

به نام خداوند بخشنده مهربان

روش‌های آماری و اقتصادسنجی

در تحلیل و مدل‌سازی داده‌های حمل و نقلی

محمد مهدی بشارتی

besharati@iut.ac.ir

توزیع های احتمالاتی

فصل
چهارم

Probability distributions

مقدمه

بخش اول: توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

بخش دوم: توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته



احتمال وقوع (یا مشاهده) هریک از مقادیر ممکن برای یک متغیر تصادفی را چگونه برآورد کنیم؟

برای مدل کردن مقادیر این متغیرهای تصادفی از تئوری احتمال استفاده می شود.

مجموعه مقادیری که یک متغیر تصادفی می تواند به خود بگیرد، دارای یک توزیع احتمالاتی است.

توزیع احتمال، نموداری است که احتمال وقوع هریک از مقادیر ممکن برای یک متغیر تصادفی را نمایش می دهد.

رابطه ای که تمام مقادیر متغیر تصادفی (X) را به همراه احتمال های مربوطه نشان دهد؛ **تابع احتمال** $f(x)$ می نامند.



اگر مقادیر ممکن (یا همان داده‌های مشاهده‌شده یا پیشامدها) به صورت اعداد صحیح باشند؛ متغیر مورد نظر، **متغیر گسسته** است. مثلاً:

✓ تعداد وسایل نقلیه وارد شده به یک تقاطع در یک ساعت، تعداد عابرین پیاده، تعداد تصادفات سالانه در یک استان و غیره.

از «تابع جرم احتمال» (Probability Mass Function (PMF))، برای برآورد احتمال مشاهده مقادیر متغیرهای **گسسته** استفاده می‌شود.

برخی از توزیع‌های گسسته: **توزیع دو جمله‌ای، توزیع دو جمله‌ای منفی و توزیع پواسون**



□ اگر مقادیر ممکن (یا همان داده‌های مشاهده‌شده یا پیشامدها) بصورت اعداد حقیقی باشند، متغیر مورد نظر، **متغیر پیوسته** است. مثلاً:

✓ مدت زمان سپری شده میان ورود دو خودرو متوالی به یک پارکینگ، زمان سفر در یک قطعه بزرگراهی، سرعت تردد خودروها در مقطع از یک جاده برون شهری و غیره.

□ از «**تابع چگالی احتمال** (Probability Density Function (PDF))»، برای برآورد احتمال مشاهده مقادیر متغیرهای پیوسته استفاده می‌شود.

□ برخی از توزیع‌های پیوسته: **توزیع‌های نرمال، لگ‌نرمال، نمایی، گاما و کای دو**

توزیع های احتمالاتی

فصل
چهارم

Probability distributions

مقدمه

بخش اول: توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

بخش دوم: توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته



توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

تابع جرم احتمال

✓ یک متغیر گسسته، دارای مقادیر معینی است که هر کدام از این مقادیر، با احتمال معینی، رخ می دهد.

✓ گاهی اوقات، احتمالات متناظر با هریک از این مقادیر را در جدول هایی به نام «**جدول فراوانی**» ارائه می کنند.

x_n	...	x_3	x_2	x_1	x	مقادیر محتمل
$f(x_n)$...	$f(x_3)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$	$f(x)$	احتمال مشاهده هر مقدار



تابع جرم احتمال

- ✓ اغلب آسان تر است که تمام احتمالات مربوط به یک متغیر تصادفی X را با فرمولی نمایش دهند که تابعی از مقادیر X بوده $(f(x))$ و به آن، **تابع احتمال** می گویند.
- ✓ مقدار این تابع به ازای $X = x$ ، احتمال رخ دادن پیشامد مشخص x را نشان می دهد.
- ✓ در حالتی که متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع احتمال را **تابع جرم احتمال** می نامند.
- ✓ تابع جرم احتمال X ، به ازای هر مقدار x در برد X به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = P(X = x)$$

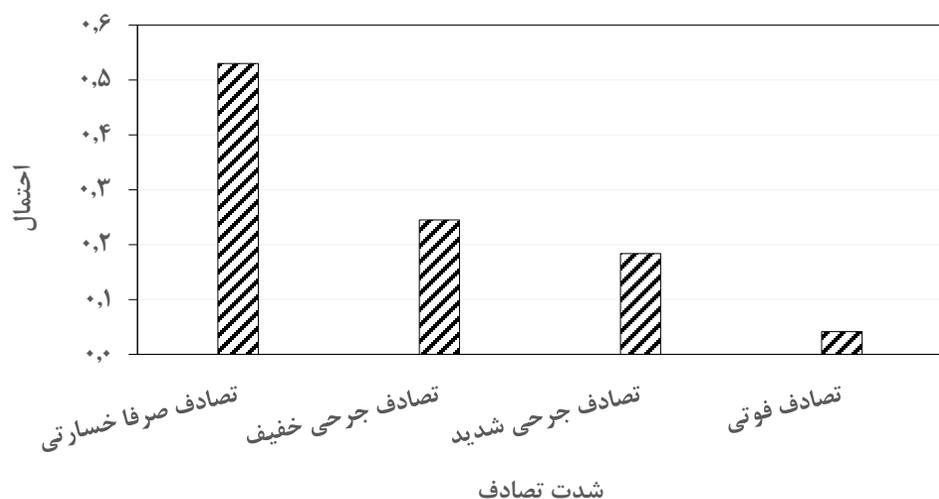
✓ همواره $\sum_i f(x_i) = 1$



توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

توزیع احتمال گسسته

اگر مقادیر تابع احتمال یک متغیر تصادفی $(f(x))$ را به ازای تمام x های موجود در برد آن در یک نمودار به صورت زوج های $((x_i), (f(x_i)))$ رسم کنیم؛ نمودار توزیع احتمال به دست می آید.



○ به دلیل گسسته بودن مقادیر متغیر، نمودار توزیع احتمال یک متغیر گسسته به صورت یک **نمودار میله ای** و یا **مسطیلی** می باشد.

○ هنگامی که فاصله بین x ها مساوی باشد از نمودار مستطیلی و در غیر این صورت از نمودار میله ای استفاده می شود.



توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

تابع توزیع (تابع توزیع تجمعی) گسسته

احتمال این که مقدار متغیر تصادفی گسسته X از عدد حقیقی x_0 کوچکتر یا مساوی باشد چقدر است؟

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{z \leq x} f(z)$$

➤ پیش از توسعه نرم افزارهای آماری، مقادیر تابع توزیع برای توزیع های آماری معروف در قالب جداول آماده ارائه می شد. اما امروزه از نرم افزارهای کامپیوتری استفاده می شود.

➤ **نمودار توزیع تجمعی احتمال:** مقادیر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی $(F(x))$ به ازای تمام x های موجود در برد آن.

➤ نمودار توزیع تجمعی برای متغیرهای گسسته به صورت **نمودار پله ای** خواهد بود



آزمایش برنولی

سوال: آزمایش برنولی چیست؟ مثال از حوزه حمل و نقل و ترافیک؟

➤ آزمایش (یا مشاهده) برنولی، آزمایشی است که هر بار انجام آن، به یکی از نتایج ناسازگار موفقیت یا شکست می انجامد.

➤ مثلاً:

- جنسیت هر مسافری که در هر لحظه وارد ایستگاه BRT می شود (مرد-زن)
- سواد دار بودن راننده هر یک از اتوبوس های یک ترمینال (باسواد-بی سواد)
- و ...



توزیع دو جمله ای

اگر یک آزمایش برنولی را n مرتبه به طور مستقل از هم تکرار کنیم (n) و احتمال موفقیت در هر آزمایش، ثابت باشد (p)؛ این نوع آزمایش را آزمایش دو جمله ای می گویند.

اگر متغیر تصادفی X را به صورت «تعداد موفقیت ها در n آزمایش مستقل برنولی» تعریف کنیم، تابع جرم احتمال آن به شرح زیر بوده و دارای توزیع دو جمله ای خواهد بود که با نماد $\text{Bin}(n, p)$ نشان داده می شود؛

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad , \quad x=0, 1, 2, \dots, n$$

X : (متغیر تصادفی) تعداد موفقیت ها در n آزمایش مستقل برنولی

n : تعداد دفعات انجام آزمایش های برنولی

p : احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی



توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

توزیع دو جمله ای

مثال:

یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت ۰/۴۵ را ۱۰ مرتبه تکرار کرده ایم.

مطلوبست محاسبه احتمال مشاهده ۰، ۱، ۲، ...، ۱۰ پیروزی در این آزمایش دو جمله ای؟

x	P(X=x)
1	0.0207
2	0.0763
3	0.1665
4	0.2384
5	0.2340
...	
10	0.0003



$$f(4) = P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.45^4 (1 - 0.45)^6$$

$$= \frac{10!}{4! 6!} \times 0.041 \times 0.0277 = 0.2384$$

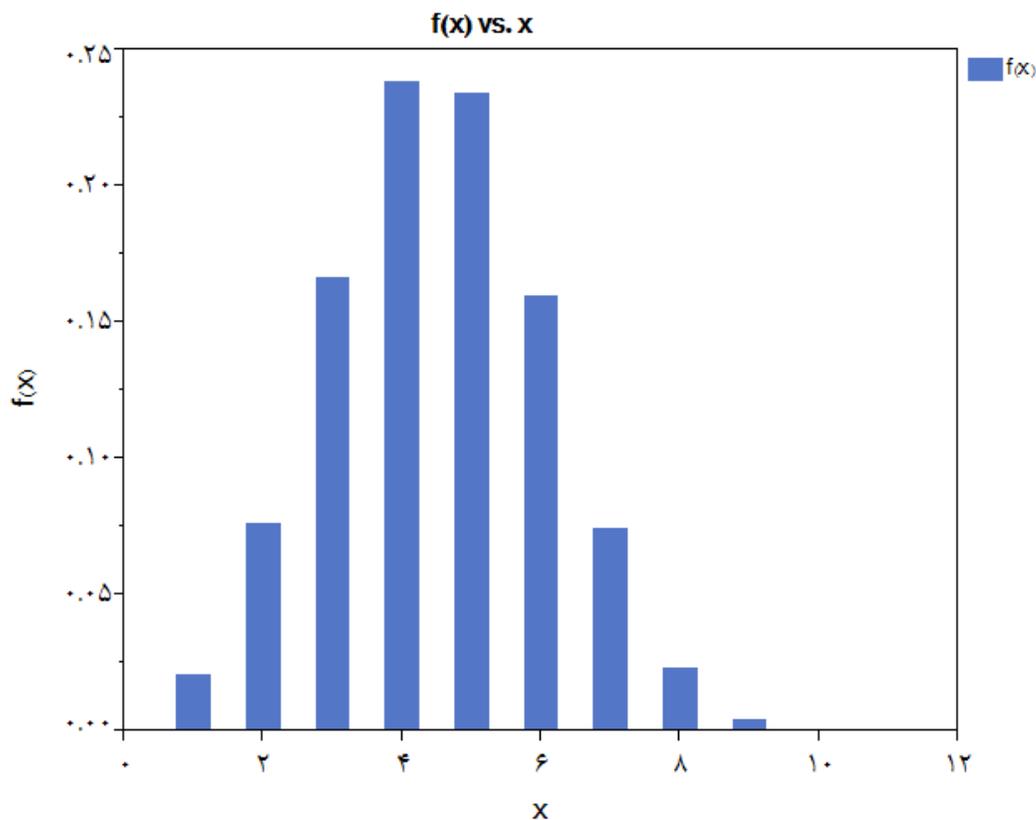


توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

توزیع دو جمله ای

در مثال قبل، اگر توزیع مقادیر احتمال به دست آمده برای مقادیر مختلف X را به صورت نمودار رسم کنیم، یک نمودار توزیع دو جمله ای خواهیم داشت.

x	$P(X=x)$
1	0.0207
2	0.0763
3	0.1665
4	0.2384
5	0.2340
...	
10	0.0003





توزیع دو جمله ای منفی

اگر آزمایش برنولی را آنقدر ادامه دهیم تا r موفقیت به دست آوریم و پس از مشاهده r -امین موفقیت، آزمایش متوقف شود؛ چنین آزمایشی را آزمایش دو جمله ای منفی می نامیم.

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی دو جمله ای منفی به صورت زیر است؛

$$B^*(x, r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad x=r, r+1, r+2, \dots$$

r : تعداد موفقیت (در مدل های رگرسیون دو جمله ای منفی، r پارامتر "بیش پراکندگی" نامیده می شود).

x : تعداد دفعات انجام آزمایش تا رسیدن به r -امین موفقیت

p : احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی



توزیع دو جمله ای منفی

احتمال مشاهده r -امین موفقیت در X -امین آزمایش، در واقع برابر است با احتمال اینکه دو حادثه زیر رخ دهد؛

۱- $(r-1)$ موفقیت در $(X-1)$ آزمایش رخ دهد (احتمال دو جمله ای)،

۲- (r) امین موفقیت در (X) امین آزمایش رخ دهد (احتمال اینکه نتیجه آزمایش X -ام، موفقیت باشد)،

$$B^*(x, r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad x=r, r+1, r+2, \dots$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$



توزیع دو جمله ای منفی

❖ مثال

از یک تکنسین خواسته شده که هرچه سریع تر ۳ تابلو هشداردهنده نصب شده در حاشیه یک جاده را با تابلوهای سالم تعویض کند. بر اساس تجربه گذشته خود، این تکنسین انتظار دارد که ۷۰٪ از تابلوهای موجود در انبار برای نصب سریع، آماده بوده و ۳۰٪ مابقی برای استفاده نیازمند تغییر و تعمیر است. در صورتی که در حال حاضر ۵ تابلو در انبار وجود داشته باشد، چقدر احتمال دارد که تکنسین، سومین تابلو موردنیاز خود را در هنگام بررسی پنجمین تابلو بیابد؟

$r =$ تعداد پیروزی (تعداد تابلوهای آماده برای نصب سریع) $= 3$

$x =$ تعداد کل مشاهدات (تعداد تابلوهای موجود در انبار) $= 5$

$p =$ احتمال پیروزی (مشاهده تابلوی آماده برای نصب) $= 0.7$

$$P(X=5) = \frac{(x-1)!}{(r-1)! \times (x-r)!} \times p^r (1-p)^{x-r} = \frac{(5-1)!}{(3-1)! \times (5-3)!} \times (0.7)^3 (0.3)^2 = 0.185$$

بنابراین، احتمال اینکه پس از مشاهده پنجمین تابلو درون انبار، مجموعه ۳ تابلو موردنیاز یافته شود برابر با ۰/۱۸۵ می باشد. توجه شود که این احتمال که پس از مشاهده سومین تابلو و یا چهارمین تابلو درون انبار، سومین تابلو سالم موردنیاز یافته شود نیز وجود دارد. به عنوان تمرین، این احتمالات را محاسبه نمایید.



