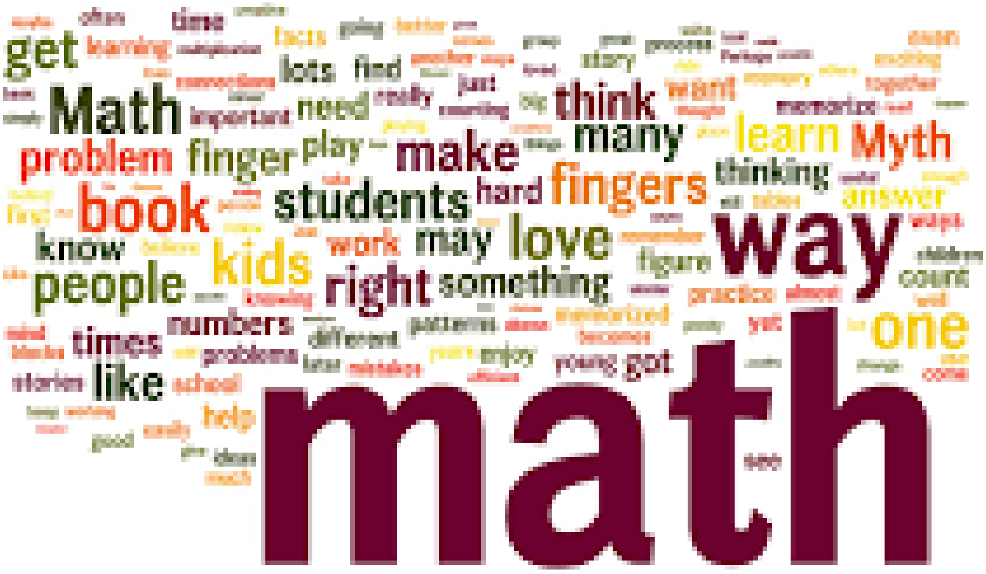
دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

جبر پیشرفته (دوره کارشناسی ارشد)

محمود بهبودی[1]



۳ دی ۱۳۹۶

[1] دانشیار دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

این نوشتار جهت استفاده دانشجویان کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان آماده شده است و استفاده از آن برای دیگر موسسات آموزش عالی و دانشجویان بلامانع است.

باعث افتخار نویسنده است که نقدها، ایرادات و پیشنهادهای خود را به آدرس ایمیل زیر ارسال نمایید.

mbehbood@cc.iut.ac.ir

مقدمه

متن پیش‌رو حاصل چندین سال تجربه تدریس جبر اینجانب برای دانشجویان دوره کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان است...

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اساسی نظریه مدول

در این فصل مفاهیم پایه‌ای را بیان می‌کنیم. بسیاری از نمادها و علائم و ساختارها در همین فصل معرفی می‌شوند و در سرتاسر این نوشتار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ مدول‌ها و مثال‌های آن

هر کسی که سر رشته در ریاضیات دارد با فضاهای برداری آشنا شده است. یک فضای برداری متشکل از یک گروه آبلی مانند $(V,+)$ و یک میدان مانند F است که تحت عمل ضرب در اسکالر $F \times V \longrightarrow V$: . با هم مرتبط می‌شوند و در خواص زیر صدق می‌کند:

(۱) برای هر $r,s \in F$ و هر $v \in V$ داریم $(rs).v = r.(s.v)$.

(۲) برای هر $r,s \in F$ و هر $v \in V$ داریم $(r+s).v = r.v + s.v$.

(۳) برای هر $r \in F$ و هر $v,u \in V$ داریم $r.(u+v) = r.u + r.v$.

(۴) برای هر $v \in V$ داریم $1_F.v = v$.

حال طبیعی است که بخواهیم مفهوم فضای برداری را تعمیم دهیم. این تعمیم با نام مدول شناخته می‌شود. در واقع به جای میدان F یک حلقه دلخواه قرار می‌دهیم و یک ضرب در اسکالر مناسب و با ویژگی‌های شبیه بالا که ارتباط گروه آبلی را با حلقه مشخص کند. چون حلقه لزوما جابجایی نیست پس باید صفت چپ و راست را دقیق مشخص کنیم. اکنون تعریف دقیق مدول را می‌آوریم.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم که R یک حلقه و $(M,+)$ یک گروه آبلی باشد. اگر عمل ضرب در اسکالر $R \times M \longrightarrow M$: . در خواص زیر صدق کند، گوییم M یک Rـ مدول چپ است:*

(۱) برای هر $r,s \in R$ و هر $m \in M$ داریم $(rs).m = r.(s.m)$.

(۲) برای هر $r,s \in R$ و هر $m \in M$ داریم $(r+s).m = r.m + s.m$.

(۳) برای هر $r \in R$ و هر $m,m' \in M$ داریم $r.(m+m') = r.m + r.m'$.

به صورت مشابه گوییم M یک Rـ مدول راست است هرگاه ضرب در اسکالر $M \times R \longrightarrow M$: . در خواص زیر صدق کند:

(۱) برای هر $r, s \in R$ و هر $m \in M$ داریم $m.(rs) = (m.r).s$.

(۲) برای هر $r, s \in R$ و هر $m \in M$ داریم $m.(r+s) = m.r + m.s$.

(۳) برای هر $r \in R$ و هر $m, m' \in M$ داریم $(m+m').r = m.r + m'.r$.

فرض کنیم R حلقه یکدار باشد. اگر Rــ مدول چپ (راست) M در خاصیت زیر صدق کند گوییم M یک Rــ مدول چپ یکانی (راست یکانی) است.

(۴) برای هر $m \in M$ داریم $1_R.m = m$ ($m.1_R = m$).

مثال ۲.۱.۱. *هر فضای برداری مثالی از یک مدول چپ (راست) یکانی است.*

مثال ۳.۱.۱. *فرض کنیم M یک گروه آبلی جمعی باشد (مانند $\mathbb{Z}_n$) به صورت کاملا طبیعی می‌توان M را با ضرب در اسکالر زیر تبدیل به یک $\mathbb{Z}$ــ مدول چپ یکانی تبدیل کرد.*

$$n.m := \overbrace{m + \dots + m}^{n\text{ بار}}.$$

مثال ۴.۱.۱. *فرض کنیم M یک گروه جمعی آبلی دلخواه با بیش از دو عضو و R یک حلقه با بیش از دو عضو باشد. در این صورت با ضرب در اسکالر (بدیهی) $r.m = 0$، M یک Rــ مدول چپ است که یکانی نیست.*

مثال ۵.۱.۱. *فرض کنیم که R حلقه (غیر یکدار) $2\mathbb{Z}$ باشد و M گروهی جمعی (آبلی) $\mathbb{Z}$. در این صورت با ضرب در اسکالر $2k.m = 2km$، M یک Rــ مدول چپ است که یکانی نیست.*

مثال ۶.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد که لزوما یکدار و جابجایی نیست. اگر M را گروهی جمعی (آبلی) حلقه یعنی $(R,+)$ فرض کنیم آنگاه با ضرب در اسکالر $r.m = rm$ خود R یک Rــ مدول چپ است که اگر R یکدار باشد مدول چپ یکانی می‌شود. اگر ضرب در اسکالر را به صورت $m.r = mr$ تعریف کنیم آنگاه خود R یک Rــ مدول راست است که اگر R یکدار باشد مدول راست یکانی می‌شود. هر وقت R را به عنوان مدول روی خودش در نظر بگیریم از نماد ${}_RR$ برای مدول چپ و از نماد R_R برای مدول راست استفاده می‌کنیم.*

مثال ۷.۱.۱. *فرض کنیم که R یک حلقه و I یک ایده‌آل چپ R باشد. می‌دانیم که R/I یک گروهی جمعی آبلی است (گروه خارج قسمتی). ضرب در اسکالر را به صورت $r.(s+I) = rs+I$ تعریف می‌کنیم. در این صورت R/I یک Rــ مدول چپ است که اگر R یکدار باشد یک مدول چپ یکانی است. (آیا این گروه خارج قسمتی می‌تواند تبدیل به Rــ مدول راست شود؟).*

