مورد ادعا برای پارامتر»، ناشی از تصادف است؛ و تحلیل‌گر با رد آن سعی می‌کند که ثابت کند اختلاف مشاهده‌شده از نظر آماری معنادار است.
- بنابراین، اصطلاح «معنادار» ازنظر آماری بدین معناست که تفاوت‌های مشاهده‌شده در نمونه نسبت به مقادیر مورد ادعا، صرفاً از بابت تصادفی بودن نمونه‌گیری نیست.

آزمون فرضیه

رد یا عدم رد H_0 دو تصمیم ممکنی است که می‌تواند توسط محقق اتخاذ شود. درعین‌حال، با توجه به این‌که تصمیم‌گیری برای رد کردن یا عدم رد فرضیه صفر، بر اساس نتایج به‌دست‌آمده از نمونه‌گیری تصادفی انجام می‌شود؛ بنابراین، هر یک از این دو تصمیم می‌تواند با خطا همراه باشد. به‌عبارت‌دیگر، هیچ‌کدام از این نتیجه‌گیری‌ها قطعی نبوده و می‌تواند دارای خطا باشد.

نتایجِ ممکن برای یک آزمون فرضیه

		آنچه در حقیقت وجود دارد	
		فرضیه صفر صحیح است	فرضیه صفر صحیح نیست
نتیجه آزمون	فرضیه صفر رد می‌شود	خطای نوع اول (I)	تصمیم صحیح
	فرضیه صفر رد نمی‌شود	تصمیم صحیح	خطای نوع دوم (II)

در حین انجام آزمون فرضیه، ممکن است دو نوع خطا رخ دهد که به خطای نوع اول و خطای نوع دوم موسوم هستند.

- **خطای نوع اول**. اگر فرضیه صفر صحیح باشد ولی رد شود؛ به‌اشتباه رد شده است. احتمال وقوع خطای نوع اول را با α نشان داده و آن را سطح معناداری یا سطح تشخیص آزمون می‌نامند. معمولاً در مطالعات تجربی، احتمال ارتکاب خطای نوع اول، به‌صورت اختیاری توسط محقق تعیین می‌شود.

α= P(فرضیه صفر درست باشد | رد فرضیه صفر)

- **خطای نوع دوم**. اگر فرضیه صفر نادرست باشد و قبول شود؛ به‌اشتباه قبول شده است. احتمال وقوع خطای نوع دوم را با β نشان می‌دهند.

β= P(فرضیه صفر نادرست باشد | قبول فرضیه صفر)

سطح معناداری : Level of significance

گام‌های آزمون فرضیه؛

1. **تعیین فرضیه صفر** و فرضیه مقابل.

2. **تعیین سطح معناداری** (α) قابل‌قبول برای آزمون.

3. **تعیین آماره(برآوردگر) آزمون** (**با فرض صحیح بودن فرضیه صفر**)

4. **تعیین توزیع نمونه‌ای آماره آزمون** (آماره آزمون از کدام توزیع شناخته شده پیروی می‌کند).

5. **تعیین ناحیه بحرانی** بر اساس آماره آزمون، نوع فرضیه مقابل و سطح معناداری. منظور از «ناحیه بحرانی (ناحیه رد فرضیه صفر)»، ناحیه‌ای از مقادیر است که اگر آماره آزمون در آن ناحیه قرار بگیرد، می‌توان با یک سطح اطمینان معین، فرضیه صفر را رد کرد.

6. **محاسبه آمـاره آزمون** به کمک داده‌های به‌دست‌آمده از نمونه‌گیری. درواقع، در اینجا **با فرض صحیح بودن فرضیه صفر**، مقدار آماره آزمون محاسبه می‌گردد.

7. **تفسیر نتایج**. اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار بگیرد؛ آنگاه فرضیه صفر رد می‌شود. در غیر این صورت، دلیلی برای رد فرضیه صفر نخواهیم داشت.

تصمیم‌گیری در مورد رد یـا عدم رد فرضیـه صفـر، بر اساس ناحیه رد فرضیـه صفـر (ناحیه بحرانی) در توزیع نمونه‌ای آمـاره آزمون انجام می‌شود. اما «**ناحیه بحرانی برای رد فرضیه صفر**» چیست و چگونه می‌بایست آن را تعیین نمود؟

دسته‌بندی آزمون فرضیه براساس ناحیه رد فرضیه صفر و نوع فرضیه مقابل؛

الف) آزمون فرضیه یک‌طرفه (α یک‌طرفه): به آزمونی که در فرضیه مقابلِ آن، «کمتر یا بیشتر بودنِ» آماره آزمون از یک مقدار مورد ادعا مطرح‌شده باشد؛ آزمون یک‌طرفه گفته می‌شود.

برای مثال، در یک آزمون یک‌طرفه، فرضیه تحقیق ممکن است به این صورت مطرح شود که میانگین سرعت وسایل نقلیه در بزرگراه A بیشتر از مقدار μ_0 است ($H_a{:}\mu_0<\mu_A$).

در آزمون‌های یک‌طرفه، ناحیه بحرانی همواره در یک سمت از توزیع نمونه‌ای آماره آزمون قرار می‌گیرد.

برای حالتی که آزمون به‌صورت زیر باشد، ناحیه بحرانی در سمت راست توزیع است؛

$H_0{:}\mu\leq\mu_0$

$H_a{:}\mu>\mu_0$

اگر آزمون فرضیه به‌صورت زیر باشد، ناحیه بحرانی در سمت چپ توزیع قرار خواهد داشت.

$H_0{:}\ \mu\geq\mu_0$

$H_a{:}\ \mu<\mu_0$

دسته‌بندی آزمون فرضیه براساس ناحیه رد فرضیه صفر و نوع فرضیه مقابل؛

ب) آزمون فرضیه دوطرفه (α دوطرفه): به آزمونی که در فرضیه مقابل آن، «عدم برابریِ» مقدار آماره آزمون با یک مقدار مورد ادعا مطرح‌شده باشد؛ آزمون دوطرفه گفته می‌شود.