توزیع هندسی

اگر در آزمایش دوجمله‌ای منفی، تعداد آزمایش‌ها را تا رسیدن به اولین موفقیت (شکست) ادامه دهیم؛ به چنین آزمایشی، آزمایش هندسی گفته می‌شود. تابع توزیع هندسی به صورت زیر است؛

$$f(x) = P(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad x=1, 2, 3, \dots$$

x : تعداد دفعات انجام آزمایش تا مشاهده اولین موفقیت (شکست)
 p : احتمال موفقیت (شکست) در هر آزمایش برنولی

مثال‌هایی از رویدادهای دارای توزیع هندسی؟

- بازرسی از محصولات کارخانه تا زمانی ادامه می‌یابد تا اولین محصول خراب مشاهده شود.
- پیچ‌های گاردریل‌ها بازدید شود تا زمانی که اولین پیچ خراب مشاهده شود.
- ؟....



توزیع پواسون

اگر متغیر تصادفی X بصورت «تعداد دفعات وقوع یک رخداد در یک بازه زمانی یا فاصله مکانی معین» تعریف شود، آنگاه می توان گفت متغیر X از توزیع پواسون پیروی می کند. برای مثال:

- تعداد تصادفات ترافیکی سالانه در یک تقاطع،
- تعداد وسایل نقلیه ورودی به یک تقاطع در یک بازه زمانی معین
- تعداد عابرین پیاده که در یک ساعت به یک تقاطع می رسند
- و

در موارد بالا، می توان فراوانی وقوع رویداد موردنظر در یک بازه زمانی معین را به کمک توزیع پواسون مدل کرد.

احتمال اینکه یک حادثه به تعداد مشخصی در فاصله زمانی یا مکانی ثابتی رخ دهد را شرح می دهد؛ به شرط اینکه این حوادث با نرخ وقوع مشخصی و مستقل از زمان آخرین حادثه رخ دهند.



توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

توزیع پواسون

- یک آزمایش پواسون، **لزوماً** دارای خصوصیات زیر است:
- میانگین تعداد موفقیت‌ها در بازه زمانی یا مکانی مشخص شده (نرخ وقوع)، ثابت و معلوم است.
- تعداد موفقیت‌های مشاهده شده در یک بازه زمانی (مکانی) معین، مستقل از تعداد موفقیت‌های مشاهده شده در یک بازه زمانی (مکانی) دیگر است.
- احتمال موفقیت در یک بازه زمانی کوتاه (ناحیه مکانی کوچک)، متناسب با آن فاصله زمانی (مکانی) بوده و به تعداد موفقیت‌هایی که در خارج از آن فاصله زمانی (مکانی) رخ می‌دهد، بستگی نداشته باشد.
- احتمال وقوع بیش از یک موفقیت در یک بازه زمانی کوتاه (ناحیه مکانی کوچک)، قابل اغماض باشد.



توزیع پواسون

تابع جرم احتمال توزیع پواسون به صورت زیر است

$$f(X) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots$$

X : تعداد دفعات وقوع رخداد موردنظر در فاصله زمانی (مکانی) معین
 λ : میانگین تعداد دفعات وقوع رخداد موردنظر در فاصله زمانی (مکانی) معین

یکی از ویژگی های توزیع پواسون آنست که **میانگین و واریانس این توزیع با هم برابر بوده و مساوی λ می باشد.**

از توزیع پواسون اغلب برای مدل سازی رویدادهای نادر با فراوانی اندک استفاده می شود.
یکی از مهم ترین کاربردهای این توزیع در مهندسی حمل و نقل، مدل سازی فراوانی تصادفات می باشد.
مقادیر $P(X \leq r)$ برای توزیع پواسون به ازای مقادیر مختلف λ در جداول آماری ارائه می شود.



توزیع پواسون

مثال:

میانگین تعداد کشتی‌هایی که روزانه وارد بندر می‌شوند، ۱۰ فروند است. زیرساخت‌های این بندر قادر است حداکثر به ۱۵ فروند کشتی در روز سرویس دهد. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه در یک روز معین، این بندر نتواند پاسخگوی تعداد کشتی‌هایی باشد که در آن پهلو می‌گیرند؟

اگر تعداد کشتی‌های وارد شده به بندر را بعنوان متغیر تصادفی X در نظر بگیریم؛ می‌توان گفت در این مسئله، X از توزیع پواسون با $\lambda=10$ پیروی می‌کند. بدین ترتیب،

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x; 10) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

با توجه به جدول توزیع پواسون، $\sum_{x=0}^{15} p(x; 10) = 0.9513$ می‌باشد.



توزیع پواسون

نکته:

اگر تعداد دفعات وقوع رخداد موردنظر در واحد زمان از توزیع پواسون با پارامتر λ پیروی کند، آنگاه، تعداد دفعات وقوع رخداد موردنظر در t واحد زمانی از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda.t$ پیروی خواهد کرد. در واقع، در این حالت، X ، تعداد دفعات وقوع رخداد موردنظر در t واحد زمانی خواهد بود.

$$f(X)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda t} \lambda t^x}{x!}$$



تقریب توزیع دو جمله ای با توزیع پواسون

علاوه بر کاربرد قبلی، از توزیع پواسون اغلب برای مدل سازی رویدادهایی استفاده می شود که دارای تعداد وقایع بالقوه بسیار زیاد هستند؛ اما احتمال وقوع هر واقعه بسیار کم است.

هرگاه در توزیع دو جمله ای، n به سمت بینهایت و p به سمت صفر یا یک میل کند، آنگاه می توان فرض کرد که میانگین موفقیت ها $(n.p)$ ثابت بوده و برابر با λ است. در این حالت می توان احتمال های متناظر با **توزیع دو جمله ای** را با **توزیع پواسون** تقریب زد $(b(x; n, p) \sim p(x; np))$.

✓ برای n های بزرگ (بزرگتر از ۲۰) و p های کوچک (کوچکتر از ۰.۰۵) می توان از این تقریب استفاده کرد.

مثال:

بر اساس مطالعات گذشته بر روی جاده های یک استان، مشخص شده که به طور متوسط در ۱٪ موارد، پایه گاردریل به ریل متصل نشده است. مطلوبست احتمال اینکه با بررسی تصادفی ۲۰۰ پایه گاردریل در راه های این استان، هیچ پایه ی بدون اتصال به گاردریل مشاهده نشود؟



تقریب توزیع دو جمله ای با توزیع پواسون

پاسخ: بررسی اتصال یا عدم اتصال هر پایه به گاردریل، به منزله یک آزمایش برنولی بوده که از قبل می دانیم احتمال موفقیت در هریک از این آزمایش ها (یعنی مشاهده عدم اتصال پایه به گاردریل) برابر با ۰/۰۱ است. اگر متغیر تصادفی X را بصورت تعداد پایه های بدون اتصال در میان ۲۰۰ پایه مشاهده شده در نظر بگیریم؛ آنگاه می توان گفت X در این مسئله از توزیع دو جمله ای پیروی می کند. بنابراین

$$P(X = 0) = \binom{200}{0} 0.01^0 (0.99)^{200-0} = 0.134$$

حل با استفاده از تقریب توزیع پواسون. از هر ۱۰۰ پایه، یک پایه بدون اتصال وجود دارد ($\lambda=1$). به عبارت دیگر، می توان گفت انتظار می رود بطور متوسط، به ازای هر ۲۰۰ پایه، ۲ عدد بدون اتصال باشد. بنابراین

$$P(X = 0) \cong \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = 0.1353$$



توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

توزیع فوق هندسی

مجموعه‌ای از N عضو **متناهی** را در نظر بگیرید که K عضو آن دارای یک ویژگی و بقیه، فاقد این ویژگی هستند. مانند ۵۰۰ لامپ موجود در یک جعبه که ۳۰۰ تای آن سالم و بقیه معیوب باشند.

حال فرض کنید می خواهیم از این مجموعه، n عضو به صورت تصادفی (**بدون جایگذاری**) انتخاب کنیم.

در این صورت اگر متغیر تصادفی X تعداد عناصری در n برداشت باشد که دارای ویژگی مورد نظر هستند، آنگاه X دارای توزیع فوق هندسی است. K, N و n اعداد صحیح و مثبت‌اند.

N : تعداد اعضای مجموعه

K : تعداد اعضای جامعه که دارای ویژگی خاص هستند.

n : تعداد اعضای انتخاب شده از درون مجموعه

k : تعداد اعضای نمونه که دارای ویژگی خاص هستند

متغیر تصادفی X : تعداد اعضای دارای ویژگی خاص از میان n عضو انتخاب شده

تابع جرم احتمال توزیع فوق هندسی

$$p(k) = p(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

توجه: توزیع دو جمله‌ای احتمال k موفقیت در n مشاهده را با جایگذاری محاسبه می‌کند.



تقریب توزیع فوق هندسی با توزیع دوجمله‌ای

هنگامی که اندازه جامعه N نسبت به اندازه نمونه n خیلی بزرگتر باشد؛ آنگاه نمونه‌گیری بدون جایگذاری تفاوت چندانی با نمونه‌گیری با جایگذاری نخواهد داشت.

در این شرایط می‌توان از توزیع دوجمله‌ای به جای توزیع فوق هندسی استفاده کرد.

اهمیت این موضوع آن است که توزیع دوجمله‌ای پارامترهای کمتری دارد و نیاز به دانستن اندازه جامعه و نیز تعداد اعضای دارای ویژگی خاص در جامعه نیست؛ و صرفاً کافیست که نسبت آن‌ها را داشته باشیم.

به طور کلی با افزایش N به سمت بینهایت، برای یک n ثابت، توزیع فوق هندسی با پارامترهای N ، K ، و n به سمت توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p میل می‌کند (p همان نسبت K به N (احتمال موفقیت) است).

توزیع های احتمالاتی

فصل
چهارم

Probability distributions

مقدمه

بخش اول: توابع جرم احتمال و توزیع های گسسته

بخش دوم: توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

تابع چگالی احتمال،

- ✓ هنگامی که متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع احتمال را تابع چگالی احتمال می نامند $(f(x))$.
- ✓ از آنجا که یک متغیر پیوسته دارای بینهایت مقدار است، احتمال اینکه متغیر تصادفی مذکور، دقیقا با یکی از این بینهایت مقدار، برابر شود، مساوی با $0 = \frac{1}{\infty}$ است.
- ✓ به همین دلیل، نمی توان تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته را در قالب جدول ارائه داد؛ بلکه چنین توابعی، تنها به صورت فرمول بیان می شوند.
- ✓ تابع توزیع را می توان به صورت جدول ارائه کرد؟



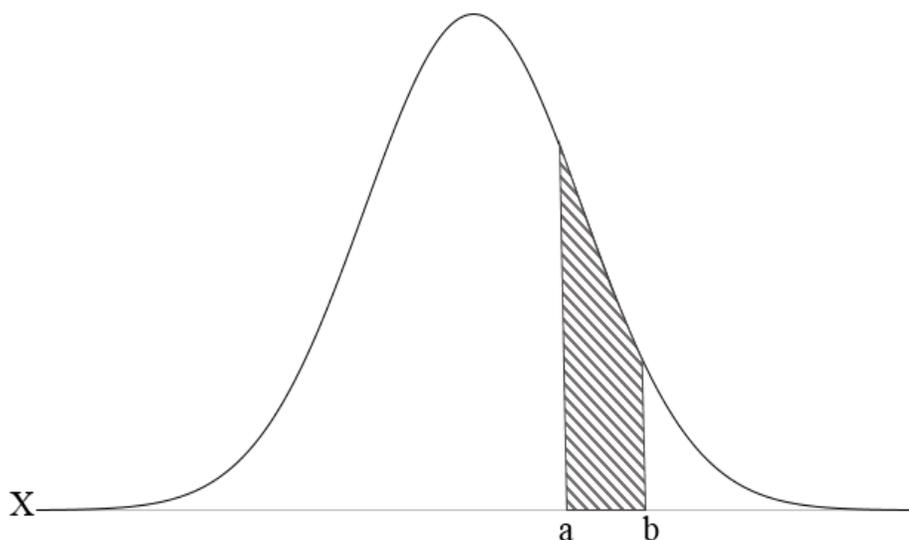
توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

تابع چگالی احتمال،

✓ مقدار تابع چگالی احتمال $(f(x))$ ، برابر است با احتمال اینکه متغیر X ، مقداری بین a و b داشته باشد

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

✓ در این حالت، احتمال اینکه پیشامد به خصوص x_0 رخ دهد، برابر با سطح زیر منحنی توزیع احتمال خواهد بود. به همین دلیل رخدادها به صورت بازه‌ای از پیشامدها نمایش داده می‌شوند.