مثال ۸.۱.۱. *فرض کنیم R یک میدان ناشمارا باشد. در این صورت $\mathbb{Z}$ با هیچ ضرب در اسکالری تبدیل به Rــ مدول چپ یکانی نمی‌شود. به برهان خلف؛ فرض کنیم $\mathbb{Z}$ با ضرب در اسکالر. تبدیل به یک Rــ مدول چپ یکانی شود. در نتیجه برای یک عدد صحیح ناصفر m و از این لحظه ثابت، مجموعه $\{r.m \mid r \in R, m \in \mathbb{Z}\}$ یک زیر مجموعه از $\mathbb{Z}$ است و چون $\mathbb{Z}$ شمارا و R ناشمارا است پس باید عناصر متمایز r و s در R چنان باشد که $r.m = s.m$. یعنی $(r-s).m = 0$. با ضرب طرفین در وارون $r-s$ از چپ و استفاده از خاصیت (۱) ضرب در اسکالر داریم $1.m = 0$. حال از فرض یکانی، $m = 0$ و این تناقض است.*

مثال ۹.۱.۱. *فرض کنیم $M=(\mathbb{R},\mathbb{R})$ یک گروه جمعی و $R=\mathbb{Q}$ باشد. با ضرب در اسکالر $r.(x,y)=(rx,\circ)$، M یک $\mathbb{Q}$ــ مدول چپ است که یکانی نیست.*

مثال ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم I ایده‌آل چپ حلقه R باشد. در این صورت I یک گروه جمعی آبلی است. برای هر $x\in I$ و هر $r\in R$ تعریف می‌کنیم $r.x=rx$. در این صورت I یک Rــ مدول چپ است.*

مثال ۱۱.۱.۱. *اگر R یک حلقه باشد آنگاه $M_n(R)$ با ضرب در اسکالر $r.(a_{ij})=(ra_{ij})$ یک Rــ مدول چپ است.*

گزاره ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد. اگر M یک Rــ مدول چپ (یکانی) باشد آنگاه با ضرب در اسکالر $m.r=rm$، M یک Rــ مدول راست (یکانی) است.*

اثبات. بدیهی است. $\square$

گزاره ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم M یک Rــ مدول چپ باشد. برای $m\in M$ و $r\in R$ داریم:*
(۱) $\circ_R.m=\circ$ که $\circ_R$، صفر حلقه است.
(۲) $(-r).m=-(r.m)$.

اثبات. (۱) طبق خاصیت (۲) تعریف مدول داریم

$$\circ.m=(\circ+\circ).m=\circ.m+\circ.m.$$

اما در M حذف داریم پس $\circ.m=\circ$.
(۲) طبق (۱) داریم

$$\circ=\circ.m=(r+(-r)).m=r.m+(-r).m.$$

پس $(-r).m=-(r.m)$. $\square$

در مثال زیر با کمک یک خانواده از مدول‌ها یک مدول جدید ایجاد می‌کنیم.

تعریف و مثال ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rــ مدول‌های چپ باشد. تمام دنباله‌ها به صورت $(x_i)_{i\in I}$ که برای هر $i\in I$، $x_i\in M_i$ را در نظر می‌گیریم. جمع و ضرب در اسکار را به صورت*

$$(x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I}=(x_i+y_i)_{i\in I},\ \ r.(x_i)_{i\in I}=(rx_i)_{i\in I}$$

تعریف می‌کنیم و این دنباله‌ها را به یک Rــ مدول چپ تبدیل می‌کنیم. مدول جدید را حاصل ضرب مستقیم یا حاصل ضرب دکارتی M_i ها گوییم و با $\prod_{i\in I}M_i$ نشان می‌دهیم. اگر I متناهی باشد از نماد $M_1\times\ldots\times M_k$ نیز استفاده می‌کنیم که $k=|I|$. اگر I تهی باشد تعریف می‌کنیم $\prod_{i\in I}M_i=\circ$.

تعریف و مثال ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم M یک گروه آبلی باشد و N زیرگروه M. آنگاه M/N با ضرب در اسکالر خوشتعریف $k.(m+N)=km+N$ یک $\mathbb{Z}$ــ مدول چپ است.*

تمرین‌ها

تمرین ۱.۱.۱۶. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. نشان دهید که اگر S یک حلقه و به علاوه $f : S \longrightarrow R$ یک همریختی حلقه‌ای باشد آنگاه برای هر $s \in S$ و هر $m \in M$ ضرب در اسکالر $s.m = f(s)m$ یک Sـ مدول چپ است. در مورد یکانی بودن Sـ مدول چپ بحث کنید.*

تمرین ۱.۱.۱۷. *M، R و ضرب در اسکالری چنان معرفی کنید که خاصیت (۳) تعریف مدول را نداشته باشد.*

تمرین ۱.۱.۱۸. *نشان دهید که هر گروه آبلی دلخواه را فقط و فقط به یک صورت می‌توان به یک $\mathbb{Z}$ـ مدول یکانی تبدیل کرد.*

تمرین ۱.۱.۱۹. *آیا میدانی مانند F وجود دارد که $\mathbb{Z}$ را با ضرب در اسکالری به Fـ مدول یکانی تبدیل کند؟*

۲.۱ زیرمدول‌ها و مدول‌های خارج قسمتی

مانند همه ساختارهای ریاضی مانند گروه‌ها، حلقه‌ها و ... می‌خواهیم ببینم چه زمانی یک زیرمجموعه از یک مدول خود مدول است. قبل از تعریف زیرمدول یک قرار داد می‌کنیم.

قرار داد ۱.۲.۱. *برای راحتی $r.m$ را با rm نشان می‌دهیم و انتظار داریم که مخاطب باید نوع ضرب را با توجه به مطلب تشخیص دهد. هر جا صفت چپ و راست از مدول را ذکر نکردیم مدول را چپ فرض کنید. در ادامه حلقه‌ها یکدار هستند مگر خلاف آن را ذکر کنیم.*

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. زیرمجموعه ناتهی N از M را زیرمدول گوییم هرگاه N زیرگروه M باشد و تحت ضرب در اسکالر بسته باشد یعنی برای هر $n \in N$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $rn \in N$. زیرمدول بودن را با $N \leq M$ نشان می‌دهیم.*

مثال ۳.۲.۱. *$۲\mathbb{Z}$ یک زیرمدول $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ است.*

مثال ۴.۲.۱. *واضح است که برای هر Rـ مدول چپ M، خود M و $\{۰\}$ زیرمدول‌های M هستند که به آنها زیرمدل‌های بدیهی گوییم. زیرمدول $\{۰\}$ را برای راحتی با ۰ نشان می‌دهیم.*

مثال ۵.۲.۱. *هر ایده‌آل چپ از حلقه R زیرمدولی از R است.*

تعریف و مثال ۶.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول باشد. به علاوه فرض کنیم $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد. اگر I ناتهی باشد آنگاه*

$$\sum_{i\in I} N_i = \{\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} \mid n \geq ۱,\ i_k \in I,\ x_{i_k} \in N_{i_k}\}$$

یک زیرمدول M است. اگر I تهی باشد تعریف می‌کنیم $\sum_{i\in I} N_i = ۰$.

تعریف و مثال ۷.۲.۱. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ باشد. تمام دنباله‌ها به صورت $(x_i)_{i\in I}$ از $\prod_{i\in I} M_i$ را در نظر می‌گیریم که به جز تعداد متناهی اندیس بقیه مولفه‌ها صفرند. با همان جمع و ضرب در اسکار $\prod_{i\in I} M_i$ این دنباله‌ها یک Rـ مدول چپ تشکیل می‌دهند. مدول جدید (در واقع زیرمدول $\prod_{i\in I} M_i$) را حاصل جمع مستقیم M_i ها گوییم و با $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نشان می‌دهیم. اگر I متناهی باشد از نماد $M_۱ \oplus ... \oplus M_k$ نیز استفاده می‌کنیم که $k = |I|$. اگر I تهی باشد تعریف می‌کنیم $\bigoplus_{i\in I} M_i = ۰$.*

گزاره ۸.۲.۱. *برای مجموعه متناهی I داریم که $\bigoplus_{i\in I} M = \prod_{i\in I} M_i$.*

اثبات. بدیهی است. □

قضیه ۹.۲.۱. *(محک فشرده) زیرمجموعه ناتهی N از Rـ مدول چپ یکانی M یک زیرمدول است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in N$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $rx + y \in N$.*