برای مثال، در یک آزمون دوطرفه، فرضیه تحقیق ممکن است به این صورت مطرح شود که میانگین سرعت وسایل نقلیه در بزرگراه A با مقدار μ_0، تفاوت دارد ($H_a: \mu_A \neq \mu_0$).

در این نوع آزمون، ناحیه بحرانی در دو انتهای توزیع نمونه‌ای آماره آزمون قرار داشته و فرضیه صفر و فرضیه مقابل به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$H_0: \mu=\mu_0$

$H_a: \mu\neq\mu_0$

استنباط آماری (آزمون فرضیه و فاصله اطمینان)

فصل پنجم

Statistical Inference

مقدمه

بخش اول: آزمون فرضیه

بخش دوم: استنباط آماری

انجام آزمون فرضیه در مورد برابری مقدار میانگین مجهول جامعه (μ) با یک مقدار مفروض (مانند μ_0)،

ابتدا میانگین مجهول جامعه (μ) را با استفاده از آماره میانگین نمونه ($\bar{X}$) برآورد می‌کنیم.

سپس، به کمک آزمون فرضیه و با توجه به میزان نزدیکی $\bar{X}$ به مقدار مفروض برای میانگین جامعه (μ_0)، به دنبال رد کردن فرضیه صفر ($H_0: \mu=\mu_0$) خواهیم بود. واضح است که اگر μ_0 و $\bar{X}$ فاصله زیادی از هم داشته باشند؛ می‌توان با سطح اطمینان مشخصی گفت که مقدار واقعی میانگین جامعه با مقدار مفروض، متفاوت است (H_0 رد می‌شود).

اما سؤال اینجاست که از کجا بفهمیم فاصله میان μ_0 و $\bar{X}$ زیاد است؟

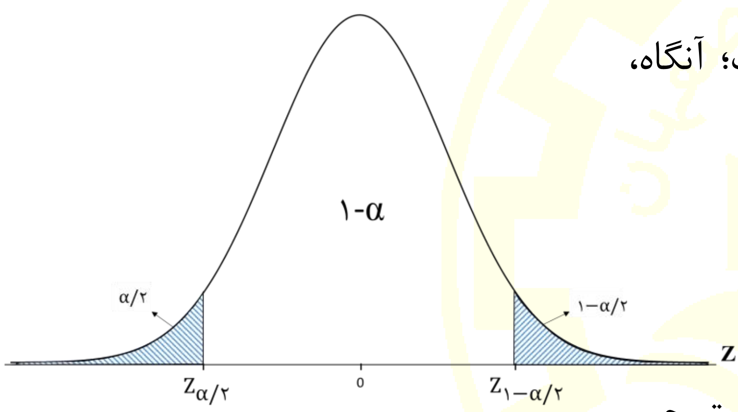
میزان این فاصله، به پراکندگی مورد انتظار برای $\bar{X}$ (یعنی، خطای استاندارد $\bar{X}$) بستگی دارد. برای مثال، تصور کنید مقدار میانگینِ جامعه A برابر با ۱۰۰ و مقدار میانگین جامعه B برابر با ۱۰۰۰۰ باشد. همچنین فرض کنید طی یک نمونه‌گیری تصادفی، میانگین نمونه برای جامعه A برابر با ۱۲۰ و برای جامعه B برابر با ۱۰۰۲۰ به دست آمده باشد. ملاحظه می‌شود که اختلافِ ۲۰ واحدیِ مشاهده‌شده میان میانگین نمونه A و میانگین جامعه؛ و نیز اختلاف مشاهده‌شده میان میانگین نمونه B و میانگین واقعی جامعه B، مقداری نسبی است.

بنابراین، برای تشخیص میزان نزدیکی میانگین نمونه به یک مقدار مفروض، نیازمندیم که درک نسبی از میزان تغییرپذیریِ میانگین نمونه داشته باشیم. برای این منظور، از **خطای استاندارد میانگین** استفاده می‌شود ($\sigma/\sqrt{n}$).

Standard Error (S.E.) of mean

اندازه تفاوت استانداردشده میان میانگین مشاهده‌شده در نمونه($\bar{X}$) و میانگین مورد ادعا(μ_0) برابر با $\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$ خواهد بود.

توزیع $\bar{X}$ هم هنگامی‌که X از یک توزیع نرمال پیروی می‌کند و هم در شرایطی که n به اندازه کافی بزرگ است ($n \geq ۳۰$)، نرمال می‌باشد.



بنابراین، اگر Z را به‌صورت زیر در نظر بگیریم و فرض کنیم فرضیه صفر صحیح است؛ آنگاه، متغیر Z از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کند،

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0\,,۱)$$

بر این اساس، اگر $Z_{۱-\alpha/۲}$ و $Z_{\alpha/۲}$ را به ترتیب صدک متناظر با احتمال $\alpha/۲$ انتهای سمت چپ و صدک متناظر با احتمال $\alpha/۲$ انتهای سمت راست توزیع نرمال استاندارد در نظر بگیریم؛

آنگاه، با توجه به توزیع نرمال استاندارد، احتمال قرار گرفتن آماره Z در بازه ($Z_{\alpha/۲}$، $Z_{۱-\alpha/۲}$) برابر با $۱-\alpha$ خواهد بود؛

$$P\,(z_{\alpha/۲} \leq Z \leq z_{۱-\alpha/۲}) = P\,(|Z| \leq z_{۱-\alpha/۲}) = ۱-\alpha$$

بدین ترتیب، *ناحیه بحرانی* برای یک آزمون فرضیه دوطرفه در مورد میانگین یک جامعه ($H_0: \mu=\mu_0$) با سطح اطمینان α، در دو انتهای توزیع نمونه‌ای Z قرار داشته و به‌صورت $Z>z_{1-\alpha/2}$ و $Z<z_{\alpha/2}$ خواهد بود.