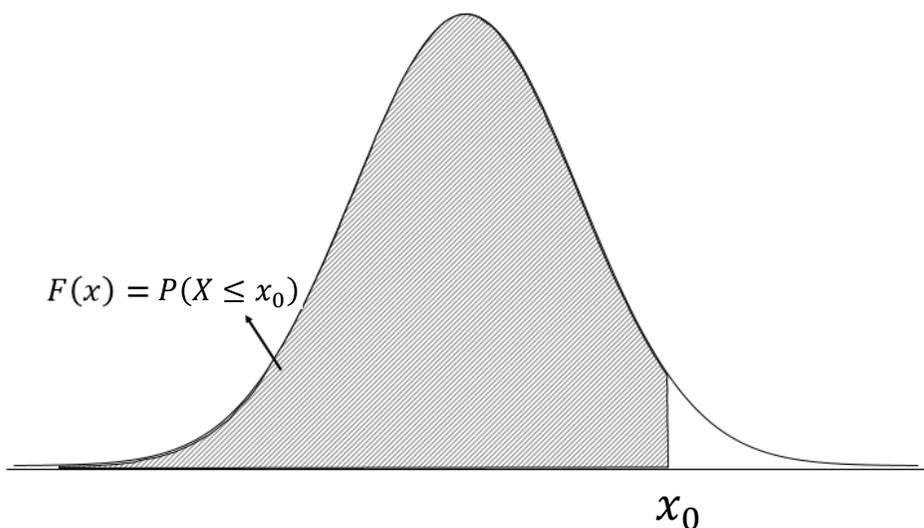


توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

تابع چگالی احتمال،

✓ برای مثال، اگر متغیر تصادفی X را به صورت سرعت وسایل نقلیه در یک کمان در نظر بگیریم؛ آنگاه، احتمال اینکه یک وسیله نقلیه از سرعت مجاز x_0 تجاوز کند، برابر با سطح زیر منحنی توزیع احتمال برای تمامی مقادیر $x > x_0$ خواهد بود. این مقدار بصورت زیر محاسبه می شود؛

$$P(X > x_0) = 1 - P(X \leq x_0)$$





تابع چگالی احتمال،

سوال: احتمال اینکه سرعت یک خودرو دقیقاً با سرعت ۷۰ کیلومتر بر ساعت باشد، چقدر خواهد بود؟

پاسخ:

احتمال اینکه سرعت یک خودرو دقیقاً با سرعت ۷۰ کیلومتر بر ساعت باشد قابل محاسبه نخواهد بود و این احتمال برابر با صفر بدست می‌آید.

هرچند به جای محاسبه این احتمال، می‌توان احتمال اینکه یک خودرو با سرعت حدوداً ۷۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند را به دست آورد.

برای این منظور می‌توان احتمال اینکه x بین ۶۹ و ۷۱ باشد را محاسبه نمود $(P(69 < X < 71))$.



تابع توزیع احتمال،

برای یک متغیر پیوسته، توزیع احتمال به صورت یک منحنی پیوسته خواهد بود که مقادیر احتمال در محور قائم و مقادیر متغیر تصادفی در محور افقی قرار می گیرد.

همچون حالت گسسته، مسائل زیادی وجود دارند که در آنها تحلیل گر تلاش می کند احتمال این که مقدار متغیر تصادفی پیوسته از عدد حقیقی x_0 کوچکتر یا مساوی باشد را تعیین نماید. در این راستا، مفهوم تابع توزیع (یا تابع توزیع تجمعی) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر X متغیر تصادفی پیوسته ای باشد که مقدار چگالی احتمال آن به ازای z برابر با $f(z)$ باشد، آنگاه تابع توزیع احتمال تجمعی به صورت زیر تعریف می گردد.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$



تابع توزیع احتمال،

برای بسیاری از توزیع های معروف آماری، مقدار تابع توزیع در جداول آماده ارائه می شود. هرچند با توسعه نرم افزارهای آماری، این جداول آماده کمتر مورد استفاده قرار می گیرند. از میان توابع چگالی احتمال،

- برخی (مانند لگ نرمال، نمایی، گاما و...) برای **مدل سازی رویدادهای فیزیکی**،
- برخی دیگر (مانند توزیع t ، توزیع F ، توزیع کای دو، توزیع بتا و...) صرفاً برای **آزمون های آماری**
- بعضی نیز برای **هر دو منظور** (توزیع نرمال)

مورد استفاده قرار می گیرند.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع یکنواخت،

ساده ترین نوع از توزیع های پیوسته می باشد.

متغیر X با تابع چگالی زیر، در بازه $[a,b]$ دارای توزیع یکنواخت است؛

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

هرگاه احتمال قرار گرفتن یک نقطه در قسمتی از این بازه، متناسب با طول آن بازه بوده و قرار گرفتن آن نقطه در درون آن بازه، یک پیشامد حتمی باشد، آنگاه می گوئیم متغیر تصادفی X در بازه $[a,b]$ به طور یکنواخت توزیع شده است.



توزیع یکنواخت،

مثال:

در یک ایستگاه اتوبوس معین، اتوبوس ها به فاصله ۲۰ دقیقه از یکدیگر حرکت می کنند (مثلا اگر اولی ساعت ۶ حرکت می کند، بعدی ساعت ۶ و ۲۰ دقیقه و ...). اگر زمان ورود یک مسافر به این ایستگاه، به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت بین ساعت ۷:۲۰ تا ۸ باشد، مطلوبست محاسبه احتمال این که این مسافر؛

الف) کمتر از ۱۰ دقیقه منتظر حرکت اتوبوس مانده باشد.

ب) بیشتر از ۱۵ دقیقه منتظر حرکت اتوبوس مانده باشد.



توزیع یکنواخت،

مثال:

اگر متغیر X را برابر با زمان ورود این مسافر در نظر بگیریم، چون X دارای توزیع یکنواخت است، بنابراین، تابع چگالی احتمال زمان انتظار این مسافر بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{1}{8 - 7:20} = \frac{1}{40}$$

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه این مسافر کمتر از 10 دقیقه منتظر حرکت اتوبوس مانده باشد، برابر است با احتمال اینکه این مسافر در بازه‌های زمانی $7:30$ تا $7:40$ و یا $7:50$ تا 8 وارد ایستگاه شده باشد.

$$P(7:30 < x < 7:40) + P(7:50 < x < 8) = \int_{30}^{40} \frac{1}{40} dx + \int_{50}^{60} \frac{1}{40} dx = 0.5$$



توزیع یکنواخت،

مثال:

ب) اگر این مسافر در بازه‌های زمانی $7:20$ تا $7:25$ و یا $7:40$ تا $7:45$ وارد ایستگاه شده باشد؛ مجبور است بیش از ۱۵ دقیقه منتظر حرکت اتوبوس بماند.

$$P(7:20 < x < 7:25) + P(7:40 < x < 7:45) = \int_{20}^{25} \frac{1}{40} dx + \int_{40}^{45} \frac{1}{40} dx = 0.25$$



توزیع نرمال،

- پرکاربردترین توزیع پیوسته در مهندسی حمل و نقل
- نام های دیگر: توزیع گاوسی، نمودار زنگوله ای
- یک متغیر تصادفی با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 دارای توزیع نرمال است؛ اگر تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر باشد؛

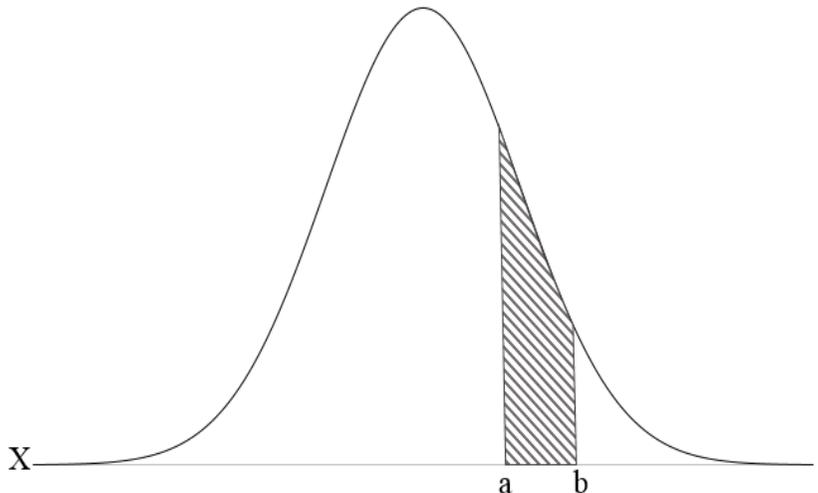
$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نرمال،

- عموماً توزیع نرمال به صورت $N(\mu, \sigma^2)$ نمایش داده می شود.
- منحنی نرمال نسبت به میانگین متقارن بوده و میانه، مد و میانگین آن بر هم منطبق هستند
- با انتگرال گیری از تابع چگالی توزیع نرمال، به ازای یک بازه معین از x (مثلاً a تا b) و با داشتن مقادیر میانگین و واریانس توزیع، می توان مقادیر احتمال مشاهده بازه مورد نظر را به دست آورد.





تابع چگالی نرمال استاندارد

به ازای مقادیر مختلف و ، شکل توزیع نرمال متفاوت خواهد بود.

توزیع نرمال استاندارد، حالت خاصی از توزیع نرمال است که در آن، متغیر تصادفی Z را به صورت زیر تعریف می کنیم؛

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

با انتگرال گیری از تابع چگالی احتمال

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

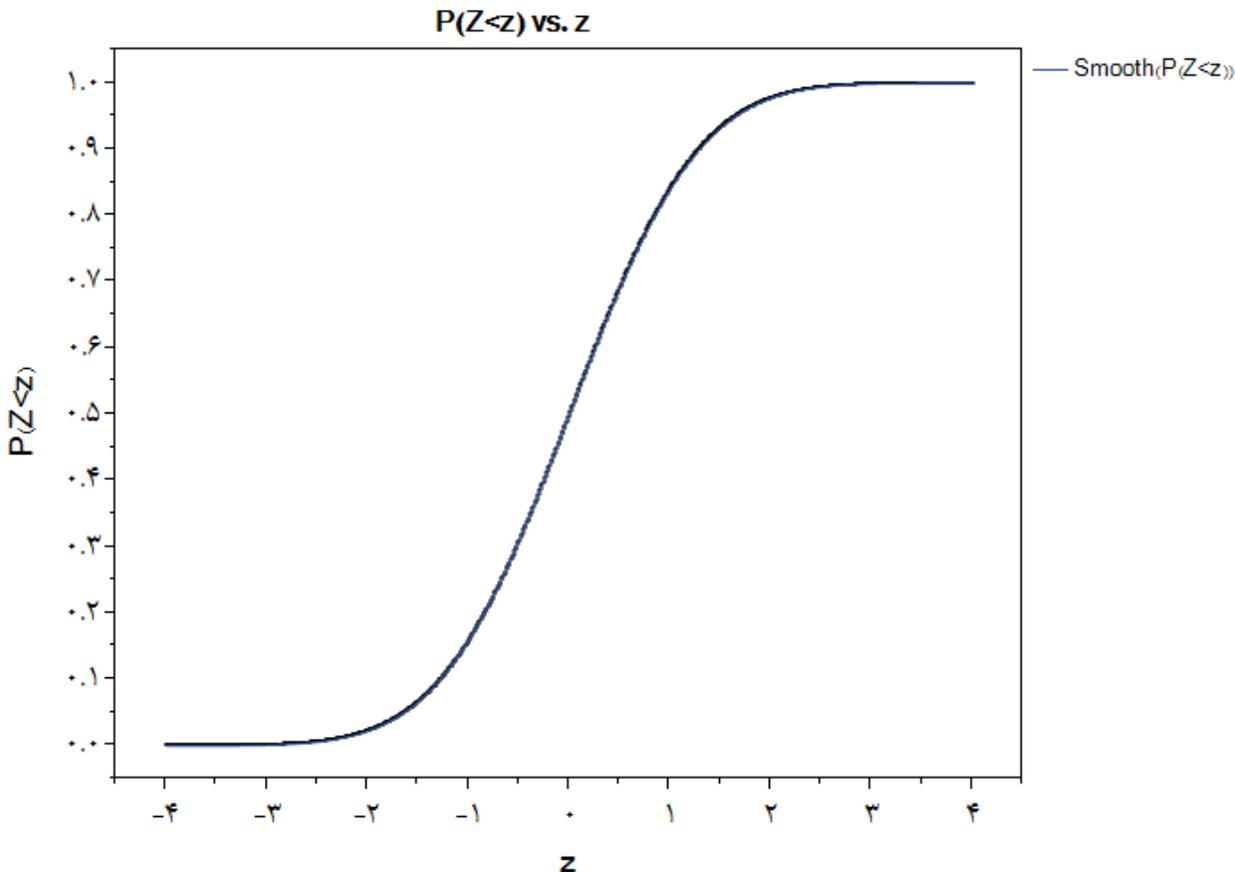
✓ به ازای بازه های مختلف Z ، می توان احتمالات متناظر با مشاهده این مقادیر را بدست آورد.