اثبات. اگر N زیرمدول باشد واضح است که برای هر $x,y \in N$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $rx+y \in N$.
حال فرض کنیم برای هر $x,y \in N$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $rx+y \in N$. فرض کنیم $r = ۱$. پس $x+y \in N$. اگر فرض کنیم $r = -۱$ آنگاه $y - x \in N$ و این یعنی N زیرگروه (آبلی) M است. حال فرض کنیم $y = ۰$ باشد. در این صورت برای هر $x \in N$ داریم $rx \in N$. این نشان می‌دهد که ضرب در اسکالر از روی $R \times M$ به $R \times N$ تحدید شده است. بنابراین باید خواص (۱)، (۲) و (۳) از تعریف مدول را داشته باشد. $\square$

مثال ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم $R = F$ که F میدان و V یک Fـ مدول (فضای برداری) باشد. در این صورت با کمک محک فشرده زیرمدول‌های V همان زیرفضاهای برداری هستند.*

مثال ۱۱.۲.۱. *با کمک محک فشرده به راحتی دیده می‌شود که تمام زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$ به صورت $n\mathbb{Z}$ است. به طور کلی وقتی راجع به $\mathbb{Z}$ـ مدول‌ها صحبت می‌کنیم زیرگروه‌ها همان زیرمدول‌ها هستند.*

گزاره ۱۲.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول یکانی و به علاوه $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ زیرمدول M است.*

اثبات. می‌خواهیم از محک فشرده استفاده کنیم. ابتدا باید دقت کنیم که $۰ \in N$ (چرا؟). پس N ناتهی است. حال فرض کنیم که $x,y \in N$. پس برای هر i داریم که $x,y \in N_i$. از طرفی چون برای هر i، N_i زیرمدول است پس برای هر $r \in R$ داریم که $rx \in N$. دوباره برای هر i، N_i زیرمدول است پس $rx + y \in N_i$. بنابراین $rx + y \in N$. $\square$

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*
(۱) برای هر عدد طبیعی n، هر عضو $i_k \in I$ و هر عضو x_{i_k} از N_{i_k}، اگر $\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} = ۰$ نتیجه شود $x_{i_k} = ۰$ برای هر $۱ \leq k \leq n$ (یعنی $\{N_i\}_{i\in I}$ مستقل است).
(۲) برای هر i داریم

$$N_i \cap (\sum_{i\neq j} N_j) = ۰.$$

(۳) هر عنصر $\sum_{i\in I} N_i$ نمایشی به صورت یکتا بر حسب تعداد متناهی از اعضای N_i ها دارد.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $x \in N_i \cap (\sum_{i\neq j} N_j)$. پس

$$n_i = x = n_{j_۱} + ... + n_{j_k}, \qquad (k \geq ۱,\ n_{j_l} \in N_{j_l}).$$

پس $n_i - n_{j_۱} - ... - n_{j_k} = ۰$. حال طبق فرض باید $x = n_i = ۰$ و حکم به دست می‌آید.
(۲) $\Leftarrow$ (۳). طبق تعریف $\sum_{i\in I} N_i$ هر عضو از $\sum_{i\in I} N_i$ مانند x نمایشی به صورت $\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k}$ دارد که n عدد طبیعی، $i_k \in I$ و $x_{i_k} \in N_{i_k}$. اکنون فرض کنیم

$$\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} = \sum_{k=۱}^{n} x'_{i_k}.$$

دقت کنید که اگر لازم باشد مولفه صفر اضافه می‌کنیم تا اندیس‌های اعضای مجموع برابر گردد. حال

$$x_{i_1} - x'_{i_1} = \sum_{k=2}^{n}(x_{i_k} - x'_{i_k}).$$

با دقت به دو طرف تساوی بالا در خواهیم یافت که

$$x_{i_1} - x'_{i_1} \in N_{i_1} \cap \sum_{k=2}^{n} N_{i_k}.$$

پس طبق فرض باید $x_{i_1} - x'_{i_1} = 0$. یعنی $x_{i_1} = x'_{i_1}$. برای اثبات حکم کافی است روند بالا را برای x_{i_2} تا x_{i_n} تکرار کنیم.

(۳) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنیم برای هر عدد طبیعی n، هر عضو $i_k \in I$ و هر عضو x_{i_k} از N_{i_k}، داریم $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = 0$. اما داریم

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = 0 = \sum_{k=1}^{n} 0.$$

حال طبق فرض برای هر $1 \leq k \leq n$، باید $x_{i_k} = 0$. $\square$

مثال ۱۴.۲.۱. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_{30}$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم*

$$N_1 = \{\bar{0}, \overline{15}\},\ N_2 = \{\bar{0}, \overline{10}, \overline{20}\},\ N_3 = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\}.$$

با بررسی سرراست معلوم می‌شود که N_i ها یک خانواده مستقل هستد یعنی در شرط (۱) قضیه ۱۳.۲.۱، صدق می‌کنند.

مثال ۱۵.۲.۱. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ یعنی $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$، در هیچ یک از گزاره‌های قضیه ۱۳.۲.۱، صدق نمی‌کند. همینطور $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_4$.*

گزاره ۱۶.۲.۱. (*قانون مدولی*) *اگر N، P و Q زیرمدول‌های Rـ مدول چپ M و $N \subseteq Q$ باشد آنگاه داریم*

$$N + (P \cap Q) = (N + P) \cap (N + Q).$$

اثبات. واضح است که $P \cap Q \subseteq P$ و $P \cap Q \subseteq Q$ در نتیجه $N + (P \cap Q) \subseteq N + P$ و $N + (P \cap Q) \subseteq N + Q$. بنابراین $N + (P \cap Q) \subseteq (N + P) \cap (N + Q)$. اکنون فرض کنیم $x \in (N + P) \cap (N + Q)$. پس

$$n + p = x = n' + q \qquad (n, n' \in N,\ p \in P,\ q \in Q).$$

طبق فرض $N \subseteq Q$، داریم $p = n' + q - n \in Q$. در نتیجه $p \in P \cap Q$. این نشان می‌دهد که $x = n + p \in N + (P \cap Q)$ و اثبات کامل است. $\square$

تعریف و مثال ۱.۲.۱۷. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد و $X \subseteq M$. قرار می‌دهیم*

$$RX = \{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k + \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \mid n \geq 1,\ t_k \in \mathbb{Z},\ r_k \in R,\ x_k \in X\}$$

و اگر X تهی باشد $RX = 0$. به راحتی دیده می‌شود RX یک زیرمدول است که به آن زیرمدول تولید شده توسط X گوییم. اگر $X = \{x\}$ باشد آنگاه به RX زیرمدول دوری است و برای راحتی با Rx نشان می‌دهیم. این مطلب واضح است که اگر X تک عضوی باشد آنگاه

$$Rx = \{rx + tx \mid r \in R,\ t \in \mathbb{Z}\}$$

و در نتیجه اگر X دلخواه باشد آنگاه $RX = \sum_{x \in X} Rx$. اگر فرض کنیم M مدول چپ یکانی است آنگاه

$$RX = \{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k \mid n \geq 1,\ r_k \in R,\ x_k \in X\}, \quad Rx = \{rx \mid r \in R\}.$$

گزاره ۱.۲.۱۸. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد و $X \subseteq M$. در این صورت RX کوچکترین زیرمدول از M است که شامل X است.*

اثبات. این مطلب که RX زیرمدولی شامل X است واضح است. فرض کنیم N زیرمدولی شامل X باشد پس طبق تعریف زیرمدول باید $\sum_{k=1}^{n} r_k x_k + \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \in N$ که $n \geq 1$، $r_k \in R$، $t_k \in \mathbb{Z}$ و $x_k \in X$. پس باید $RX \subseteq N$. یعنی RX کوچکترین زیرمدول شامل X است. □

تعریف ۱.۲.۱۹. *گوییم Rـ مدول چپ M دارای مجموعه مولدی مانند $X \subseteq M$ است هرگاه $M = RX$. اگر X متناهی باشد آنگاه M را متناهی مولد گوییم. اگر X تک عضوی باشد آنگاه M را دوری گوییم (فرض کنیم M یکانی باشد. متناهی مولد بودن M یعنی اعضای m_1، ...، m_t از M چنان وجود دارند که $M = Rm_1 + \ldots + Rm_t$ و دوری بودن یعنی $t = 1$). برای مدول 0 مجموعه تهی را مجموعه مولد در نظر می‌گیریم.*