برای مثال، اگر $\alpha=0.05$ باشد؛

$$P\,(z_{2.5\%}\leq Z\leq z_{97.5\%})=P\,(|Z|\leq 1.96)=P\,(\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\leq 1.96)=0.95$$

معادله اخیر بیان می‌کند که اگر فرضیه صفر صحیح باشد؛ درصورتی‌که یک نمونه‌گیری تصادفی انجام دهیم، آنگاه در ۹۵٪ مواقع انتظار داریم فاصله استانداردشده‌ی میان مقدار میانگین نمونه و مقدار مورد ادعا برای میانگین جامعه ($z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$)، حداقل برابر با $z_{2.5\%}=-1.96$ و حداکثر برابر با $z_{97.5\%}=1.96$ باشد. بدین ترتیب، اگر با توجه به نمونه‌گیری انجام‌شده، آماره Z در این بازه قرار نگرفت؛ می‌توان گفت احتمال این‌که میانگین واقعی جامعه، واقعاً با مقدار مورد ادعا برابر باشد (احتمال صحیح بودن فرضیه صفر)؛ بسیار کم است (کمتر از ۰.۰۵). بنابراین، می‌توان فرضیه صفر را رد کرد. البته احتمال اندکی (در اینجا ۵٪) وجود دارد که فرضیه صفر واقعاً صحیح بوده باشد و ما به‌اشتباه آن را رد کرده باشیم (احتمال وقوع خطای نوع اول).

استنباط آماری (درمورد میانگین یک جامعه)

هنگام انجام آزمون فرضیه در نرم‌افزارهـای آماری، علاوه بر مقدار آماره آزمون، مقدارِ احتمـال و یا سطح معناداری مشاهده مقدار آماره آزمون نیز ارائه می‌شود.

مقدارِ احتمال (p_{value}) درواقع برابر است با احتمال صحیح بودن فرضیه صفر با توجه به مقدار مشاهده‌شده برای آماره آزمون. به‌عبارت‌دیگر، p_{value} کمترین سطح معناداری (α) است که به ازای آن، فرضیه صفر رد می‌شود.

مقدار p_{value}، میزان شواهد موجود در نمونه که حاکی از غلط بودن فرضیه صفر بوده و از صحت فرضیه مقابل حمایت می‌کند را نشان می‌دهد.

بر این اساس، هرچه شواهد بیشتری برای رد کردن فرضیه صفر در برابر فرضیه مقابل وجود داشته باشد، مقدار قدر مطلق آماره آزمون بزرگ‌تر شده و مقدار p_{value} کوچک‌تر خواهد شد.

استنباط آماری (درمورد میانگین یک جامعه)

برای **انجام آزمون معناداری**، از دو روش زیر که معادل یکدیگر هستند، استفاده می‌شود:

الف) مقایسه مقدار آماره آزمون با مقدار بحرانی آماره موردنظر. برای مثال مقدار آماره z محاسبه‌شده را با مقدار z بحرانی (مثلاً $z=+1.96$) مقایسه می‌کنیم.

ب) مقایسه احتمال صحیح بودن فرضیه صفر بر مبنای مقدار مشاهده‌شده برای آماره آزمون (یعنی p_{value})، با مقدار بحرانی α متناظر با مقدار بحرانی آماره موردنظر. برای مثال p_{value} متناظر با آماره آزمون را با α متناظر با مقدار بحرانی آماره آزمون (مثلاً ۰/۰۵) مقایسه می‌کنیم.

درواقع، در روش دوم، مسیر معکوس روش اول را طی می‌کنیم (خروجی نرم‌افزارهای آماری).

آزمون فرضیه در مورد میانگین جامعه نرمال با واریانس معلوم (آزمون Z)

آزمون فرضیه‌ای که آماره آزمون آن به‌صورت $z=\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ باشد را آزمون z می‌نامند.

این آماره زمانی قابل‌استفاده است که بخواهیم در مورد میانگین یک جامعه نرمال استنباط انجام دهیم و واریانس جامعه (σ^2) معلوم باشد.

آزمون فرضیه در مورد میانگین جامعه نرمال با واریانس معلوم (آزمون Z)

سه نوع آزمون z با احتمال خطای نوع اول برابر با α ؛

در آزمون دوطرفه (زمانی که فرضیه مقابل به‌صورت $H_a: \mu\neq\mu_0$ است)، آزمون z، تنها در صورتی H_0 را رد می‌کند که،

$$Z=\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{۱-\alpha/۲} \quad \text{یا} \quad P_{value}=۲\times P(Z\geq z)<\alpha$$

در آزمون یک‌طرفه، زمانی که فرضیه مقابل به‌صورت $H_a: \mu>\mu_0$است، آزمون z، در صورتی H_0 را رد می‌کند که،

$$Z=\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{۱-\alpha} \quad \text{یا} \quad P_{value}=P(Z\geq z)<\alpha$$