✓ مقادیر $P(Z < z)$ به ازای مقادیر مختلف Z محاسبه شده و در جدول های آماده، ارائه می شود.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

تابع توزیع نرمال استاندارد (توزیع تجمعی)



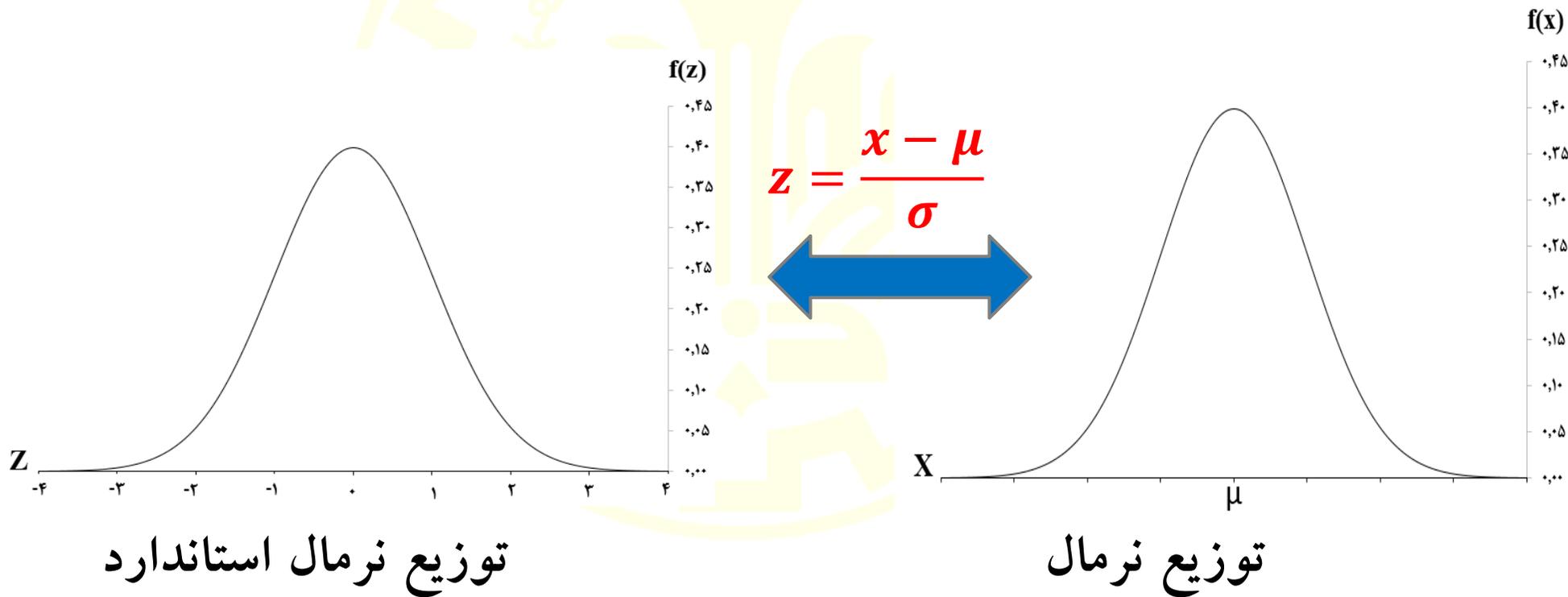
مقادیر $P(Z < z)$



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نرمال استاندارد (توزیع چگالی)

توزیع نرمال با $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ به عنوان توزیع نرمال استاندارد شناخته شده و با نماد $N(0,1)$ نمایش داده می شود.





توزیع نرمال استاندارد (توزیع چگالی)

مثال:

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین 100 و واریانس 4 باشد. احتمال اینکه متغیر تصادفی X کمتر از 102.7 باشد، چقدر است؟

ابتدا متغیر تصادفی X را به متغیر تصادفی Z تبدیل کرده و سپس از جداول آماده استفاده می کنیم؛

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$z = \frac{x - 100}{2}$$

$$z = \frac{102.7 - 100}{2} = 1.35 \quad P(Z \leq 1.35) = 0.9115$$



توزیع نرمال استاندارد (توزیع چگالی)

یکی از کاربردهای توزیع های آماری، تعیین عددی است که درصد معینی از داده ها، مقداری کمتر از آن داشته باشند.

با توجه به اینکه

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$x = \mu + Z * \sigma$$

با داشتن مقادیر **صدک های مربوط به توزیع نرمال استاندارد** و قرار دادن مقادیر مورد نظر در معادله $x = \mu + Z * \sigma$ می توان مقادیر صدک های مربوط به هر توزیع نرمال دیگری را به دست آورد.

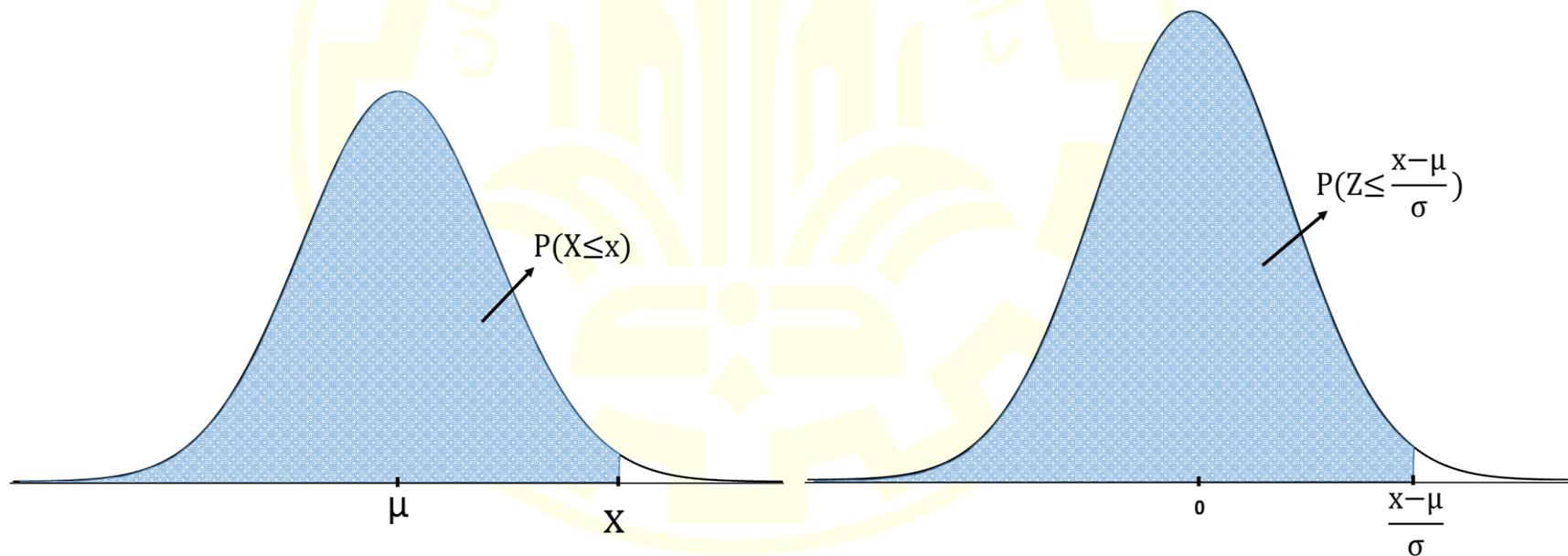
صدک های توزیع نرمال استاندارد و مقادیر احتمال متناظر با آنها در جداول آماده، تهیه شده و مورد استفاده تحلیل گران قرار می گیرد.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نرمال استاندارد (توزیع چگالی)

صدهای توزیع نرمال استاندارد و مقادیر احتمال متناظر با آنها در جداول آماده، تهیه شده و مورد استفاده تحلیل گران قرار می گیرد.





توزیع نرمال استاندارد (توزیع چگالی)

برای مثال، زمانی که گفته می شود مقدار 97.5 امین درصد داده ها در توزیع نرمال استاندارد حدودا برابر با 1.96 است بدین معناست که در هر توزیع نرمالی، 95٪ از (مقادیر) داده ها در بازه بین $\pm 1.96\sigma$ از میانگین، قرار می گیرد. برای مثال،

- 68.3٪ از مشاهدات در بازه $\mu \pm 1 * \sigma$ ،

- 95٪ از مشاهدات در بازه $\mu \pm 1.96 * \sigma$ ،

- 99.7٪ از مشاهدات در بازه $\mu \pm 3 * \sigma$

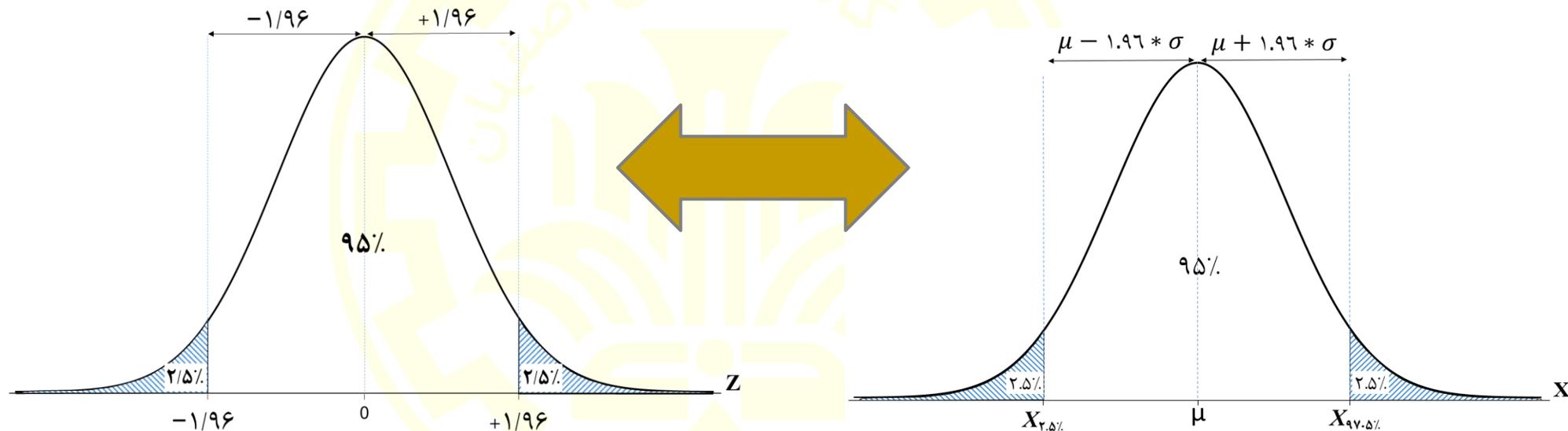
قرار خواهد داشت. این موضوع را می توان به شکل دیگری نیز تفسیر نمود. احتمال اینکه مشاهده بعدی در بازه $(\mu \pm Z \times \sigma)$ باشد، چقدر خواهد بود.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نرمال و نرمال استاندارد

احتمال اینکه مشاهده بعدی در بازه $(\mu \pm Z \times \sigma)$ باشد، چقدر خواهد بود.



الف) بازه ۹۵٪ مرکزی یک توزیع نرمال

ب) بازه ۹۵٪ مرکزی توزیع نرمال استاندارد



توزیع نرمال و نرمال استاندارد

مثال:

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف استاندارد σ باشد، مطلوبست:

$$P(\mu - 1 \times \sigma < X < \mu + 1 \times \sigma)$$

$$P(\mu - 2 \times \sigma < X < \mu + 2 \times \sigma)$$

$$P(\mu - 3 \times \sigma < X < \mu + 3 \times \sigma)$$

پاسخ:

$$P(\mu - 1 \times \sigma < X < \mu + 1 \times \sigma) = P(-1 < Z < +1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6828$$

$$P(\mu - 2 \times \sigma < X < \mu + 2 \times \sigma) = P(-2 < Z < +2) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

$$P(\mu - 3 \times \sigma < X < \mu + 3 \times \sigma) = P(-3 < Z < +3) = 0.9987 - 0.0013 = 0.9974$$



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نرمال و نرمال استاندارد

مثال:

متغیر X دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۵ و انحراف معیار ۳ می باشد. مطلوبست تعیین بازه‌ای که ۲.۵٪ از داده‌ها از آن کمتر و بیشتر باشند (۹۵٪ میانی)؟

پاسخ: در هر توزیع نرمال، ۹۵٪ از مشاهدات در بازه $\mu \pm 1.96 * \sigma$ است.

۲.۵ امین صدک برای این توزیع برابر است با: $55 + 3 \times (-1.96) = 55 - 3 \times (1.96) = 49.12$

۹۷.۵ امین صدک برابر است با: $55 + 3 \times (1.96) = 60.88$

بدین ترتیب، می توان گفت که ۹۵٪ مرکزی داده‌ها، مقداری بین ۴۹.۱۲ و ۶۰.۸۸ دارند.



تقریب توزیع دو جمله‌ای با توزیع نرمال

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با میانگین $\mu = n.p$ و واریانس $\sigma^2 = n.p.q$ باشد، هنگامی که n به سمت بینهایت میل کند، توزیع متغیر تصادفی $Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند. این تقریب، هنگامی که n بزرگ و p به 0.5 نزدیک باشد، بسیار خوب است.



تقریب توزیع دو جمله ای با توزیع پواسون و نرمال

برای تشخیص اینکه چه موقع می توان از توزیع نرمال یا توزیع پواسون برای تقریب توزیع دو جمله ای استفاده کرد، به عنوان یک قاعده سرانگشتی، ابتدا مقادیر np و nq را محاسبه کرده و سپس اگر:

✓ n بزرگ و p به 0.5 نزدیک باشد و در نتیجه np و nq ، هر دو بزرگتر از 5 باشند، آنگاه می توان با تقریب خوبی توزیع دو جمله ای را با **توزیع نرمال** تقریب زد.