مثال ۱.۲.۲۰. *برای هر مدول M، $X = M$ یک مجموعه مولد است.*

مثال ۱.۲.۲۱. *هر فضای برداری دارای پایه است که مجموعه مولد آن نیز می‌باشد (در مورد پایه برای مدول بعدا بحث مفصلی خواهیم داشت).*

مثال ۱.۲.۲۲. *برای هر حلقه یکدار R، $\{1\}$ یک مجموعه مولد است و در نتیجه هر حلقه (یکدار) یک مدول دوری است.*

مثال ۱.۲.۲۳. *برای مدول ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ دو مجموعه $\{1\}$ و $\{2, 3\}$ مجموعه مولد هستند (آیا مجموعه مولد سه عضوی یا بیشتر برای ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ می‌شناسید؟).*

تعریف و مثال ۱.۲.۲۴. *فرض کنیم N یک Rـ مدول چپ باشد و $N \leq M$. گروه آبلی*

$$M/N = \{x + N \mid x \in M\}$$

را در نظر می‌گیریم و با ضرب در اسکالر خوشتعریف $r.(x+N) = rx + N$ (چرا؟)، M/N را به یک Rـ مدول چپ تبدیل می‌کنیم. به Rـ مدول جدید، مدول خارج قسمتی گوییم.

تعریف و مثال ۲۵.۲.۱. *فرض کنیم p یک عدد اول باشد. تعریف می‌کنیم*

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

با محک فشرده $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ زیرمدولی از $\mathbb{Z}$ـ مدول (خارج قسمتی) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۲۶.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ناصفر باشد. در این صورت اگر M هیچ زیرمدول نابدیهی نداشته باشد گوییم M ساده است.*

برای مدول ساده دو مثال می‌آوریم اما در بخش‌های بعدی به طور مفصل در مورد این مفهوم بسیار مهم جبر خواهیم گفت.

مثال ۲۷.۲.۱. *برای هر حلقه تقسیم D مدول ${}_DD$ یک مدول ساده (چپ) است.*

مثال ۲۸.۲.۱. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_4$ ساده نیست (چرا؟).*

مثال ۲۹.۲.۱. *برای هر عدد اول p، $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_p$ یک مدول ساده است. به طور کلی هر $\mathbb{Z}$ـ مدول ساده به صورت $\mathbb{Z}_p$ است. زیرا اگر M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول ساده باشد آنگاه برای هر $0 \neq m \in M$ چون $\mathbb{Z}m$ ناصفر است پس طبق تعریف مدول ساده، $M = \mathbb{Z}m$. یعنی M گروه آبلی دوری است. حال طبق قضیه‌ای از مبانی جبر M باید یکریخت گروهی با یک $\mathbb{Z}_n$ که n عددی طبیعی و یا یکریخت گروهی با $\mathbb{Z}$ باشد. اما $\mathbb{Z}$ بیشمار زیرگروه نابدیهی دارد پس ساده نیست و در نتیجه M باید یکریخت گروهی با یک $\mathbb{Z}_n$ که n عددی طبیعی، باشد. با محاسبه سر راست n باید اول باشد (چرا؟).*

تعریف ۳۰.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ناصفر باشد. زیرمدول ناصفر N از M را زیرمدول مینیمال گوییم هرگاه برای هر زیرمدول K از M که $K \lneq N$ نتیجه شود $K = 0$.*

مثال ۳۱.۲.۱. *در $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_4$ واضح است که $2\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ زیرمدول مینیمال است.*

مثال ۳۲.۲.۱. *در هر مدول ساده M، زیرمدول مینیمال خود M است.*

مثال ۳۳.۲.۱. *مدول ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ زیرمدول مینیمال ندارد. زیرا تمام زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$ به صورت $n\mathbb{Z}$ است که همواره $n\mathbb{Z}$ زیرمدول ناصفر $n^2\mathbb{Z}$ را در دل خود به صورت سره دارد.*

تعریف ۳۴.۲.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ناصفر باشد. زیرمدول سره N از M را زیرمدول ماکسیمال گوییم هرگاه برای هر زیرمدول K از M که $N \lneq K$ نتیجه شود $K = M$.*

مثال ۳۵.۲.۱. *فرض کنیم D حلقه تقسیم باشد. زیرمدول 0، زیرمدول ماکسیمال برای مدول ${}_DD$ است.*

مثال ۳۶.۲.۱. *در $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_8$ زیرمدول $2\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ ماکسیمال است.*

مثال ۳۷.۲.۱. *برای هر عدد اول p، $p\mathbb{Z}$ یک زیرمدول ماکسیمال $\mathbb{Z}$ است.*

مثال ۳۸.۲.۱. *$\mathbb{Z}$ ـ مدول $\mathbb{Q}$ زیرمدول ماکسیمال ندارد. زیرا اگر M زیرگروه (زیرمدول) ماکسیمال گروه جمعی $\mathbb{Q}$ باشد آنگاه طبق قضیه تناظر از گروه‌ها $\mathbb{Q}/M$ فقط زیرگروه بدیهی دارد یعنی به صورت معادل $\mathbb{Q}/M$ یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول ساده است. پس طبق مثال ۲۹.۲.۱ ، عدد اول p چنان وجود دارد که $\mathbb{Q}/M \cong \mathbb{Z}_p$ (به عنوان گروه). اما $p\mathbb{Z}_p = ۰$ پس باید $p\mathbb{Q} \subseteq M$. حال اگر $m/n \in \mathbb{Q}$ دلخواه باشد داریم که $m/n = p(m/pn) \in p\mathbb{Q} \subseteq M$. پس $M = \mathbb{Q}$ و این تناقض است.*

قضیه ۳۹.۲.۱. *فرض کنیم M یک R ـ مدول چپ ناصفر متناهی مولد باشد. در این صورت M زیر مدول ماکسیمال دارد.*

اثبات. قضیه را با کمک لم زرن اثبات می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{N \mid \text{یک زیرمدول سره از } M \text{ است } N\}.$$

چون زیرمدول صفر در $\mathcal{A}$ است پس $\mathcal{A}$ ناتهی است. می‌دانیم که با رابطه شمول می‌توان $\mathcal{A}$ را به یک مجموعه جزئا مرتب تبدیل کنیم. حال زنجیر ناتهی دلخواه $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ را در $\mathcal{A}$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $N = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha$. با یک بررسی سر راست N یک زیرمدول M است. اگر $N = M$ باشد آنگاه N نیز متناهی مولد می‌شود که مجموعه مولدهای آن با M یکسان است یعنی برابر مجموعه X است. پس اندیس α چنان وجود دارد که $X \subseteq N_\alpha$. در نتیجه $RX = M = N_\alpha$. این در تناقض آشکار با اعضای زنجیر است که در $\mathcal{A}$ قرار دارند. پس $N \neq M$ و در نتیجه $N \in \mathcal{A}$. به وضوح N یک کران بالا برای زنجیر است. یعنی تا اینجا نشان داده‌ایم که هر زنجیر ناتهی از $\mathcal{A}$ کران بالایی در $\mathcal{A}$ دارد و در نتیجه طبق لم زرن $\mathcal{A}$ داری عضو ماکسیمال مانند K است. چون $K \in \mathcal{A}$ پس K زیرمدول سره است. باید نشان دهیم که K زیرمدول ماکسیمال است تا اثبات کامل شود. فرض کنیم که K ماکسیمال نباشد پس زیرمدول L چنان وجود دارد که $K \lneq L \lneq M$. بنابراین $L \in \mathcal{A}$ و این یعنی K عضو ماکسیمال $\mathcal{A}$ نیست که تناقض است. □

نتیجه ۴۰.۲.۱. *هر حلقه یکدار R ایده‌آل چپ ماکسیمال دارد.*

اثبات. مدول ${}_RR$ یک مدول دوری است. پس طبق قضیه ۳۹.۲.۱، مدول R زیرمدول (ایده‌آل چپ) ماکسیمال دارد. □

تمرین‌ها

تمرین ۴۱.۲.۱. *نشان دهید در قانون مدولی شرط $N \subseteq Q$ قابل حذف نیست.*

تمرین ۴۲.۲.۱. *فرض کنیم M یک R ـ مدول و به علاوه $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ زیرمدول M است.*

تمرین ۴۳.۲.۱. *فرض کنیم M یک R ـ مدول چپ، X زیرمجموعه ناتهی M و I ایده‌آل چپ از R باشد. نشان دهید*

$$IX = \{\sum_{k=۱}^{n} i_k x_k \mid n \geq ۱,\ i_k \in I,\ x_k \in X\}$$

زیرمدول از M است. فرض کنیم I ایده‌آل حلقه R باشد. اگر $IM = ۰$ آنگاه نشان دهید ضرب در اسکالر $(r+I).m = rm$، M را به یک (R/I) ـ مدول چپ تبدیل می‌کند.