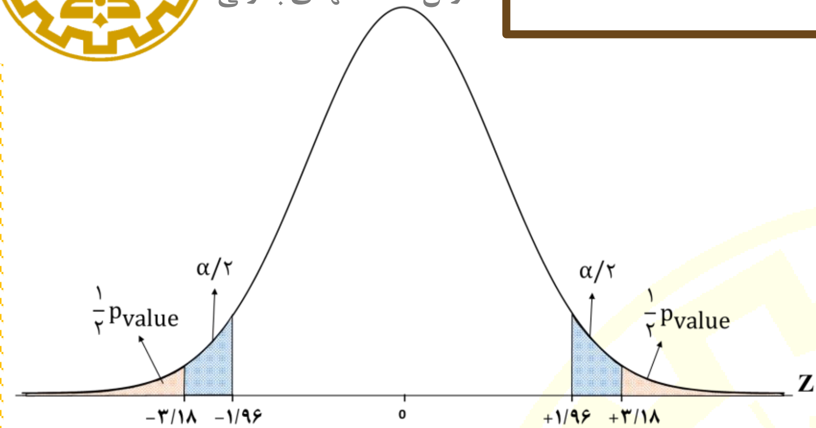
در آزمون یک‌طرفه، زمانی که فرضیه مقابل به‌صورت $H_a: \mu<\mu_0$است، آزمون z، در صورتی H_0 را رد می‌کند که،

$$Z=\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}\leq Z_{\alpha} \quad \text{یا} \quad P_{value}=P(Z\leq z)<\alpha$$

مثال؛

فرض کنید مهندسین شهرداری ادعا کرده‌اند که میانگین سرعت خودروها در یکی از خیابان‌های شهر برابر با ۶۵ $^{km/h}$ است. در یک نمونه‌گیری از سرعت وسایل نقلیه در این خیابان (n=۴۳)، سرعت میانگین مشاهده‌شده برابر ۱/۶۲ $^{km/h}$ بوده است. با فرض این‌که مطالعات پیشین حاکی از آن است که انحراف معیار واقعی سرعت خودروها در این خیابان برابر ۶ $^{km/h}$ است؛ درستی این ادعا را با روش آزمون فرضیه بررسی نمایید؟

الف) آیا میانگین واقعی سرعت تردد خودروها در این خیابان ازنظر آماری تفاوت معناداری با مقدار مورد ادعا (۶۵ $^{km/h}$) دارد؟ (آیا می‌توان با ۹۵٪ اطمینان ادعا کرد که میانگین سرعت‌ها در این خیابان، برابر با ۶۵ $^{km/h}$ می‌باشد؟) برای پاسخ به این سؤال، از آزمون Z دوطرفه استفاده می‌کنیم.



مثال؛

<u>گام اول</u>. تعیین فرضیه صفر و فرضیه مقابل $H_0: \mu=۶۵^{km/h} \quad ; \quad H_a: \mu\neq۶۵^{km/h}$

<u>گام دوم</u>. تعیین سطح معناداری (α) $\alpha=۰/۰۵$

<u>گام سوم</u>. تعیین ناحیه بحرانی (ناحیه رد فرضیه صفر) با در نظر گرفتن مقدار سطح معناداری و به کمک جدول مساحت زیر منحنی نرمال $(z_{۱-\alpha/۲}=۱/۹۶)$.

$Z > ۱/۹۶$

$Z < -۱/۹۶$

<u>گام چهارم</u>. محاسبه آماره آزمون بر اساس فرضیه صفر $\mu_0=۶۵^{km/h} \quad ; \quad \bar{X}=۶۲/۱^{km/h}$

$$Z=\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{۶۲/۱-۶۵}{۶/\sqrt{۴۳}}=-۳/۱۸$$

<u>گام پنجم</u>. تفسیر آزمون: ازآنجاکه ۱/۹۶- >۳/۱۸- است؛ با توجه به شواهد موجود، فرضیه صفر رد می‌شود. بنابراین، با سطح اطمینان ۹۵٪ می‌توان گفت متوسط سرعت خودروها در این خیابان، با مقدار مورد ادعا ($۶۵^{km/h}$) برابر نیست.

روش دوم. محاسبه P_{value}:

$$P_{value}=۲\times P(Z\leq z)=۲\times P\left(Z\leq -۳/۱۸\right)=۰/۰۰۱۵$$

ملاحظه می‌شود که $P_{value}<\alpha$ است؛ پس فرضیه صفر رد می‌شود.

آزمون فرضیه در مورد میانگین جامعه نرمال با واریانس مجهول (آزمون t)

آزمون فرضیه‌ای که آماره آزمون آن به‌صورت $t=\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{S/\sqrt{n}}$ باشد را آزمون t می‌نامند.

$$t=\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

اگر فرضیه صفر صحیح بوده و میانگین جامعه، برابر با μ_0 باشد؛ آنگاه، آماره t از توزیع t با n-۱ درجه آزادی پیروی خواهد کرد.

این آماره زمانی قابل‌استفاده است که بخواهیم در مورد میانگین یک جامعه نرمال استنباط انجام دهیم و واریانس جامعه (σ^2) نامعلوم باشد.

آزمون فرضیه در مورد میانگین جامعه نرمال با واریانس مجهول (آزمون t)

هنگامی‌که فرضیه مقابل به‌صورت $H_a: \mu \neq \mu_0$ است (آزمون tدوطرفه)، با اطمینان (۱-α) درصد انتظار داریم مقدار آماره t در بازه $(t_{n-۱,\alpha/۲}, t_{n-۱,۱-\alpha/۲})$ قرار گیرد.