✓ n بزرگ و p به صفر یا یک نزدیک باشد؛ بطوریکه که رابطه $np \leq 10$ برقرار باشد؛ آنگاه می توان با تقریب خوبی توزیع دو جمله ای را با **توزیع پواسون** تقریب زد.

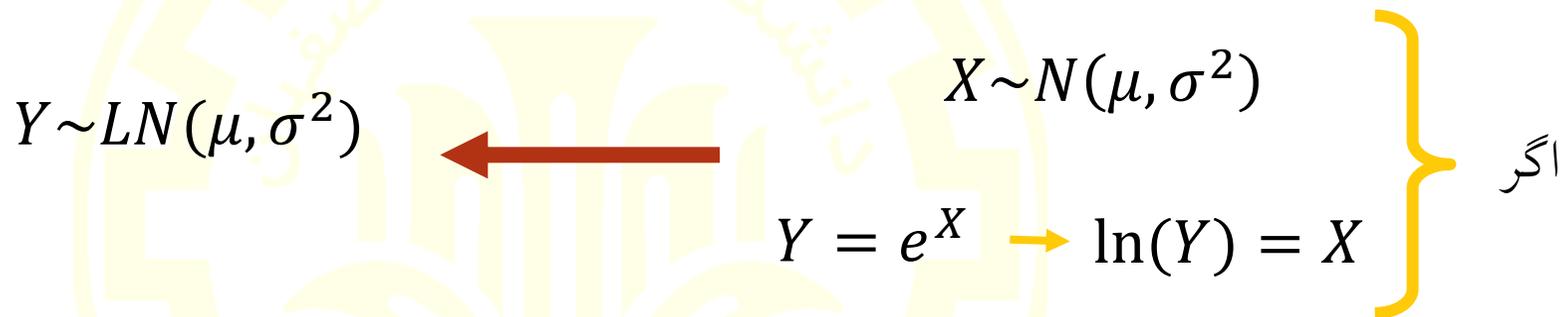
((به طور کلی، وقتی $n \geq 20$ و $p < 0.05$ باشد، توزیع پواسون، تقریب خوبی برای احتمال های دو جمله ای می باشد.))



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع لگ نرمال

- هنگامی که تبدیل لگاریتم طبیعی داده‌ها توزیع نرمال داشته باشد، داده‌های اصلی دارای توزیع *lognormal* خواهند بود.



- تابع چگالی احتمال لگ نرمال برای y نامنفی به صورت زیر است؛

$$f(y; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad y \geq 0$$

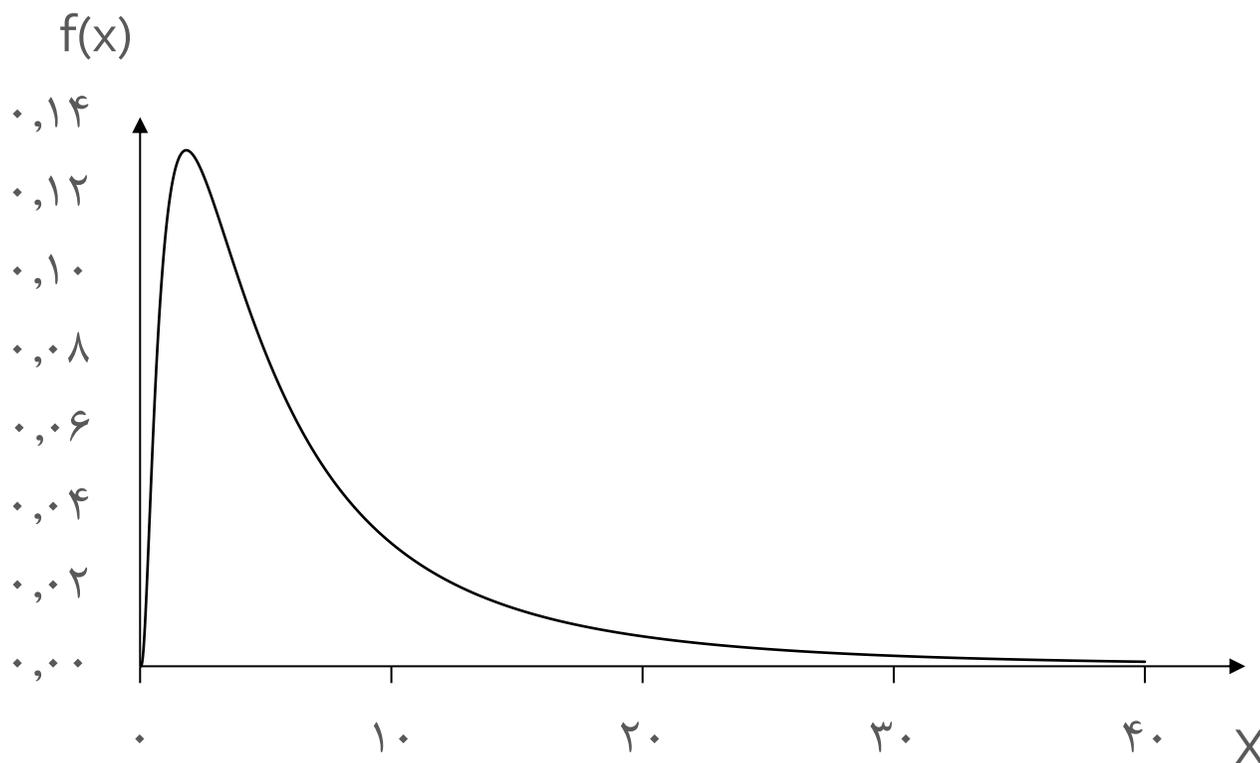
توجه: پارامترهای توزیع لگ نرمال، میانگین و واریانس این توزیع نیستند؛ بلکه تحت عنوان پارامترهای شکل و مقیاس شناخته می‌شوند.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع لگ نرمال

- توزیع احتمال یک توزیع لگ نرمال با پارامترهای شکل و مقیاس به ترتیب برابر با ۵ و ۱





توزیع لگ نرمال

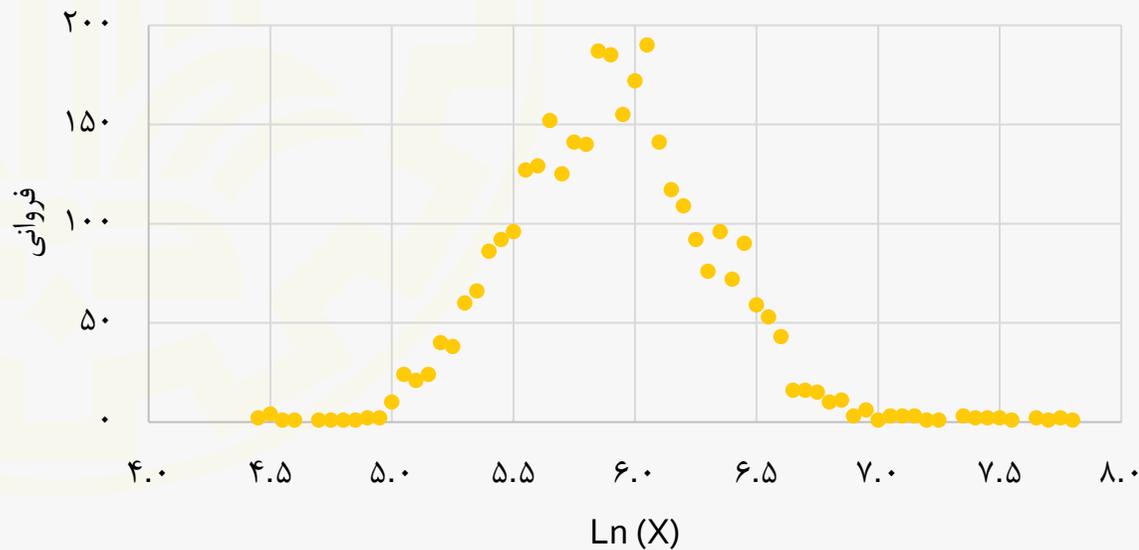
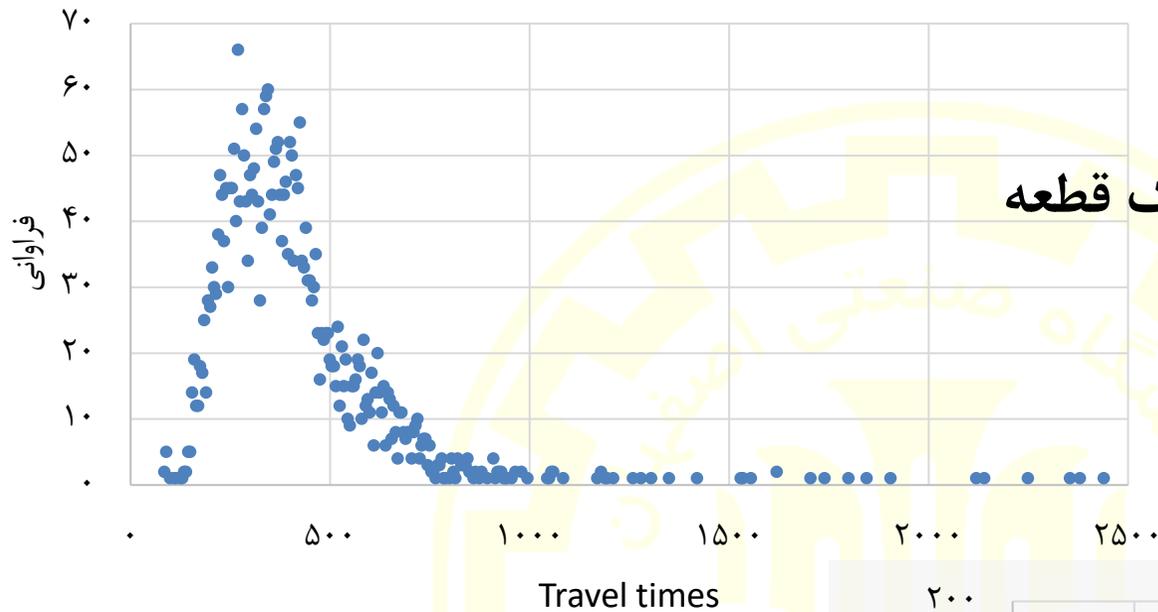
- یکی از مزایای این توزیع، نامنفی بودن و دنباله کشیده (چوله به راست) آن است که باعث می شود در مدلسازی پدیده های فیزیکی نسبت به توزیع نرمال ارجحیت داشته باشد.
- زیرا توزیع نرمال مقادیر منفی نیز اختیار می کند و همچنین نقاط پرت کمی دارد.
- برای مثال، از توزیع لگ نرمال در مطالعات حمل و نقلی مربوط به بررسی میزان قابل رؤیت بودن تابلوها و علائم روی سطح روسازی (مثلا در زمان بارندگی) استفاده شده است.
- متغیر تصادفی: دورترین فاصله ای که علائم روی روسازی توسط راننده قابل مشاهده باشد.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع لگ نرمال

○ داده های زمان سفر اتوبوس ها در یک قطعه





توزیع نمایی (Exp)

اگر فراوانی وقوع یک رخداد، فرض های زیر را ارضا نماید، آنگاه توزیع نمایی مدل مناسبی برای نمایش بازه های زمانی میان وقوع رخداد های متوالی خواهد بود.

1. بتوان فراوانی وقوع پدیده مورد نظر در یک بازه زمانی معین را به صورت فرآیند پواسون با پارامتر λ پیروی می کند، مدل کرد

$$(f(N(t) = X) = P(X = x) = \left(\frac{e^{-\lambda t} \lambda t^x}{x!}\right))$$

1. میانگین مدل پواسون در طول زمان تغییر نکرده و وقایع با نرخ ثابت λ رخ دهند.
2. فراوانی وقوع پدیده مورد نظر در یک بازه زمانی بسیار کوتاه، حداکثر برابر ۱ باشد (امکان وقوع همزمان وجود نداشته باشد).
3. وقوع پدیده مورد نظر در دوره های زمانی مختلف، مستقل از هم باشد.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نمایی (Exp)

به عبارت دیگر، در یک فرآیند پواسون، اگر متغیر X نمایانگر تعداد پیروزی در یک بازه زمانی معین باشد و متغیر t را به صورت زمان لازم برای رسیدن به اولین پیروزی تعریف کنیم؛ فرض کنید λ نمایانگر میانگین تعداد پیروزی در واحد زمان باشد.

پس توزیع پواسون متناظر دارای میانگین $\mu = \lambda t$ در هر بازه t خواهد بود.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^x}{x!}$$

احتمال اینکه طی زمان t هیچ پیروزی رخ ندهد ($x=0$) برابر است با؛

$$P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

اکنون متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف می کنیم

T : مدت زمان سپری شده تا مشاهده اولین پیروزی

احتمال مشاهده پیروزی بعد از زمان t ، برابر است با احتمال عدم وقوع پیروزی تا زمان t (یعنی از t تا ∞)

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نمایی (Exp)

احتمال مشاهده پیروزی بعد از زمان t ، برابر است با احتمال عدم وقوع پیروزی تا زمان t (یعنی از 0 تا t)

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t} \xrightarrow[\text{مکمل } (T \leq t)]{\text{---}} P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$(T \leq t)$ همان تعریف تابع توزیع است که می توان آن را به صورت زیر نوشت؛

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

با مشتق گیری از این تابع توزیع، می توان تابع چگالی را نیز به دست آورد؛

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

این تابع چگالی معروف به **توزیع نمایی** است (به جای متغیر T ، هر متغیر دیگری مانند X را می توان به کار برد).