تمرین ۴۴.۲.۱. فرض کنیم M یک Rــ مدول چپ، I ایده‌آل حلقه R با شرط $IM = 0$ باشد. نشان دهید که N زیرمدول Rــ مدول چپ M است اگر و تنها اگر N زیرمدول (R/I)ــ مدول چپ M باشد.

تمرین ۴۵.۲.۱. نشان دهید هر مدول ساده دوری است.

تمرین ۴۶.۲.۱. تمام زیرمدول‌های $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ را شناسایی کنید. سپس نشان دهید این مدول زیرمدول ماکسیمال ندارد در حالی که زیرمدول مینیمال دارد.

تمرین ۴۷.۲.۱. مدول دوری مثال بزنید که زیرمدولی از آن دوری نباشد.

تمرین ۴۸.۲.۱. مدول متناهی مولدی مثال بزنید که زیرمدولی از آن متناهی مولد نباشد.

تمرین ۴۹.۲.۱. اگر N، P و Q زیرمدول‌های Rــ مدول چپ M و $Q \subseteq N$ باشد آنگاه نشان دهید که داریم

$$N \cap (P + Q) = (N \cap P) + (N \cap Q).$$

به علاوه نشان دهید شرط $Q \subseteq N$ قابل حذف نیست.

۳.۱ همریختی مدولی و قضایای مربوطه

مانند سایر ساختارهای ریاضی یعنی گروه‌ها، فضاهای بردار و ... اکنون توجه خود را به توابع خاصی که بین مدول‌ها تعریف می‌شوند معطوف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ باشند. تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک Rـ همریختی مدولی می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in M$ و هر $r \in R$ داشته باشیم*
(۱) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
(۲) $f(rx) = rf(x)$.
اگر f پوشا باشد آن را همریختی مدولی پوشا و اگر f یک به یک باشد آن را همریختی مدولی یک به یک نامیم. اگر f هم پوشا و هم یک به یک باشد به آن یکریختی مدولی گوییم. اگر بیم ابهام با سایر همریختی‌ها (گروهی، حلقه‌ای و...) نباشد صفت مدولی را حذف می‌کنیم.

مثال ۲.۳.۱. *تابع $f : \mathbb{Z} \longrightarrow ۲\mathbb{Z}$ با ضابطه $f(x) = ۲x$ یک $\mathbb{Z}$ـ یکریختی مدولی است.*

مثال ۳.۳.۱. *تابع $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه $f((x,y)) = ۲x$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی است.*

مثال ۴.۳.۱. *تابع $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ با ضابطه $f((x,y)) = (x, y+۱)$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی نیست.*

تعریف و مثال ۵.۳.۱. *برای هر Rـ مدول M تابع $id_M : M \longrightarrow M$ با ضابطه $id_M(x) = x$ یک یکریختی است که به آن همریختی همانی گوییم.*

تعریف و مثال ۶.۳.۱. *برای هر Rـ مدول M و هر زیرمدول (سره) N تابع $i : N \longrightarrow M$ با ضابطه $i(x) = x$ یک همریختی یک به یک (غیر پوشا) است که به آن همریختی شمول گوییم.*

تعریف و مثال ۷.۳.۱. *برای هر دو Rـ مدول ناصفر M و N تابع $o : M \longrightarrow N$ با ضابطه $o(x) = ۰$ یک همریختی مدولی (نه یک به یک و نه پوشا) است که به آن همریختی صفر گوییم.*

تعریف و مثال ۸.۳.۱. *برای هر Rـ مدول M و زیرمدول N از M تابع $\pi : M \longrightarrow M/N$ با ضابطه $\pi(x) = x + N$ یک همریختی مدولی (پوشا) است که به آن همریختی طبیعی گوییم.*

تعریف و مثال ۹.۳.۱. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ باشد. تابع*

$$p_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i, \ \ (p_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i)$$

با ضابطه $p_i((x_i)_{i\in I}) = x_i$ یک همریختی مدولی پوشا است.

تعریف و مثال ۱۰.۳.۱. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ باشد. تابع*

$$\lambda_i : M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i, \ \ (\lambda_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i)$$

با ضابطه

$$\lambda_i(x_i) = (..., 0, ..., 0, \overbrace{x_i}^{\text{محل } i \text{ ام}}, 0, ..., 0, ...)$$

یک همریختی مدولی یک به یک است (عبارت سمت دوم تساوی صرفا یک نماد است تا تصور بهتری از ضابطه این تابع داشته باشیم و باید زمانی که مجموعه اندیس گذار ناشمارا است با حساسیت ویژه به این نماد دقت شود).

گزاره ۱.۳.۱۱. با مفروضات قبل، همواره داریم $p_i\lambda_i = id_{M_i}$.

اثبات. بدیهی است. □

تذکر ۱.۳.۱۲. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ یکریختی مدولی باشد آنگاه می‌گوییم M با N یکریخت است و می‌نویسیم $M \cong_R N$. اگر $g : N \longrightarrow K$ یک Rـ یکریختی مدولی دیگر باشد آنگاه gf یک Rـ یکریختی مدولی است. به راحتی می‌توان دید که $f^{-1} : N \longrightarrow M$ نیز یک Rـ یکریختی مدولی است. پس رابطه یکریختی مدولی یک رابطه هم ارزی است.

تذکر ۱.۳.۱۳. اگر در جای بیم ابهام نباشد به جای "Rـ همریختی مدولی" از "همریختی مدولی" یا حتی "همریختی" استفاده می‌کنیم. همچنین به جای "$\cong_R$" از "$\cong$" استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۱.۳.۱۴. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. در این صورت برای هر زیرمدول K از M

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$

یک زیرمدول N است (در حالت خاص، اگر $K = M$ باشد زیرمدول $f(M)$ را با $Im(f)$ نشان می‌دهیم و به آن تصویر f گوییم).

اثبات. از تعریف به دست می‌آید. □

گزاره ۱.۳.۱۵. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. در این صورت برای هر زیرمدول L از N

$$f^{-1}(L) = \{x \in M \mid f(x) \in L\}$$

یک زیرمدول M است (در حالت خاص، اگر $L = 0$ باشد زیرمدول $f^{-1}(0)$ را با $Ker(f)$ نشان می‌دهیم و به آن هسته f گوییم پس $Ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$).

اثبات. از تعریف به دست می‌آید. □

تذکر ۱.۳.۱۶. همواره داریم

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

و در نتیجه $f(0) = 0$.

تذکر ۱.۳.۱۷. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ یکانی باشند. در این صورت $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in M$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $f(rx + y) = rf(x) + f(y)$.*

لم ۱.۳.۱۸. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ یکانی و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. f یک به یک است اگر و تنها اگر $Ker(f) = ۰$.*

اثبات. فرض کنیم f یک به یک باشد و $x \in Ker(f)$. ابتدا دقت کنید که همواره داریم

$$f(۰) = f(۰ + ۰) = f(۰) + f(۰)$$

و در نتیجه $f(۰) = ۰$. پس $f(x) = ۰ = f(۰)$. از یک به یکی باید $x = ۰$.
حال فرض کنیم $f(x) = f(y)$. پس $f(x-y) = f(x) - f(y) = ۰$. حال طبق تعریف هسته، $x - y \in Ker(f) = ۰$. بنابراین $x = y$. □

گزاره ۱.۳.۱۹. *اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد آنگاه شرایط زیر برقرار هستند:*
(۱) اگر Rـ همریختی $g : N \longrightarrow M$ موجود باشد که $gf = id_M$ آنگاه f یک به یک است.
(۲) اگر Rـ همریختی $g : N \longrightarrow M$ موجود باشد که $fg = id_N$ آنگاه f پوشا است.
(۳) f یکریختی است اگر و تنها اگر Rـ همریختی $g : N \longrightarrow M$ موجود باشد که $gf = id_M$ و $fg = id_N$.