بنابراین، آزمون t، تنها در صورتی فرضیه صفر را رد می‌کند که؛

$$t=\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} \geq t_{۱-\alpha/۲,\ n-۱}$$

مثال؛

مثال قبلی را با این فرض حل کنید که انحراف معیار جامعه مجهول بوده و مقادیر سرعت‌های ثبت‌شده در نمونه‌گیری به شرح زیر باشد؛

۶۰ ۶۳ ۶۷ ۵۷ ۶۲ ۶۰ ۷۱ ۶۱ ۶۵ ۶۴ ۶۷
۷۰ ۵۵ ۶۴

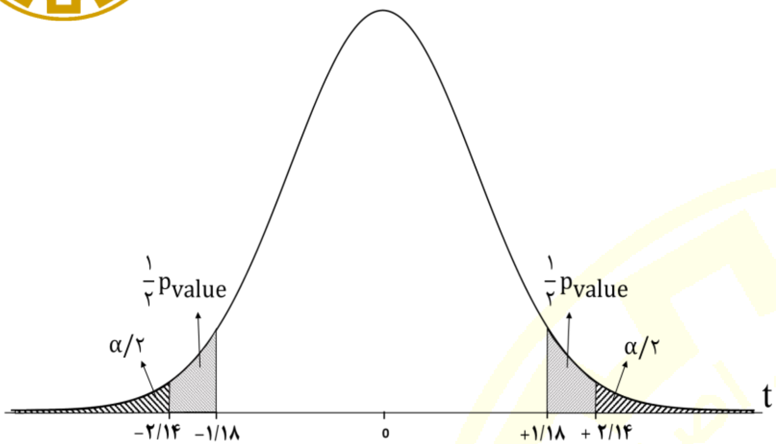
محاسبه میانگین و انحراف معیار نمونه:

$\bar{X}$= ۶۳/۶ km/h , n=۱۵ , S= ۴/۶ km/h

استنباط آماری (درمورد میانگین یک جامعه)

مدرس: محمدمهدی بشارتی

مثال؛



گام اول. تعیین فرضیه صفر و فرضیه مقابل $H_0: \mu=۶۵^{km/h}$; $H_a: \mu\neq۶۵^{km/h}$

گام دوم. تعیین سطح معناداری (α) $\alpha=۰/۰۵$

گام سوم. تعیین ناحیه بحرانی به کمک مقدار α و جدول مساحت زیر منحنی توزیع t

$|t|\geq t_{۱-\alpha/۲,\ n-۱}$

$t_{۱-\alpha/۲,\ n-۱}=۲/۱۴$

گام چهارم. محاسبه آماره آزمون $\mu_0=۶۵^{km/h}$; $\overline{X}=۶۳/۶^{km/h}$

$$t_0=\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{۶۳/۶-۶۵}{۴/۶/\sqrt{۱۵}}=-۱/۱۸$$

گام پنجم. تفسیر آزمون: ازآنجاکه ۲/۱۴ < |-۱/۱۸| برقرار نیست؛ فرضیه صفر را نمی‌توان رد کرد. بنابراین، با توجه به شواهد موجود، نمی‌توان در مورد وجود اختلاف معنادار میان میانگین واقعی سرعت‌ها با مقدار مورد ادعا ($۶۵^{km/h}$) اظهارنظر کرد.

روش دوم. محاسبه P_{value}:

$$P_{value}=۲\times P(t\leq t_0)=۲\times P\left(t\leq -۱/۱۸\right)=۰/۲۵۶$$

ملاحظه می‌شود که $P_{value}<\alpha$ برقرار نیست؛ فرضیه صفر را نمی‌توان رد کرد.

با توجه به روابط ارائه‌شده برای آماره‌های z و t، مشاهده می‌شود که افزایش اندازه نمونه، موجب افزایش مقدار آماره محاسبه شده می‌گردد. این موضوع به نوبه خود، باعث افزایش فاصله آماره محاسبه‌شده با مقدار بحرانی شده و نتایج آزمون را قابل اعتمادتر می‌کند.

فقدان شواهد کافی برای رد فرضیه صفر، لزوماً به این معنا نیست که فرضیه صفر صحیح است. بلکه این موضوع می‌تواند معانی زیر را نیز داشته باشد:

- الف) تفاوت موجود ($\overline{X}-\mu_0$) آن‌قدر اندک است که قابل شناسایی نیست.
- ب) اندازه نمونه برای شناسایی اختلاف موردنظر ($\overline{X}-\mu_0$)، کوچک است.
- ج) پراکندگی داده‌ها نسبت به مقدار تفاوت ($\overline{X}-\mu_0$) بسیار زیاد است.

برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان)

به دلایل زیر، استفاده از روش فاصله اطمینان برای انجام استنباط در مورد پارامتر جامعه، مناسب‌تر از برآورد نقطه‌ای و آزمون فرضیه است:

- برآورد نقطه‌ای، این عیب اساسی را دارد که به‌علت خطای نمونه‌گیری، نمی‌توان مطمئن شد که آماره مشاهده‌شده در نمونه، با احتمال قابل قبولی، با پارامتر جامعه مطابقت دارد. اما فاصله اطمینان، دامنه‌ای از مقادیری است که با یک سطح اطمینان معین می‌توان گفت که آن بازه شامل پارامتر جامعه می‌باشد.

- یکی از معایب آزمون فرضیه آن است که به این سؤال که آیا فرضیه صفر باید رد شود یا خیر؛ تنها به شکلِ *بله* یا خیر پاسخ می‌دهد و اطلاعات بیشتری درخصوص این‌که چه بازه‌ای از مقادیر، برای μ قابل قبول است، ارائه نمی‌کند. اما روش فاصله اطمینان این مزیت را دارا می‌باشد.

- اِعمال خطای اندازه‌گیریِ دستگاه به فواصل اطمینان، به راحتی انجام می‌شود.

برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان)

در اینجا قرار است با استفاده از مفاهیم مطرح‌شده در مورد توزیع نمونه‌ای میانگین، بازه‌ای از مقادیر به دست آید که با یک سطح اطمینان معین بتوان گفت آن بازه شامل میانگین جامعه است.

طبق قضیه حد مرکزی، انتظار داریم توزیع نمونه‌ای $\bar{X}$، به‌صورت توزیع نرمال با میانگین $\mu_{\bar{X}}=\mu$ و انحراف معیار $\sigma_{\bar{X}}=\sigma/\sqrt{n}$ باشد. بدین ترتیب، درصورتی‌که متغیر z را به‌صورت $z=\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ تعریف کنیم؛ با احتمال ٪۹۵، مقدار z در بازه (۱.۹۶+،۱.۹۶-) قرار می‌گیرد.