توزیع نمایی (Exp)

بدین ترتیب، تابع چگالی احتمال توزیع نمایی برای متغیر $t \geq 0$ به شکل روبروست

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

λ میانگین تعداد وقوع رخداد موردنظر در واحد زمان

$$f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}$$

$\beta = \frac{1}{\lambda}$ میانگین زمان انتظار میان دو رخداد متوالی

t متغیر تصادفی مدت زمان سپری شده

توزیع نمایی معمولاً به صورت $EXP(\lambda)$ یا $EXP(\frac{1}{\lambda})$ یا $EXP(\beta)$ نمایش داده می شود.



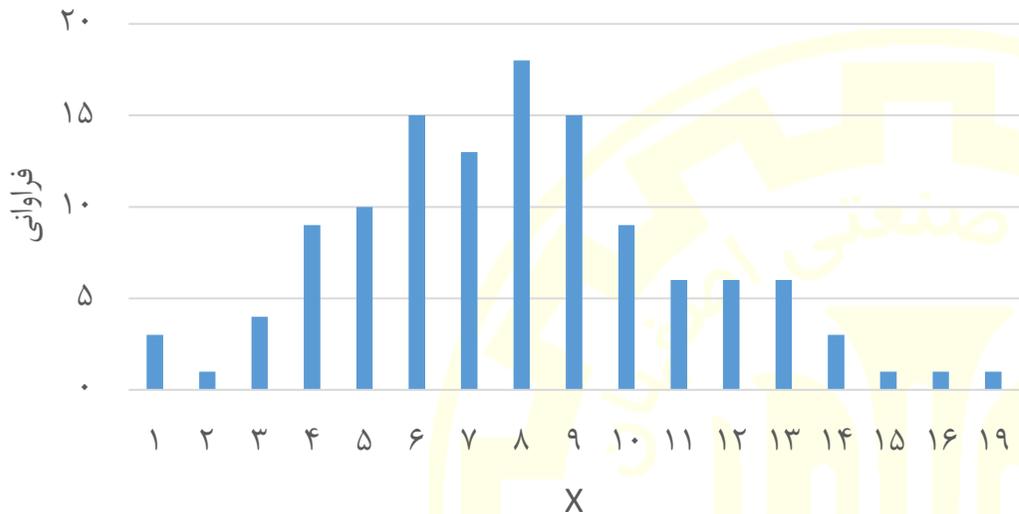
توزیع نمایی (Exp)

- منحنی توزیع نمایی دارای دنباله کشیده بوده و معمولاً نسبت به داده‌های دارای توزیع نرمال، نقاط پرت بیشتری دارد.
- از توزیع نمایی در حوزه حمل‌ونقل، اغلب برای **مدلسازی زمان رسیدن وسایل نقلیه و عابریں در تقاطعات** و سایر نقاط مورد نظر استفاده می‌شود.
- ❖ علاوه بر محاسبه زمان مشاهده اولین پیروزی، یا زمان میان دو پیروزی متوالی، از توزیع نمایی در **تئوری صف و تئوری قابلیت اطمینان** نیز به‌طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. برای مثال،
- ❖ اگر در یک سیستم صف، ورود مشتری‌ها طبق فرآیند پواسون باشد، می‌توان گفت زمان میان دو ورود متوالی از توزیع نمایی پیروی می‌کند و برعکس.
- ❖ این نوع اطلاعات برای طراحی ایستگاه‌های حمل و نقل همگانی و مکانیابی ایستگاه‌ها ضروری هستند.

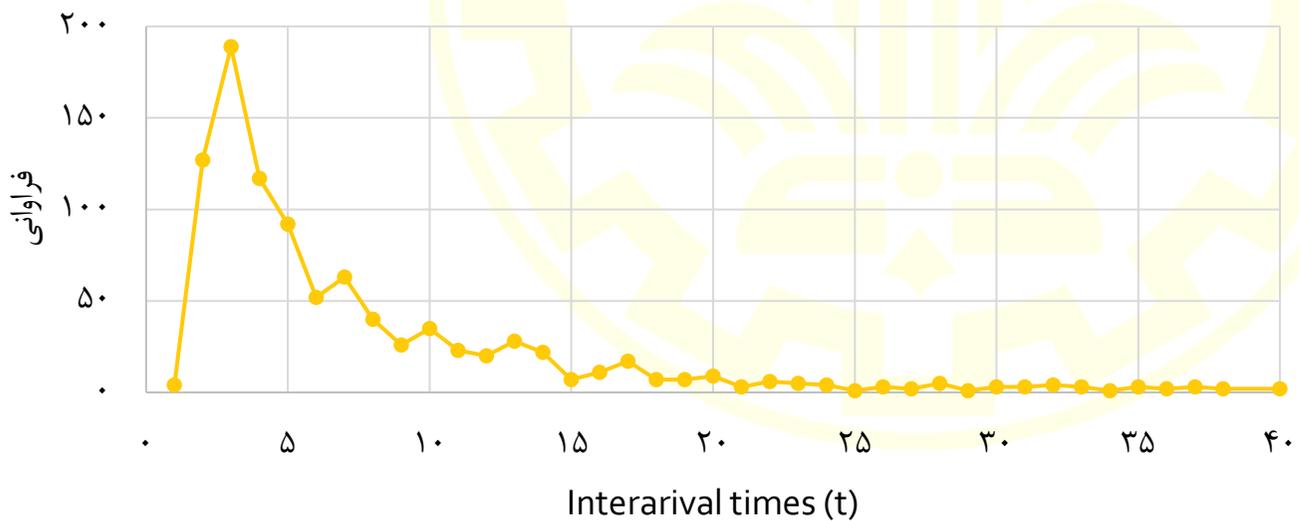


توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

آماربرداری خودروهای ورودی به یک بزرگراه از یک رمپ



تعداد خودروهای ورودی در بازه های ۱ دقیقه‌ای



مدت زمان سپری شده میان ورود هر دو خودرو متوالی



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع نمایی (Exp)

مثال:

تجربه نشان داده است که تعداد اتومبیل هایی که وارد یک پارکینگ می شوند، دارای توزیع پواسون با نرخ 20 دستگاه در یک ساعت است ($\lambda=20$). اگر پارکینگ ساعت 6 صبح باز شود، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل 5 دقیقه طول بکشد تا اولین اتومبیل به پارکینگ مراجعه کند.

ب) تا ساعت 6:10 صبح، اولین اتومبیل وارد پارکینگ شود.

ج) اگر تا ساعت 7 صبح اتومبیلی وارد پارکینگ نشده باشد، احتمال اینکه تا ساعت 7:05 اتومبیلی وارد پارکینگ شود چقدر است؟



توزیع نمایی (Exp)

مثال:

ابتدا تعداد موفقیت در دقیقه را حساب می کنیم: $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ ، اگر متغیر t نشان دهنده مدت زمان انتظار برای اولین ورود اتومبیل به پارکینگ باشد، t دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{3}$ خواهد بود.

$$f(t) = P(T = t) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t}$$

(الف) احتمال اینکه حداقل 5 دقیقه طول بکشد تا اولین اتومبیل به پارکینگ مراجعه کند.

$$f(T > 5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t} dt = e^{-\frac{5}{3}}$$

(ب) احتمال اینکه تا ساعت 6:10 صبح، اولین اتومبیل وارد پارکینگ شود.

$$f(T < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t} dt = \frac{1}{3} (1 - e^{-\frac{10}{3}})$$



توزیع نمایی (Exp)

مثال:

(ج) یکی از مهم ترین ویژگی های توزیع نمایی، **بدون حافظه بودن این توزیع** است. بدین معنا که در این توزیع، می توان بدون در نظر گرفتن اتفاقات گذشته، هر زمانی را بعنوان مبدا محاسبات در نظر گرفت.

فرض کنید زمان وقوع یک رویداد، متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد اگر این رویداد تا لحظه معینی، مثلاً t_1 رخ نداده باشد، می توان از این زمان صرف نظر کرد و مبدا زمان را به این لحظه (لحظه t_1 بجای صفر) انتقال داد. بدین ترتیب، احتمال اینکه تا زمان $t_1 + t_2$ رخداد مورد نظر رخ بدهد، برابر است با احتمال اینکه تا زمان t_2 رخداد مورد نظر رخ دهد:

$$P(T > t_1 + t_2 | T > t_1) = P(T > t_2)$$

براین اساس، می توان گفت در حالیکه تا ساعت 7 هیچ اتومبیلی وارد پارکینگ نشده باشد، احتمال اینکه تا ساعت 7:05 اتومبیلی وارد پارکینگ شود، با احتمال اینکه در همان 5 دقیقه اول آغاز به کار، یک اتومبیل وارد پارکینگ شود برابر است.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع گاما

فرآیند ساخت تابع توزیع گاما مشابه توزیع نمایی است. با این تفاوت که در توزیع گاما به دنبال "زمان سپری شده تا مشاهده α امین رویداد" هستیم.

فرض کنید متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف کرده ایم؛

X : زمان سپری شده بین α مرتبه رخداد متوالی (زمان سپری شده تا مشاهده α امین رویداد)

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β بوده و تابع چگالی احتمال آن برای $X \geq 0$ به صورت زیر است (زمان سپری شده برای مشاهده α امین رویداد):

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

α ، تعداد رویدادهای مشاهده شده

به جای β می توان از λ استفاده کرد (فراوانی وقوع رخداد موردنظر در واحد زمان).

بدین ترتیب، فرم دیگری از تابع چگالی توزیع گاما؛

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$



توزیع گاما

فرم دیگری از تابع چگالی توزیع گاما به صورت زیر تعریف می گردد؛

زمان سپری شده بین α مرتبه رخداد متوالی (زمان سپری شده تا مشاهده α امین رویداد)

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β بوده و تابع چگالی احتمال آن برای $X \geq 0$ به صورت زیر است (زمان سپری شده برای مشاهده α امین رویداد):

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha) \theta^{\alpha}}$$

α ، تعداد رویدادهای مشاهده شده

θ ، معکوس λ است. یعنی متوسط مدت زمانی است که باید سپری شود تا رخداد بعدی (مثلا رسیدن خودرو بعدی به

تقاطع) مشاهده شود (زمان مورد انتظار بین دو رخداد متوالی).

توجه:

α ، پارامتر شکل (Shape parameter)

λ ، پارامتر مقیاس (Scale parameter) یا θ ، پارامتر مقیاس (Scale parameter)



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع گاما

- ✓ توزیع های پواسون، نمایی، و گاما (ارلانگ) همگی به فرآیند پواسون از منظرهای مختلف نگاه می کنند؛
 - پواسون: پیش بینی تعداد رویدادها در یک بازه زمانی معین
 - نمایی: پیش بینی زمان مشاهده اولین رویداد ($\alpha = 1$)
 - گاما: پیش بینی زمان مشاهده α امین رویداد

✓ مهندسیین حمل و نقل از توزیع گاما برای مدلسازی **سرفاصله زمانی** یا **مکانی (بر حسب زمان) بین وسایل نقلیه** استفاده می کنند.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع ارلانگ

- ✓ در توزیع گاما، α می تواند یک عدد حقیقی مثبت باشد.
- ✓ هنگامی که α یک عدد صحیح است، مقدار $\Gamma(\alpha)$ برابر با $(\alpha-1)!$ خواهد بود.
- ✓ در این شرایط، به توزیع گاما، توزیع ارلانگ ($X \sim Er(\alpha, \lambda)$) می گویند (یعنی شرایطی که α یک عدد صحیح است).
- ✓ تابع توزیع تجمعی توزیع ارلانگ با پارامترهای α و λ :

$$F_X(x; \alpha, \lambda) = P(X \leq x) = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^i}{i!}$$

این تابع، احتمال این که رخداد α -ام، قبل از زمان x رخ دهد را اندازه گیری می کند.
 تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت های زیر قابل تعریف است؛

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{(\alpha - 1)!} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha - 1)!} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{(\alpha - 1)! \theta^\alpha}$$



توزیع ارلانگ

به عبارت دیگر، اگر X_i از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند؛

$$X_i \sim EXP(\lambda)$$

آنگاه؛ مجموع α عدد از X_i ها از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند؛

$$S_\alpha = \sum_{i=0}^{\alpha} X_i \sim Erlang(\alpha, \lambda)$$

اگر فراوانی وقوع رخداد موردنظر در واحد زمان، از توزیع پواسون با پارامتر λ پیروی کند؛ آنگاه، مدت زمانی که طول می کشد تا n مورد از رخداد موردنظر اتفاق بیفتد (فاصله زمانی میان وقوع $n+1$ رخداد متوالی) از توزیع ارلانگ با پارامتر λ و $\alpha=n$ پیروی خواهد کرد.

پس توزیع ارلانگ، توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع (هر یک دارای توزیع نمایی) است (برای حالتی که α به صورت یک عدد صحیح باشد).



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع ارلانگ

مثال: فرض کنید تعداد خودروهایی که به یک پارکینگ عمومی مراجعه می کنند، دارای توزیع پواسون با میانگین ۳۰ خودرو در ساعت می باشد. مطلوب است احتمال این که از لحظه شروع به کار، مأمور پارکینگ حداقل ۵ دقیقه منتظر بماند تا دومین خودرو وارد پارکینگ شود؟

پاسخ.