اثبات. (۱) فرض کنیم همریختی $g : N \longrightarrow M$ موجود باشد که $gf = id_M$ و $f(x) = f(x')$ که $x, x' \in M$. حال داریم

$$x = id_M(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = id_M(x') = x'.$$

پس f یک به یک است.
(۲) فرض کنیم همریختی $g : N \longrightarrow M$ موجود باشد که $fg = id_N$ و $n \in N$. قرار می‌دهیم $m = g(n)$. حال داریم

$$f(m) = f(g(n)) = id_N(n) = n.$$

پس f پوشا است.
(۳) فرض کنیم f یکریختی است. یعنی f یک به یک و پوشا است پس $f^{-۱}$ وجود دارد و یک همریختی خوشتعریف است (چرا؟). این نتیجه می‌دهد که رابطه

$$g : N \longrightarrow M, \;\; g(n) = f^{-۱}(n)$$

خوشتعریف و همریختی مدولی است. g همان همریختی مورد نظر است. زیرا داریم

$$gf(m) = f^{-۱}(f(m)) = m \qquad\qquad fg(n) = f(f^{-۱})(n) = n$$

پس $gf = id_M$ و $fg = id_N$.
حال فرض کنیم Rـ همریختی $g : N \longrightarrow M$ موجود باشد که $gf = id_M$ و $fg = id_N$. پس طبق (۱) و (۲) باید f یک به یک و پوشا باشد. □

مشابه با قضایای یکریختی که در مبانی جبر در رابطه با گروه‌ها و حلقه‌ها دیده‌اید، قضایایی تحت عنوان قضایای یکریختی مدولی در نظریه مدول مطرح می‌شوند که در ادامه درس به بیان و اثبات آنها خواهیم پرداخت.

قضیه ۱.۳.۲۰. *(قضیه اول یکریختی مدولی) فرض کنیم که M و N دو Rـ مدول چپ یکانی باشند. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد آنگاه $M/Ker(f) \cong_R Im(f)$.*

اثبات. ابتدا دقت می‌کنیم که هر عنصر $M/Ker(f)$ به صورت $m + Ker(f)$ است که $m \in M$ (چرا؟). حال رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$g : M/Ker(f) \longrightarrow Im(f), \ \ g(m + Ker(f)) = f(m).$$

نشان می‌دهیم g خوشتعریف است (تابع است). اگر $m + Ker(f) = m' + Ker(f)$ آنگاه $m - m' \in Ker(f)$. در نتیجه $f(m - m') = 0$. چون f یک Rـ همریختی مدولی است داریم که $f(m) - f(m') = 0$ یا معادلا $f(m) = f(m')$. بنابراین

$$g(m + Ker(f)) = g(m' + Ker(f))$$

یعنی g خوشتعریف است.
تابع g یک Rـ همریختی مدولی است. زیرا برای هر $m, m' \in M$ داریم

$$\begin{aligned} &g(m + Ker(f) + m' + Ker(f)) = g(m + m' + Ker(f)) = f(m + m') = \\ &f(m) + f(m') = g(m + Ker(f)) + g(m' + Ker(f)). \end{aligned}$$

به علاوه برای هر $m \in M$ و هر $r \in R$ داریم

$$\begin{aligned} &g(r(m + Ker(f)) = g(rm + Ker(f)) = f(rm) = \\ &rf(m) = rg(m + Ker(f)). \end{aligned}$$

اگر $m + Ker(f) \in Ker(g)$ آنگاه $g(m + Ker(f)) = 0$. در نتیجه $f(m) = 0$. پس $m \in Ker(f)$ یا معادلا $m + Ker(f) = 0$. حال طبق لم ۱.۳.۱۸، g یک به یک است (برای نشان دادن یک به یکی می‌توانید جهت عکس خوشتعریفی را نیز دنبال کنید).
فرض کنیم $t \in Im(f)$. در این صورت $m \in M$ چنان وجود دارد که $f(m) = t$. پس

$$g(m + Ker(f)) = f(m) = t$$

یعنی g پوشا است. پس نشان داده‌ایم که $M/Ker(f) \cong Im(f)$. □

مثال ۱.۳.۲۱. *$\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ با ضابطه $f(n) = \bar{n}$ پوشا است، یعنی $Im(f) = \mathbb{Z}_5$ و به علاوه $Ker(f) = 5\mathbb{Z}$. حال طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۱.۳.۲۰، داریم $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_5$.*

نتیجه ۱.۳.۲۲. *فرض کنیم که M و N دو Rـ مدول چپ یکانی باشند. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی پوشا باشد آنگاه $M/Ker(f) \cong_R N$.*

اثبات. بدیهی است. $\square$

نتیجه ۲۳.۳.۱. *فرض کنیم که Rm یک Rــ مدول چپ دوری یکانی باشد. در این صورت ایده‌آل چپی از R مانند I وجود دارد که یکریختی مدولی $R/I \cong_R Rm$ را نتیجه می‌دهد.*

اثبات. قرار می‌دهیم
$$f : R \longrightarrow Rm, \quad f(r) = rm.$$
با یک بررسی سر راست می‌توان دید که f یک Rــ همریختی مدولی پوشا است. قرار می‌دهیم $I = Ker(f)$. واضح است که I ایده‌آل چپ از R است (چرا؟). حال بر طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، داریم $R/I \cong_R Rm$. $\square$

توجه داریم که اگر M یک Rــ مدول چپ و $K \leq N \leq M$ آنگاه N/K یک Rــ زیرمدولی از M/K است (چرا؟). ولی اگر K و N زیرمدول‌های دلخواه باشند آنگاه N/K و K/N را در حالت کلی نمی‌توانیم زیرمدولی از M/K و M/N به حساب آوریم. اما به کمک این دو زیرمدول، می‌توانیم زیرمدول‌های $(N+K)/K$ و $(K+N)/N$ از M/K و M/N را بسازییم. اگر دقت کنیم شکل عنصرهای $(N+K)/K$ و یا $(K+N)/N$ به نوعی پیچیده به نظر می‌رسد. اما قضیه دوم یکریختی مدولی نشان می‌دهد که این دو زیرمدول با مدول‌های شناخته شده‌تری یکریخت هستند.

اکنون قضیه دوم یکریختی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۴.۳.۱. (*قضیه دوم یکریختی مدولی*) *فرض کنیم که M یک Rــ مدول چپ یکانی باشد. اگر N و K زیر مدول‌های M باشند آنگاه $(N+K)/K \cong N/(N \cap K)$.*

اثبات. رابطه زیر را در نظر می‌گیریم
$$g : N \longrightarrow (N+K)/K, \quad g(n) = n + K.$$
واضح است که g خوشتعریف است (تابع است). تابع g یک Rــ همریختی مدولی است. زیرا برای هر $n, n' \in N$ داریم
$$g(n+n') = n + n' + K = (n+K) + (n'+K) = g(n) + g(n').$$
به علاوه برای هر $n \in N$ و هر $r \in R$ داریم
$$g(rn) = rn + K = r(n+K) = rg(n).$$
واضح است که g پوشا است. اکنون هسته g را محاسبه می‌کنیم
$$Ker(g) = \{n \in N \mid g(n) = 0\} = \{n \in N \mid n + K \in K\} =$$
$$\{n \in N \mid n \in K\} = N \cap K.$$
حال طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، $(N+K)/K \cong N/(N \cap K)$. $\square$

مثال ۲۵.۳.۱. *زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$۴ و $\mathbb{Z}$۱۰ از $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت طبق قضیه دوم یکریختی، قضیه ۲۴.۳.۱، داریم*

$$(۴\mathbb{Z}+۱۰\mathbb{Z})/۱۰\mathbb{Z} \cong ۴\mathbb{Z}/(۴\mathbb{Z}\cap ۱۰\mathbb{Z}) = ۴\mathbb{Z}/۲۰\mathbb{Z}.$$

اگر N و K دو زیرمدول از Rـ مدول چپ M با شرط $K \leq N$ باشند آنگاه N/K زیرمدولی از M/K است و در نتیجه دوباره می‌توانیم مدول خارج قسمتی $(M/K)/(N/K)$ را تشکیل دهیم. اگر دقت کنیم شکل عنصرهای این مدول جدید به نوعی پیچیده به نظر می‌رسد. اما قضیه سوم یکریختی مدولی نشان می‌دهد که این مدول جدید با مدول شناخته شده‌تری یکریخت هستند.