بر این اساس، با ٪۹۵ اطمینان می‌توان گفت بازه $(\bar{X}\times 1.96 \pm \sigma/\sqrt{n})$ شامل میانگین جامعه (μ) است. این بازه، برای سطح اطمینان (α-۱) درصد به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P\left(\bar{X}-Z_{1-\alpha/2}\times\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X}+Z_{1-\alpha/2}\times\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$

برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان)

اگر انحراف معیار جامعه (σ) معلوم باشد. در این حالت، فاصله اطمینان از رابطه زیر به دست می‌آید؛

$$\overline{X} \pm Z_{۱-\alpha/۲}(\sigma/\sqrt{n})$$

اگر انحراف معیار جامعه (σ) مجهول باشد. در این حالت، فاصله اطمینان از رابطه زیر به دست می‌آید؛

$$\overline{X} \pm t_{n-۱,۱-\alpha/۲}(S/\sqrt{n})$$

مثال؛

فاصله اطمینان میانگین سرعت خودروها در مثال‌های قبلی را به دست آورید؟

با توجه به معلوم بودن انحراف معیار جامعه، داریم:

$z_{۱-\alpha/۲}=۱/۹۶ \quad , \quad \bar{X}= ۶۲/۱^{km/h}$

$\sigma= ۶^{km/h} \quad , \quad n=۴۳$

$$۶۲/۱-۱/۹۶\times\frac{۶}{\sqrt{۴۳}}<\mu<۶۲/۱+۱/۹۶\times\frac{۶}{\sqrt{۴۳}} \quad \rightarrow \quad ۶۰/۳^{km/h}<\mu< ۶۳/۹^{\ km/h}$$

با توجه به مجهول بودن انحراف معیار جامعه، داریم:

$t_{n-۱,۱-\alpha/۲}=۲/۱۴ \quad , \quad \bar{X}= ۶۳/۶^{km/h}$

$S=۴/۶^{km/h} \quad , \quad n=۱۵$

$$۶۳/۶-۲/۱۴\times\frac{۴/۶}{\sqrt{۱۵}}<\mu<۶۳/۶+۲/۱۴\times\frac{۴/۶}{\sqrt{۱۵}} \quad \rightarrow \quad ۶۱^{\ km/h}<\mu< ۶۶^{\ km/h}$$

اندازه نمونه

یکی از مراحل مهم در هر مطالعه آماری، تعیین اندازه نمونه (n)، قبل از انجام نمونه‌گیری است.

به جمله دوم رابطه زیر (یعنی ($Z_{1-\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$))، تُلرانس یا خطای قابل‌قبول برای برآورد میانگین جامعه می‌گویند و آن را با E نشان می‌دهند.

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$$

$$E = Z_{1-\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$$

درواقع، مقدار E، بیانگر محدوده مقادیرِ بیشتر یا کمتر از میانگین نمونه ($\bar{X}$) است؛ که ما با اطمینان ($1-\alpha$) درصد، انتظار داریم این بازه شاملِ میانگین جامعه باشد.

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{E} \times Z_{1-\alpha/2}\right)^2$$

آزمون t–زوجی

هنگامی‌که بین داده‌های دو جامعه همبستگی وجود داشته باشد، از آزمون t زوجی برای بررسی برابری میانگین‌های دو جامعه استفاده می‌شود. برای مثال، در **مطالعات «قبل و بعد»** انجام می‌شوند (درصورتی‌که مشاهده شونده‌ها در هر دو جامعه، یکسان باشند) می‌توان از این آزمون بهره برد.

به‌علاوه، از آزمون t زوجی می‌توان برای **اعتبارسنجی مدل آماری** نیز استفاده کرد.

$$t_{paired}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-Y_i)-(\bar{X}-\bar{Y})\right)^{2}/(n-1)}\Big/\sqrt{n}}$$

n، اندازه هریک از نمونه‌ها

درصورتی‌که فرضیه صفر ($H_0: \mu_1-\mu_2=0$) صحیح باشد، آنگاه، این آماره از توزیع t با ۱ -n درجه آزادی پیروی خواهد کرد و

با اطمینان (α-۱) درصد می‌توان انتظار داشت که این آماره در بازه $[-t_{\alpha/2,n-1}, +t_{\alpha/2,n-1}]$ قرار بگیرد.

آزمون t–آمیخته

درصورتی‌که دو جامعه موردنظر، مستقل از هم بوده و واریانس برابری داشته باشند؛ آنگاه، آزمون t آمیخته روش مناسبی برای بررسی برابری میانگین‌های این دو جامعه خواهد بود. برای مثال، ممکن است بخواهیم برابری میانگین سرعت رسیدن خودروها به دو تقاطع مجزا (که برای مستقل شناخته شدن به‌اندازه کافی از هم فاصله دارند) را بررسی کنیم. آماره این آزمون از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$t_{pooled}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{(n_۱-۱)S_X^۲+(n_۲-۱)S_Y^۲}{n_۱+n_۲-۲}}\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}}$$

در صورت صحیح بودن فرضیه صفر ($H_0: \mu_۱-\mu_۲=0$) آنگاه، این آماره از توزیع t با $n_۱+n_۲-۲$ درجه آزادی پیروی خواهد کرد و با اطمینان ($۱-\alpha$) درصد می‌توان انتظار داشت که این آماره در بازه

$[-t_{\alpha/۲,\ n_۱+n_۲-۲}$ ، $t_{\alpha/۲,\ n_۱+n_۲-۲}]$ قرار بگیرد.