در صورت مسئله، متوسط تعداد خودرو ورودی به پارکینگ در واحد ساعت بیان شده، اما متغیر تصادفی مسئله، زمان انتظار بر حسب دقیقه می باشد. بنابراین، متوسط تعداد خودروهایی که در دقیقه وارد پارکینگ می شوند برابر است با $(\frac{30}{60} = \frac{1}{2})$.

بدین ترتیب، متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما (ارلانگ) با پارامترهای $\alpha=2$ و $\lambda=\frac{1}{2}$ می باشد. بنابراین احتمال این که مأمور پارکینگ حداقل ۵ دقیقه منتظر بماند تا دومین اتومبیل وارد پارکینگ شود برابر است با

$$P(X > 5) = 1 - F_X(x; \alpha, \lambda) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^i}{i!} = \frac{e^{-\frac{5}{2}} \times (\frac{5}{2})^0}{0!} + \frac{e^{-\frac{5}{2}} \times (\frac{5}{2})^1}{1!} = \frac{7}{2} e^{-\frac{5}{2}}$$



خلاصه

اگر T_1, T_2, \dots, T_n متغیرهای تصادفی مستقلی با پارامتر λ باشند؛

آنگاه، متغیر $Y = \sum_{i=1}^n T_i$ یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(\lambda, \alpha=n)$ خواهد بود.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع بتا (β)

تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است.

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad 0 < x < 1$$

- مقادیر مختلف α و β اشکال مختلفی از توابع چگالی احتمال برای توزیع بتا را تولید می کنند.
- اگر α و β اعداد طبیعی باشند، $\Gamma(\alpha)$ و $\Gamma(\beta)$ را می توان به صورت فاکتوریل نوشت و تابع بالا را به شکل ساده تری نوشت.
- مثلا اگر، $\alpha = m + 1$ و $\beta = n - m + 1$ در نظر بگیریم؛ توزیع بتا به صورت زیر در می آید.
- در واقع، توزیع بتا به عنوان یک مدل برای **احتمال موفقیت (p) در یک توزیع دو جمله ای** استفاده می گردد.

$$f(x) = (n + 1) \frac{n!}{m! (n - m)!} x^m (1 - x)^{n-m}$$

- یعنی در اینجا، متغیر تصادفی X ، مشابه با پارامتر p در توزیع دو جمله ای است.
- توزیع بتا مادر توزیع فیشر می باشد.
- از توزیع بتا می توان به عنوان یک توزیع پیشینِ توزیع دو جمله ای برای برآورد بیزی پارامتر احتمال موفقیت استفاده کرد.



تابع گاما (برای اعداد صحیح)

$$\Gamma(x) = (x - 1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

تابع بتا بر حسب گاما



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع کای دو (Chi-2)

- اگر X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد $(N(0,1))$ باشند؛
- آنگاه متغیر تصادفی $\sum_{i=1}^n X_i^2$ دارای توزیع گاما با $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\theta = 2$ خواهد بود.
- همچنین، این متغیر تصادفی از توزیع کای دو با n درجه آزادی پیروی می کند.
- بنابراین، این توزیع، **توزیع کای دو با n درجه آزادی** نامیده می شود (**توزیع کای دو** حالت خاصی از **توزیع گاما** است).

• تابع چگالی احتمال مربوط به توزیع کای دو با df درجه آزادی به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(x)^{\frac{df}{2}-1} (e)^{\frac{-x}{2}}}{\Gamma(\frac{df}{2}) (2)^{\frac{df}{2}}}$$

$$X \sim \chi^2 (df = n)$$

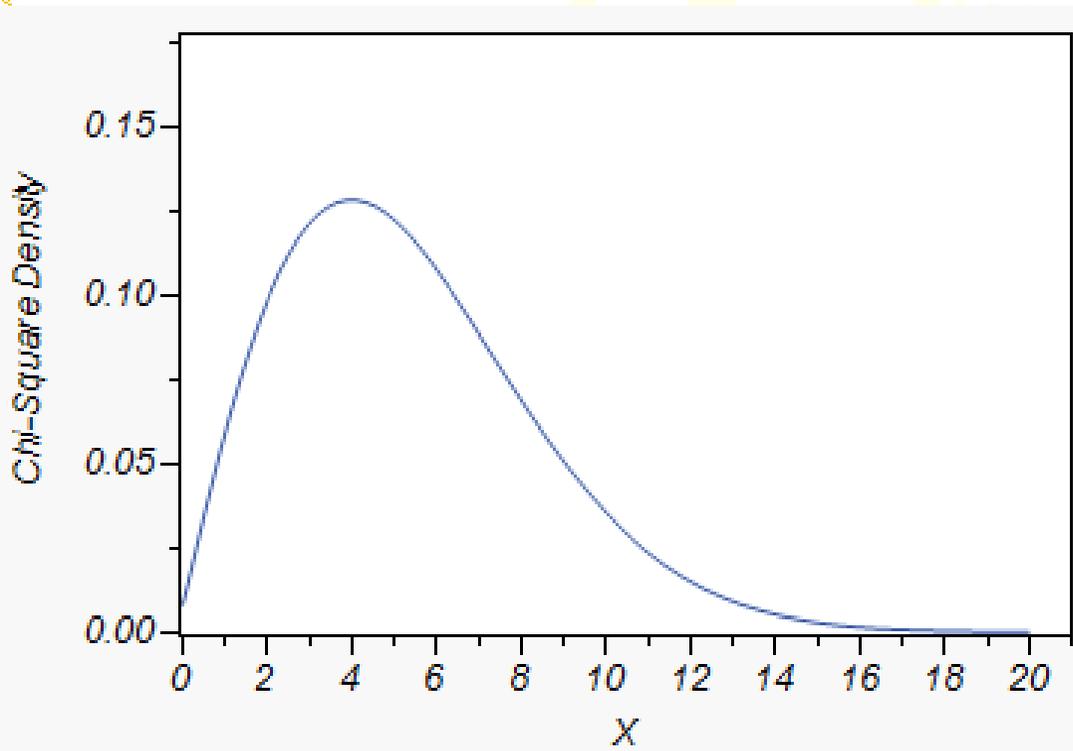
$$X \sim \text{Gamma} (\alpha = \frac{n}{2}, \theta = 2)$$



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع کای دو (Chi-2)

توزیع chi-square با ۵ درجه آزادی



- توزیع کای دو تقریباً به صورت انحصاری برای آزمون آماری مورد استفاده قرار می گیرد.
- توزیع کای دو «چوله به راست» است؛ اما با افزایش درجات آزادی آن، متقارن تر شده و به توزیع نرمال میل می کند.



توزیع کای دو (Chi-2)

- توزیع کای دو رایج ترین توزیع برای مدل سازی **توزیع واریانس برآورد شده از داده های دارای توزیع نرمال** است.
- به عبارت دیگر، برای داده های مستقل دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 ، نسبت زیر دارای توزیع کای دو با $n - 1$ درجه آزادی است.

$$\frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 (df = n - 1)$$

- در فصل های آینده خواهیم دید که چگونه با استفاده از این توزیع، درمورد واریانس جامعه استنباط می شود.



توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع t

- اگر Y و Z دو متغیر تصادفی مستقل بوده و
- Z دارای توزیع نرمال استاندارد و
- Y دارای توزیع کای دو با df درجه آزادی باشند؛
- آنگاه متغیر تصادفی T که به صورت زیر تعریف می شود؛ دارای توزیع t با df درجه آزادی خواهد بود؛

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/df}} \sim t_{df}$$

تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی به صورت زیر است؛

$$f_{df}(x) = \frac{\Gamma(\frac{df+1}{2})}{\Gamma(\frac{df}{2})\sqrt{\pi \cdot df}} \left(1 + \frac{x^2}{df}\right)^{-(df+1)/2}$$



توزیع t

- توزیع t همانند توزیع نرمال استاندارد نسبت به $\mu=0$ متقارن بوده و به شکل زنگوله است.
- دنباله‌های این توزیع کشیده‌تر از دنباله‌های توزیع نرمال استاندارد می‌باشد.
- این توزیع برای انجام آزمون‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- زمانی که در داده‌های اصلی، تعداد زیادی داده پرت وجود داشته باشد؛ برای مدل کردن میانگین‌ها از این توزیع استفاده می‌شود.

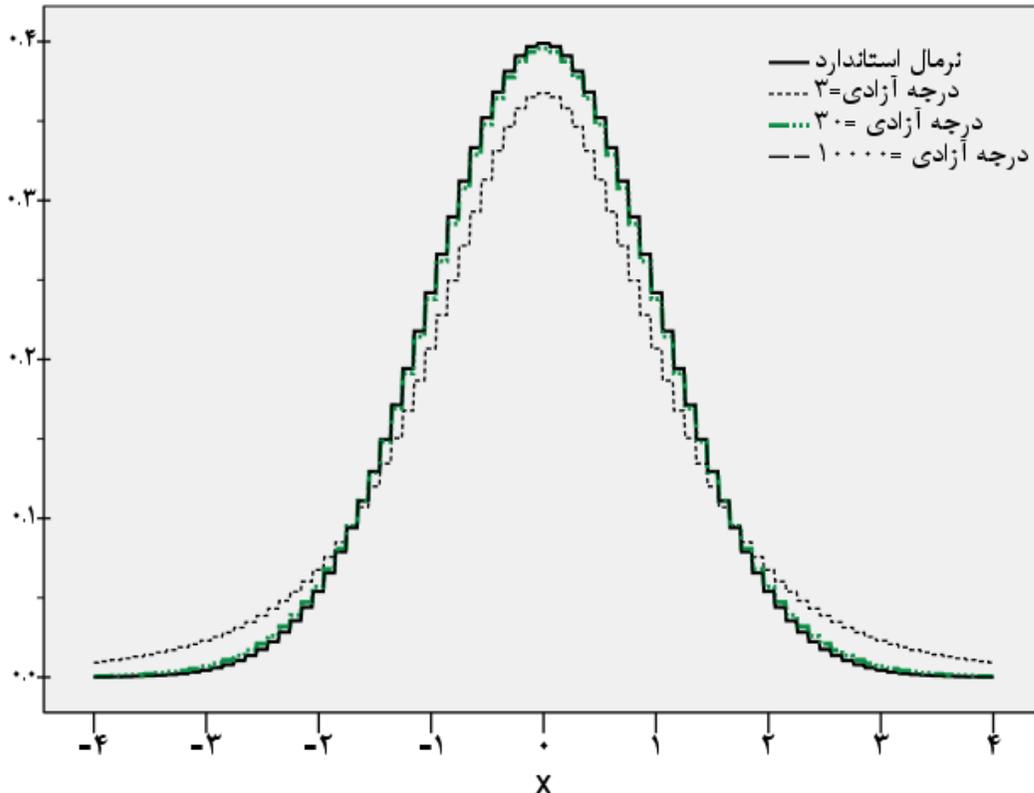


توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع t

توزیع Z و
توزیع t (به ازای ۳، ۳۰ و ۱۰۰۰۰ درجه آزادی)

- نمودارهای توزیع t را می توان به ازای درجات آزادی مختلف به دست آورد.
- با افزایش درجات آزادی، توزیع t به توزیع نرمال استاندارد نزدیک می شود.
- توزیع t با $df = \infty$ درجه آزادی بر توزیع نرمال استاندارد منطبق می شود.





توزیع t

- اگر \bar{X} و S^2 به ترتیب، میانگین و واریانس یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند؛ آنگاه متغیر تصادفی T که به صورت زیر تعریف می شود؛ دارای توزیع t با $df=n-1$ درجه آزادی خواهد بود:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{(S/\sqrt{n})} \sim t_{n-1}$$

مقادیر احتمال متناظر با برخی از صدک های پر کاربرد توزیع t ، به ازای مقادیر مختلف df و α در قالب جداول آماده در کتب آماری ارائه می شود.

در این جدول ها، $t_{\alpha,df}$ مقداری از متغیر تصادفی t است که احتمال مشاهده مقداری بیشتر از آن در یک توزیع t با df درجه آزادی، برابر با α است.