اکنون قضیه سوم یکریختی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۶.۳.۱. *(قضیه سوم یکریختی مدولی) فرض کنیم که M یک Rـ مدول چپ یکانی باشد. اگر N و K زیر مدول‌های M باشند که $K \subseteq N$ آنگاه $(M/K)/(N/K) \cong M/N$.*

اثبات. رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$g: M/K \longrightarrow M/N,\ \ g(m+K) = m+N.$$

حال g خوشتعریف است (تابع است). زیرا برای هر $m, m' \in M$، اگر $m+K = m'+K$ آنگاه $m-m' \in K$. در نتیجه $m-m' \in N$. پس $m+N = m'+N$ و بنابراین $g(m+K) = g(m'+K)$.

تابع g یک Rـ همریختی مدولی است. زیرا برای هر $m, m' \in M$ داریم

$$g(m+m'+K) = m+m'+N = (m+N)+(m'+N) = g(m+K)+g(m'+K).$$

به علاوه برای هر $m \in M$ و هر $r \in R$ داریم

$$g(rm+K) = rm+N = r(m+N) = rg(m+K).$$

واضح است که g پوشا است. اکنون هسته g را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} &Ker(g) = \{m+K \in M/K \mid g(m+K) = ۰\} = \\ &\{m+K \in M/K \mid m+N \in N\} = \\ &\{m+K \in M/K \mid m \in N\} = N/K. \end{aligned}$$

حال طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، $M/N \cong (M/K)/(N/K)$. □

مثال ۲۷.۳.۱. *زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$۳ و $\mathbb{Z}$۹ از $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم $(۳\mathbb{Z}/۹\mathbb{Z}) \leq (\mathbb{Z}/۹\mathbb{Z})$ پس طبق قضیه سوم یکریختی، قضیه ۲۶.۳.۱، داریم*

$$(\mathbb{Z}/۹\mathbb{Z})/(۳\mathbb{Z}/۹\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/۳\mathbb{Z}.$$

اکنون قضیه تناظر را بیان می‌کنیم که کاربرد وسیعی در حل مسایل و ادامه درس دارد. در واقع این قضیه بیان می‌کند که وقتی $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همرختی مدولی پوشا باشد چه ارتباطی بین زیرمدول‌های N و زیرمدول‌های M وجود دارد. یادآوری می‌کنیم که منظور از تناظر بین دو مجموعه وجود یک تابع یک به یک و پوشا بین آن دو مجموعه است.

قضیه ۲۸.۳.۱. (*قضیه تناظر مدولی*) *فرض کنیم که M و N دو Rـ مدول چپ یکانی باشند و $f : M \longrightarrow N$ همریختی مدولی پوشا باشد. قرار دهید*

$$\mathcal{X} = \{K \leq M \mid Ker(f) \subseteq K\}, \ \ \mathcal{Y} = \{L \mid L \leq N\}.$$

در این صورت یک تناظر بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ وجود دارد.

اثبات. رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\theta : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}, \ \ \theta(K) = f(K).$$

حال θ خوشتعریف است (تابع است). زیرا واضح است که برای هر $K \in \mathcal{X}$، $\theta(K) = f(K)$ زیرمدولی از N است یعنی $\theta(K) \in \mathcal{Y}$. به علاوه واضح است که اگر $K, K' \in \mathcal{X}$ و $K = K'$ آنگاه $\theta(K) = \theta(K')$.
حال نشان می‌دهیم θ یک به یک و پوشا است. فرض کنیم $\theta(K) = \theta(K')$ یا به صورت معادل $f(K) = f(K')$. اگر $k \in K$ آنگاه $f(k) \in f(K)$ و در نتیجه $f(k) \in f(K')$. پس عضوی مانند $k' \in K'$ چنان وجود دارد که $f(k) = f(k')$ یا معادلا $f(k - k') = ۰$. پس $k - k' \in Ker(f)$ و در نتیجه $k - k' \in K'$. بنابراین $k = k - k' + k' \in K'$. یعنی نشان داده‌ایم $K \subseteq K'$. با روندی مشابه $K' \subseteq K$ نتیجه می‌شود و این نشان می‌دهد که $K = K'$. پس θ یک به یک است.
حال فرض کنیم $L \in \mathcal{Y}$. قرار می‌دهیم $K = f^{-۱}(L)$. واضح است که L یک زیرمدول از M است. چون $۰ \subseteq L$ پس $Ker(f) = f^{-۱}(۰) \subseteq f^{-۱}(L) = K$. یعنی $K \in \mathcal{X}$. حال کافی است نشان دهیم که $\theta(K) = L$ یا به صورت معادل $f(K) = L$. فرض کنیم که $l \in L$. چون f پوشا است، عنصر $m \in M$ چنان وجود دارد که $f(m) = l$. پس $f(m) \in L$ و در نتیجه $m \in f^{-۱}(L)$. این نشان می‌دهد که $l = f(m) \in f(f^{-۱}(L)) = f(K)$. بنابراین $L \subseteq f(K)$. حال اگر $t \in f(K)$ باشد آنگاه عنصر $k \in K = f^{-۱}(L)$ چنان وجود دارد که $t = f(k)$. پس $t \in L$ و در نتیجه $f(K) \subseteq L$. این نشان می‌دهد که $f(K) = L$ و اثبات کامل است. $\square$

مثال ۲۹.۳.۱. *$\mathbb{Z}$ـ همریختی $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{۶۰}$ با ضابطه $f(n) = \bar{n}$ پوشا است و به علاوه $Ker(f) = ۶۰\mathbb{Z}$. حال برای دانستن تعداد زیرمدول‌های $\mathbb{Z}_{۶۰}$ از قضیه تناظر مدولی، قضیه ۲۸.۳.۱، استفاده می‌کنیم و داریم*

$$\mathcal{X} = \{K \leq \mathbb{Z} \mid ۶۰\mathbb{Z} \subseteq K\} = \{\mathbb{Z}, ۲\mathbb{Z}, ۳\mathbb{Z}, ۴\mathbb{Z}, ۵\mathbb{Z}, ۶\mathbb{Z}, ۱۰\mathbb{Z}, ۱۲\mathbb{Z}, ۱۵\mathbb{Z}, ۲۰\mathbb{Z}, ۳۰\mathbb{Z}, ۶۰\mathbb{Z}\}.$$

یعنی $\mathbb{Z}_{۶۰}$ دارای ۱۲ زیرمدول است.

نتیجه زیر شکل زیرمدول‌های مدول خارج قسمتی M/N را بر اساس زیرمدول‌های M مشخص می‌کند. در واقع زیرمدول‌های M/N دقیقا به صورت K/N هستند که K زیرمدول M شامل N است.