آزمون t–با واریانس نابرابر

هنگامی‌که دو جامعه موردمطالعه، مستقل از هم بوده و واریانس یکسانی ندارند، از آزمون t با واریانس نابرابر برای بررسی برابری میانگین‌های آن‌ها استفاده می‌شود. آماره آزمون t با واریانس نابرابر از رابطه زیر به دست می‌آید

$$t_{\text{unequal variances}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1}+\frac{S_Y^2}{n_2}}}$$

در صورت صحیح بودن فرضیه صفر ($H_0: \mu_1-\mu_2=0$)، این آماره از توزیع t با df درجه آزادی پیروی خواهد کرد؛ که درجه آزادی از رابطه روبرو محاسبه می‌شود.

$$df=\frac{\left(\frac{S_x^2}{n_x}+\frac{S_y^2}{n_y}\right)^2}{\left(\left(\frac{S_x^2}{n_x}\right)^2/n_x+1\right)+\left(\left(\frac{S_y^2}{n_y}\right)^2/n_y+1\right)}-2$$

درصورتی‌که فرضیه صفر صحیح باشد، با اطمینان $(1-\alpha)$ درصد می‌توان انتظار داشت که این آماره در بازه $[-t_{\alpha/2,df}\,،\,t_{\alpha/2,df}]$ قرار بگیرد.

برآورد فاصله اطمینان برای تفاوت میانگین‌های دو جامعه

برای محاسبه فاصله اطمینانِ (۱-α) درصدی برای اختلافِ میانگین‌های دو جامعه ($\mu_X - \mu_Y$) در هریک از سه حالتِ t زوجی، t آمیخته و t با واریانس نابرابر، از رابطه زیر استفاده می‌شود؛

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm (t_{\alpha/۲,df} \times SE(\bar{X} - \bar{Y}))$$

که در آن، $SE(\bar{X} - \bar{Y})$ خطای استاندارد تفاوت میانگین‌های دو جامعه و

df، همان درجه‌های آزادی مورداستفاده در آزمون‌های t است.

استنباط آماری (در مورد واریانس یک جامعه)

یکی از انواع آزمون فرضیه برای واریانس‌ها به‌صورت زیر است.

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

در این حالت، فرضیه صفر بیان می‌کند که واریانس جامعه (σ^2) تفاوت معناداری با مقدار مورد ادعا (σ_0^2) ندارد و تفاوت مشاهده‌شده میان واریانس نمونه با مقدار مورد ادعا برای واریانس جامعه، تصادفی است.

درحالی‌که فرضیه مقابل بیان می‌کند که تفاوت مشاهده‌شده میان واریانس نمونه با مقدار مورد ادعا تصادفی نبوده و از نظر آماری معنادار است.

برای انجام آزمون فرضیه، آماره آزمون را بر اساس فرضیه صفر، به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

اگر فرضیه صفر صحیح باشد و واریانس جامعه واقعاً برابر با σ_0^2 باشد؛ آنگاه، آماره χ^2 دارای توزیع کای‌دو با n-1 درجه آزادی خواهد بود.

استنباط آماری (در مورد واریانس یک جامعه)

بدین ترتیب، در حالت آزمون دوطرفه، شرط رد شدن فرضیه صفر در آزمون کای‌دو برای واریانس یک جامعه به‌صورت زیر است.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$$

یا

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$$

به‌عبارت‌دیگر، اگر فرضیه صفر صحیح باشد، انتظار می‌رود نسبت S^2/σ_0^2 نزدیک به ۱ باشد. درصورتی‌که این نسبت، بسیار کوچک یا بسیار بزرگ باشد، فرضیه صفر رد می‌شود. همچنین، فواصل اطمینانِ $(1-\alpha)$ درصدی متناظر برای σ^2 به‌صورت زیر است؛

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}$$

مثال؛

پس از نمونه‌گیری از سرعت خودروها در یک خیابان معین ($n=۲۲$)، میانگین سرعت‌ها برابر با ۶/۶۳$^{km/h}$ و انحراف معیار آن برابر با ۱/۵ به‌دست‌آمده است. می‌خواهیم بدانیم آیا انحراف معیار واقعی سرعت خودروها در این خیابان، تفاوت معناداری با مقدار ۶ کیلومتربرساعت دارد؟ علاوه بر این، مطلوب است فاصله اطمینان ۹۵٪ برای واریانس سرعت‌ها در این خیابان.

گام اول. تعیین فرضیه صفر و فرضیه مقابل

$$H_0: \sigma^۲=\sigma_0^۲ \quad , \quad H_a: \sigma^۲\neq\sigma_0^۲$$

گام دوم. تعیین سطح معناداری (α)

$$\alpha=۰/۰۵$$

گام سوم. تعیین ناحیه بحرانی (ناحیه رد فرضیه صفر) به کمک جدول مساحت زیر منحنی کای‌دو و مقدار α:

$$\chi^۲=\frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_0^۲}>\chi^۲_{\alpha/۲,n-۱}$$

$$\chi^۲=\frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_0^۲}<\chi^۲_{۱-\alpha/۲,n-۱}$$

$$\chi^۲_{\alpha/۲,n-۱}=۳۵/۴۸ \quad , \chi^۲_{۱-\alpha/۲,n-۱}=۱۰/۲۸$$

گام چهارم. محاسبه آماره آزمون

$$S=۵/۱^{km/h} \quad ; \quad \sigma_0=۶^{km/h}$$

$$\chi^۲=\frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_0^۲}=\frac{(۲۱)\times ۵/۱^۲}{۶^۲}=۱۵/۱۷$$

گام پنجم. تفسیر آزمون: ازآنجاکه شرط ۳۵/۴۸ ≥ ۱۵/۱۷ و یا ۱۰/۲۸ ≥ ۱۵/۱۷ برقرار نیست؛ نمی‌توان فرضیه صفر را رد کرد.