توزیع فیشر (F)

- توزیع فیشر در بسیاری از آزمون‌های فرضیه آماری از جمله تحلیل واریانس، رگرسیون و آزمون برابری واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- توزیع فیشر از توزیع نسبت **دو متغیر تصادفی مستقل کای دو** (که هر کدام بر تعداد درجه‌های آزادی خود تقسیم شده‌است) حاصل می‌شود.
- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل کای دو، به ترتیب با df_1 و df_2 درجه آزادی باشند، آماره زیر دارای توزیع فیشر با df_1 و df_2 درجه آزادی است.

$$X \sim \chi^2(df_1) \quad Y \sim \chi^2(df_2)$$

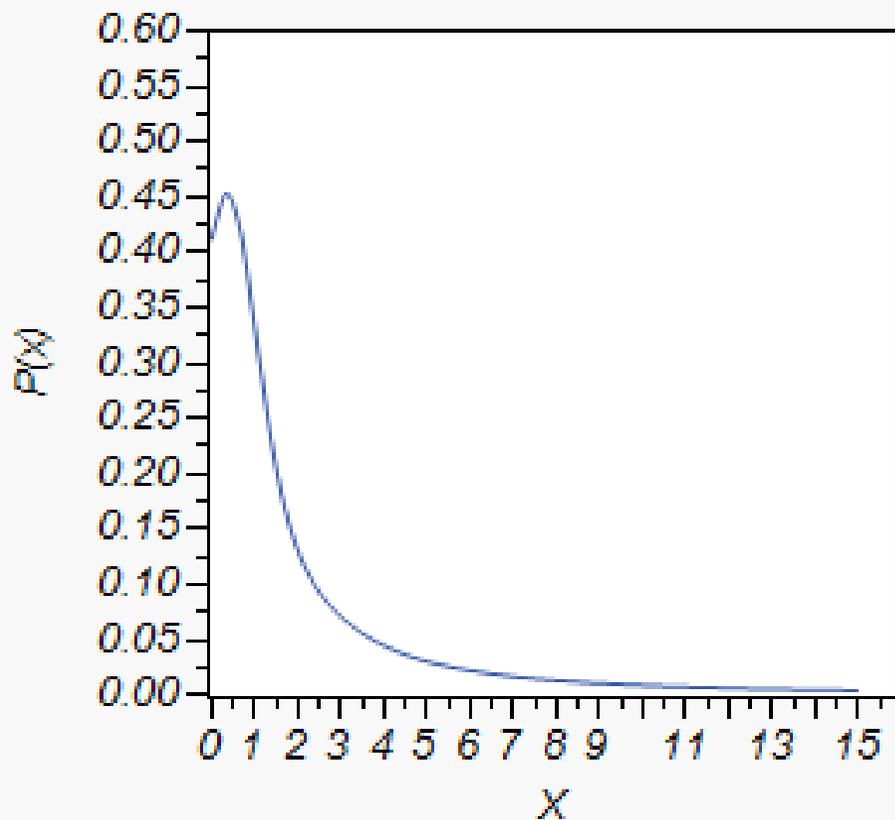
$$F = \frac{\left(\frac{X}{df_1}\right)}{\left(\frac{Y}{df_2}\right)} \sim F(df_1, df_2)$$



توزیع فیشر (F)

این توزیع دارای ویژگی های زیر است:

- شکل توزیع فیشر، با دو عدد مثبت مشخص می گردد (درجه آزادی صورت و مخرج)
- نامتقارن و چوله به راست است.
- مقادیر متغیر تصادفی توزیع فیشر، نامنفی می باشد.



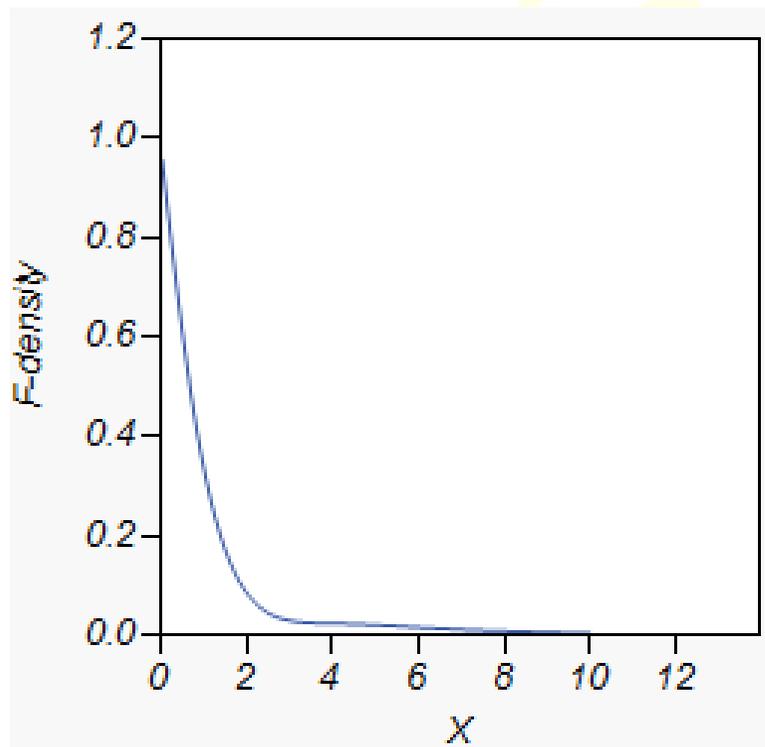
$$df_1=5, df_2=2$$



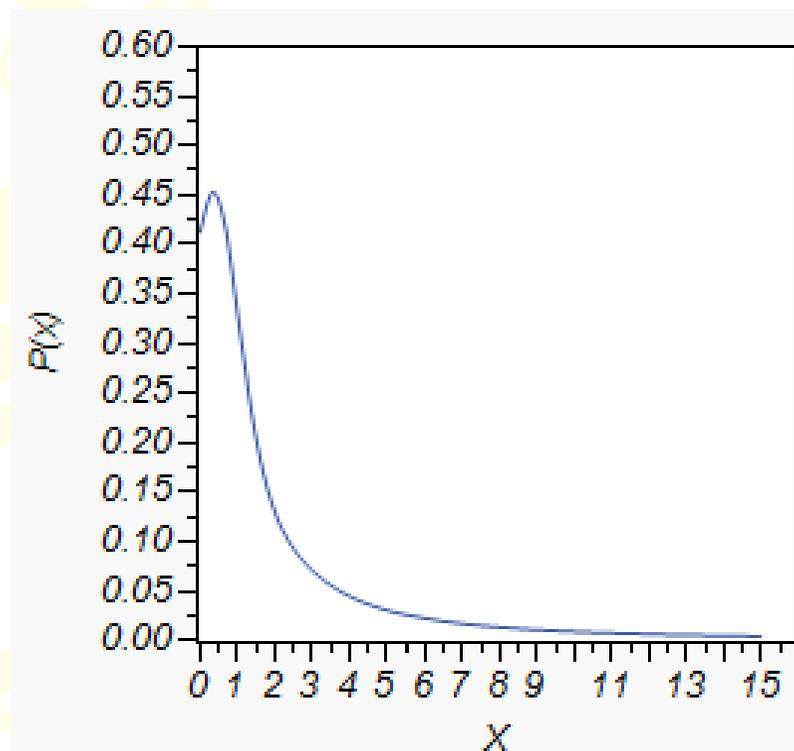
توابع چگالی احتمال و توزیع های پیوسته

توزیع فیشر (F)

توزیع فیشر غالباً به صورت $F(df_1, df_2)$ نمایش داده می شود. توجه شود که ترتیب درجات آزادی برای توزیع فیشر، اهمیت داشته و نمی توان آن را جابجا نمود.



$df_1=2, df_2=5$



$df_1=5, df_2=2$



In general [edit]

- If $X \sim \chi_{d_1}^2$ and $Y \sim \chi_{d_2}^2$ (Chi squared distribution) are independent, then $\frac{X/d_1}{Y/d_2} \sim F(d_1, d_2)$
- If $X_k \sim \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ (Gamma distribution) are independent, then $\frac{\alpha_2 \beta_1 X_1}{\alpha_1 \beta_2 X_2} \sim F(2\alpha_1, 2\alpha_2)$
- If $X \sim \text{Beta}(d_1/2, d_2/2)$ (Beta distribution) then $\frac{d_2 X}{d_1(1-X)} \sim F(d_1, d_2)$
- Equivalently, if $X \sim F(d_1, d_2)$, then $\frac{d_1 X/d_2}{1 + d_1 X/d_2} \sim \text{Beta}(d_1/2, d_2/2)$.
- If $X \sim F(d_1, d_2)$, then $\frac{d_1}{d_2} X$ has a beta prime distribution: $\frac{d_1}{d_2} X \sim \beta' \left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2} \right)$.
- If $X \sim F(d_1, d_2)$ then $Y = \lim_{d_2 \rightarrow \infty} d_1 X$ has the chi-squared distribution $\chi_{d_1}^2$
- $F(d_1, d_2)$ is equivalent to the scaled Hotelling's T-squared distribution $\frac{d_2}{d_1(d_1 + d_2 - 1)} T^2(d_1, d_1 + d_2 - 1)$.
- If $X \sim F(d_1, d_2)$ then $X^{-1} \sim F(d_2, d_1)$.
- If $X \sim t_{(n)}$ — Student's t-distribution — then:
 - $X^2 \sim F(1, n)$
 - $X^{-2} \sim F(n, 1)$



توزیع‌های دو متغیره

مواردی که تا اینجا بررسی شد، توزیع‌های یک‌متغیره بود.

در توزیع‌های دو متغیره به بررسی همزمان ۲ متغیر می‌پردازیم.

مثلا بررسی همزمان توزیع احتمال متغیر X و متغیر Y

توزیع‌های دو (چند) متغیره را توزیع مشترک متغیرهای تصادفی می‌نامند (پیوسته یا ناپیوسته).



توزیع‌های دو متغیره

نمایش توزیع مشترک دو متغیر تصادفی ناپیوسته (به صورت جدول)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m	جمع سطری ($p_{i.}$)
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	$p_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
جمع ستونی ($p_{.j}$)	$p_{.1}$	$p_{.2}$...	$p_{.m}$	۱

p_{ij} : احتمال اینکه به طور همزمان،

$$Y = y_j \text{ و } X = x_i$$

باشد، برابر است با؛

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^m p_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m$$



توزیع‌های دو متغیره

نمایش توزیع مشترک دو متغیر تصادفی ناپیوسته (به صورت جدول)

X \ Y	y_1	y_2	...	y_m	توزیع حاشیه‌ای (X)
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	$p_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
جمع ستونی ($p_{.j}$)	$p_{.1}$	$p_{.2}$...	$p_{.m}$	۱

$$P(X = x_i) = p_{i.}$$

توزیع حاشیه‌ای X

توزیع تک متغیره X



توزیع‌های دو متغیره

نمایش توزیع مشترک دو متغیر تصادفی ناپیوسته (به صورت جدول)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m	جمع سطری ($p_{i.}$)
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	$p_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
توزیع حاشیه‌ای (Y)	$p_{.1}$	$p_{.2}$...	$p_{.m}$	۱

$$P(Y = y_j) = p_{.j}$$

توزیع حاشیه‌ای Y

توزیع تک متغیره Y



توزیع‌های دو متغیره

توزیع‌های دو متغیره

احتمال‌های شرطی

$$P(X = x_j | Y = y_j) = \frac{P(X = x_j, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

توزیع‌های احتمال شرطی X

X	$P(X Y = y_j)$
x_1	$\frac{p_{1j}}{p_{.j}}$
x_2	$\frac{p_{2j}}{p_{.j}}$
\vdots	\vdots
x_n	$\frac{p_{nj}}{p_{.j}}$

توزیع‌های احتمال شرطی Y به شرط $X = x_i$

Y	y_1	y_2	...	y_m
$P(Y X = x_i)$	$\frac{p_{i1}}{p_{i.}}$	$\frac{p_{i2}}{p_{i.}}$		$\frac{p_{im}}{p_{i.}}$



توزیع‌های دو متغیره پیوسته

در حالت پیوسته، توزیع مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت تابع چگالی مشترک بیان می‌شود. تابع چگالی مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت $f(x,y)$ بیان می‌شود.

$$\int_y \int_x f(x,y) dx dy = 1 \quad \text{مجموع احتمالات برابر با ۱ است:}$$

$$f(x) = \int_y f(x,y) dy \quad \text{تابع چگالی حاشیه‌ای X}$$

$$f(y) = \int_x f(x,y) dx \quad \text{تابع چگالی حاشیه‌ای Y}$$



توزیع‌های دو متغیره پیوسته

تابع چگالی مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت $f(x,y)$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

تابع توزیع شرطی X

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

تابع توزیع شرطی Y



توزیع‌های دو متغیره پیوسته

مثال

تابع چگالی مشترک X و Y به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = \frac{3}{5}x(y + x) \quad ; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

مطلوبست توابع چگالی حاشیه‌ای و شرطی X و Y ؟



توزیع‌های دو متغیره پیوسته

مثال

تابع چگالی حاشیه‌ای X

$$f(x) = \int_0^2 \frac{3}{5} x(y+x) dy = \frac{3}{5} x \left(\frac{y^2}{2} + xy \right) = \frac{6}{5} x(1+x)$$

تابع چگالی حاشیه‌ای Y

$$f(y) = \int_0^1 \frac{3}{5} x(y+x) dx = \frac{3}{5} \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{3} \right)$$



توزیع‌های دو متغیره پیوسته

مثال

$$f(x|y) = \frac{\frac{3}{5}x(y+x)}{\frac{3}{5}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{6x(y+x)}{2+3y}$$

تابع توزیع شرطی X

$$f(y|x) = \frac{(y+x)}{2(1+x)}$$

تابع توزیع شرطی Y



همبستگی دو متغیر X و Y

برای بررسی همبستگی دو متغیر X و Y معمولاً از کوواریانس استفاده می‌شود؛

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

در حالت پیوسته؛

$$E(X) = \int xf(x)dx$$

$E(X)$: با استفاده از تابع چگالی حاشیه‌ای X محاسبه می‌شود:

$$E(Y) = \int yf(y)dy$$

$E(Y)$: با استفاده از تابع چگالی حاشیه‌ای Y محاسبه می‌شود:

$$E(XY) = \int_y \int_x xyf(x, y)dxdy$$



امید ریاضی شرطی دو متغیر X و Y

یکی از معیارهای مهم برای ارزیابی رابطه دو متغیر تصادفی، امید ریاضی شرطی است. امید ریاضی شرطی را می‌توان با استفاده از توابع چگالی شرطی به دست آورد؛

$$E(X|y) = \int_x x f(x|y) dx = h(y)$$

$$E(Y|x) = \int_y y f(y|x) dy = g(x)$$

اگر امید ریاضی شرطی برای یک متغیر تابعی از متغیر دیگر باشد، آنگاه این دو متغیر همبستگی دارند. از طرف دیگر، اگر امید ریاضی شرطی Y تابعی از X نباشد، آنگاه X و Y مستقل از هم هستند. در این صورت،

$$E(Y|x) = E(Y) \quad \text{امید ریاضی شرطی و غیرشرطی با هم برابرند:}$$