فاصله اطمینان. با توجه به داده‌های مسئله، فاصله اطمینان ۹۵٪ به‌صورت (۲۱/۴۵ ، ۵۳/۱۳) به دست می‌آید. بنابراین، با ۹۵٪ اطمینان می‌توان گفت که واریانس واقعی سرعت‌ها در این خیابان در بازه (۲۱/۴۵ ، ۵۳/۱۳) قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که عدد ۳۶ در این بازه قرار می‌گیرد؛ بنابراین نمی‌توان گفت واریانس واقعی جامعه، تفاوت معناداری با واریانس مورد ادعا دارد.

استنباط آماری (در مورد واریانس دو جامعه)

مدرس: محمدمهدی بشارتی

آزمون تساوی واریانس‌های دو جامعه است. در این حالت، فرضیه صفر و مقابل، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

آزمون معمول برای بررسی این فرضیه، آزمون F می‌باشد. آماره این آزمون به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F = \frac{\sigma_2^2 \times S_1^2}{\sigma_1^2 \times S_2^2}$$

اگر فرضیه صفر صحیح باشد، آنگاه، آماره F دارای توزیع F با $df_1=n_1-1$ و $df_2=n_2-2$ درجه آزادی خواهد بود. بر این اساس، شروط رد فرضیه صفر به‌صورت زیر خواهد بود؛

$$F < F_{1-\alpha/2,\ df_1,\ df_2}$$

یا

$$F > F_{\alpha/2,\ df_1,\ df_2}$$

که در آن، df_1، درجه آزادی صورت، df_2، درجه آزادی مخرج و $F_{\alpha/2,df_1,df_2}$ و $F_{1-\alpha/2,df_1,df_2}$، به ترتیب، صدک‌های متناظر با $\alpha/2$ و $1-\alpha/2$ در توزیع F با df_1 و df_2 درجه آزادی می‌باشند.

استنباط آماری (در مورد واریانس دو جامعه)

به‌عبارت‌دیگر، اگر آماره آزمون در بازه زیر قرار نگیرد، فرضیه صفر د می‌شود.

$$F_{1-\alpha/2,\ df_1,\ df_2} < \frac{\sigma_2^2 \times S_1^2}{\sigma_1^2 \times S_2^2} < F_{\alpha/2,\ df_1,\ df_2}$$

بنابراین، فـاصله اطمینـان (α-۱) درصدی برای نسبت واریانس‌های دو جامعه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2,\ df_1,\ df_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2,\ df_1,\ df_2}}$$

بر این اساس، اگر فاصله اطمینان (α-۱) درصدی ارائه‌شده برای نسبت واریانس‌های دو جامعه، شامل عدد یک نبـاشد، آنگاه، فرضیه صفر در سطح اطمینـان α، رد می‌شود.

توجه شود ازآنجاکه مقـادیر $F_{1-\alpha/2,\ df_1,\ df_2}$ در جداول توزیع F ارائه نمی‌شود، فـاصله اطمینـان (α-۱) درصدی برای نسبت واریانس‌های دو جامعه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2,\ df_1,\ df_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2,\ df_2,\ df_1}\right)$$

به کمک این رابطه، می‌توان تنها با داشتن $F_{\alpha/2,\ df_1,\ df_2}$، حدود بالا و پایین فاصله اطمینان را به دست آورد.

استنباط آماری (در مورد واریانس دو جامعه)

مدرس: محمدمهدی بشارتی

مثال؛

به‌منظور کاهش واریانس سرعت خودروها در قطعه‌ای از یک جاده برون‌شهری، اصلاحات هندسی و ترافیکی انجام شده است. در دو نمونه‌گیری ($n_۲=n_۱=۱۰۱$) از سرعت خودروها در قبل و بعد از انجام اقدامات مذکور، انحراف استاندارد سرعت خودروها به ترتیب برابر با ۳/۹ و ۱/۵ کیلومتربرساعت به دست آمده است. می‌خواهیم بدانیم آیا تفاوت مشاهده‌شده در واریانس سرعت خودروها پس از انجام اقدامات مذکور در این قطعه، ازنظر آماری معنادار است یا خیر؟

گام اول. تعیین فرضیه صفر و فرضیه مقابل

$H_۰: \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \quad ، \quad H_a: \sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$

درواقع، فرضیه صفر بیان می‌کند که تفاوت مشاهده‌شده در واریانس سرعت‌ها در دو نمونه قبل و بعد از اصلاح، تنها به دلیل تصادفی بودن نمونه‌گیری است؛ و ازنظر آماری، تفاوت معناداری میان واریانس سرعت‌ها در قبل و بعد از اصلاح هندسی و ترافیکی وجود ندارد.

گام دوم. تعیین سطح معناداری (α)

$\alpha=۰/۰۵$

گام سوم. تعیین ناحیه بحرانی به کمک جدول مساحت زیر منحنی توزیع F و مقدار α:

$F_۰<F_{۱-\alpha/۲, df_۱, df_۲} \quad ، \quad F_۰>F_{\alpha/۲, df_۱, df_۲}$

$F_{۰/۰۲۵ ،۱۰۰ ،۱۰۰} = ۱/۴۸$

گام چهارم. محاسبه آماره آزمون با فرض صحیح بودن فرضیه صفر ($\sigma_۱^۲=\sigma_۲^۲$):

$S_۱^۲=۸۵/۹۴^{km/h} \quad ; \quad S_۲^۲=۲۵/۶۸^{km/h}$

$$F_۰=\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}=\frac{۸۵/۹۴}{۲۵/۶۸}=۳/۳۵$$

گام پنجم. تفسیر آزمون: ازآنجاکه مقدار آماره محاسبه‌شده ($F_۰=۳/۳۵$) بیشتر از مقدار بحرانی (۱/۴۸) است؛ فرضیه صفر رد می‌شود. بنابراین، با اطمینان ٪۹۵ می‌توان گفت واریانس سرعت‌ها پس از انجام اقدامات مذکور، به‌طور معناداری کاهش یافته است.