نتیجه ۳۰.۳.۱. *فرض کنیم که M یک Rـ مدول چپ یکانی و N زیرمدول M باشد. در این صورت یک تناظر بین زیرمدول‌های M شامل N و زیرمدول‌های M/N وجود دارد. به علاوه هر زیرمدول M/N به صورت L/N است که L زیرمدولی از M شامل N می‌باشد.*

اثبات. می‌دانیم که همریختی طبیعی $\pi : M \longrightarrow M/N$ پوشا و هسته آن دقیقا برابر N است یعنی $Ker(\pi) = N$ (چرا؟). قرار می‌دهیم

$$\mathcal{X} = \{K \leq M \mid N = Ker(\pi) \subseteq K\}, \ \ \mathcal{Y} = \{T \mid T \leq M/N\}$$

و

$$\theta : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}, \ \ \theta(K) = \pi(K).$$

حال شرایط قضیه تناظر مدولی، قضیه ۲۸.۳.۱، برقرار است و قسمت اول حکم به دست می‌آید. برای قسمت دوم، فرض کنیم T زیرمدولی دلخواه از M/N باشد. با توجه به قسمت اول، زیرمدول L از M که شامل N است چنان وجود دارد که $\theta(L) = T$. یعنی $T = \pi(L) = L/N$ و اثبات کامل است. □

مثال ۳۱.۳.۱. *طبق نتیجه ۳۰.۳.۱، یک تناظر بین زیرمدول‌های $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{30}$ و زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$ شامل $30\mathbb{Z}$ وجود دارد.*

نتیجه ۳۲.۳.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ یکانی باشند. اگر $N \cong M$ آنگاه تناظر بین زیرمدول‌های M و N برقرار است.*

اثبات. بدیهی است. □

نتیجه ۳۳.۳.۱. *فرض کنیم که R یک حلقه یکدار باشد. در این صورت Rـ مدول چپ یکانی M ساده است اگر و تنها اگر $M \cong R/I$ که I ایده‌آل چپ ماکسیمال از R است.*

اثبات. ($\Leftarrow$) چون هر مدول ساده دوری است (چرا؟) پس طبق نتیجه ۲۳.۳.۱، $M \cong R/I$ که I ایده‌آل چپ از R است. فرض کنیم I ایده‌آل چپ ماکسیمال نباشد یعنی ایده‌آل چپ J چنان وجود دارد که $I \subsetneq J \subsetneq R$. در این صورت J/I یک Rـ زیرمدول غیر بدیهی از Rـ مدول چپ R/I است. پس طبق نتیجه ۳۲.۳.۱، M دارای زیرمدول غیر بدیهی است و این تناقض با فرض ساده بودن M است.
($\Rightarrow$) طبق نتیجه ۳۰.۳.۱، هر زیرمدول R/I به صورت J/I است و چون I ایده‌آل چپ ماکسیمال است نتیجه می‌شود که $J = I$ یا $J = R$. این یعنی R/I زیرمدول غیر بدیهی ندارد پس ساده است. حال طبق نتیجه ۳۲.۳.۱، مدول M ساده است. □

نتیجه ۳۴.۳.۱. *فرض کنیم که R یک حلقه یکدار باشد. در این صورت همواره یک Rـ مدول ساده چپ یکانی وجود دارد.*

اثبات. طبق نتیجه ۴۰.۲.۱، حلقه R دارای ایده‌آل چپ ماکسیمال مانند I می‌باشد. می‌دانیم که R/I یک Rـ مدول چپ است. طبق نتیجه ۳۳.۳.۱، R/I همان مدول چپ مد نظر می‌باشد. □

تعریف ۱.۳.۳۵. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. اگر این خانواده مستقل باشد یعنی در یکی از شرایط قضیه ۱.۲.۱۳، صدق کند آنگاه به زیرمدول $\sum_{i\in I} N_i$ جمع مستقیم داخلی N_i ها گوییم و آن را با $\sum\bigoplus_{i\in I} N_i$ نشان می‌دهیم.*

گزاره ۱.۳.۳۶. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. اگر این خانواده مستقل باشد یعنی در یکی از شرایط قضیه ۱.۲.۱۳، صدق کند آنگاه $\sum\bigoplus_{i\in I} N_i \cong \bigoplus_{i\in I} N_i$.*

اثبات. می‌دانیم که هر عنصر از $\sum\bigoplus_{i\in I} N_i$ به صورت

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \qquad\qquad (n \geq 1,\ i_k \in I,\ x_{i_k} \in N_{i_k})$$

دارد. حال رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$f : \sum\bigoplus_{i\in I} N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$$
$$f(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}) = (\dots, 0, \dots, 0, \overset{\text{ام}i_1}{x_{i_1}}, 0, \dots, 0, \overset{\text{ام}i_l}{x_{i_l}}, 0, \dots, \overset{\text{ام}i_n}{x_{i_n}}, 0, \dots)$$

نشان می‌دهیم که f خوشتعریف است. اگر $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} x'_{i_k}$ آنگاه طبق قضیه ۱.۲.۱۳، قسمت (۳)، باید $x_{i_l} = x'_{i_l}$ برای هر $1 \leq l \leq n$. این نشان می‌دهد f خوشتعریف است. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که f یک Rـ یکریختی مدولی است و اثبات کامل است. □

تذکر ۱.۳.۳۷. *گزاره ۱.۳.۳۶، این امکان را برای ما فراهم می‌کند که تفاوتی بین جمع مستقیم و جمع مستقیم داخلی خانواده ناتهی از زیرمدول‌های یک مدول قائل نشویم و در این نوشتار از نماد "$\bigoplus$" برای هر دو جمع استفاده کنیم. انتظار این است که خوانند از نوع مطلب تشخیص دهد که کدام جمع مد نظر است.*

تعریف ۱.۳.۳۸. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. اگر این خانواده مستقل باشد یعنی در یکی از شرایط قضیه ۱.۲.۱۳، صدق کند و به علاوه $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$ باشد آنگاه به هر N_i یک جمعوند گوییم. به عبارت دیگر، به زیرمدول N از Rـ مدول چپ M جمعوند گوییم هرگاه زیرمدول K از M چنان موجود باشد که $M = N + K$ و $N \cap K = 0$.*

مثال ۱.۳.۳۹. *برای $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_6$ قرار می‌دهیم*

$$N_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\} = 3\mathbb{Z}_6, \quad N_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = 2\mathbb{Z}_6.$$

واضح است که N_1 و N_2 در شرایط قضیه ۱.۲.۱۳، صدق می‌کنند. همچنین یک محاسبه سر راست نشان می‌دهد که $N_1 + N_2 = \mathbb{Z}_6$. پس

$$\mathbb{Z}_6 = \sum\bigoplus_{i=1}^{2} N_i = \bigoplus_{i=1}^{2} N_i = N_1 \oplus N_2.$$

یا به عبارتی N_1 (N_2) جمعوندی برای $\mathbb{Z}_6$ است. معادلا $\mathbb{Z}_6$ جمع مستقیم داخلی N_1 و N_2 است. از طرفی به سادگی می‌توان دید که به عنوان $\mathbb{Z}$ـ یکریختی مدولی داریم $N_1 \cong \mathbb{Z}_2$ و $N_2 \cong \mathbb{Z}_3$ و در نتیجه $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. یعنی $\mathbb{Z}_6$ جمع مستقیم (ضرب مستقیم) $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ است.

تمرین‌ها

تمرین ۴۰.۳.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ باشند و I یک ایده‌آل از R باشد که $IM = 0$ و $IN = 0$. نشان دهید که $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی است اگر و تنها اگر (R/I)ـ همریختی مدولی باشد.*

تمرین ۴۱.۳.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow M$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. اگر $f^2 = f$ آنگاه نشان دهید $Ker(f)$ و $Im(f)$ جمعوندی از M هستند.*

تمرین ۴۲.۳.۱. *فرض کنیم R حلقه جابجایی و یکدار و $f : R \times R \longrightarrow R$ یک تابع باشد. نشان دهید که f یک Rـ همریختی مدولی است اگر و تنها اگر $a, b \in R$ چنان موجود باشند که برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $f((x, y)) = ax + by$.*

۴.۱ پوچساز و کاربرد آن در تغییر حلقه برای مدول

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنیم M یک Rــ مدول چپ باشد. در این صورت پوچساز M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$Ann_R(M) = \{r \in R \mid rM = 0\}.$$

مثال ۲.۴.۱. *پوچساز $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ برابر با $3\mathbb{Z}$ است.*

مثال ۳.۴.۱. *پوچساز $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ برابر با $12\mathbb{Z}$ است.*

مثال ۴.۴.۱. *پوچساز $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ برابر با 0 است.*

مثال ۵.۴.۱. *فرض کنیم R حلقه یکدار باشد. در این صورت $Ann_R({}_RR) = 0$.*

مفهوم پوچساز را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۶.۴.۱. *فرض کنیم M یک Rــ مدول چپ، I ایده‌آل چپ از R و $\emptyset \neq X \subseteq M$ باشد. در این صورت پوچساز چپ X در I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$l.Ann_I(X) = \{r \in I \mid rX = 0\}.$$

در جایی که $X = \{x\}$، گاهی از نماد $l.Ann_I(x)$ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۷.۴.۱. *فرض کنیم M یک Rــ مدول چپ، I ایده‌آل چپ از R و $\emptyset \neq X \subseteq M$ باشد. در این صورت $l.Ann_I(X)$ ایده‌آل چپ از R است. به علاوه اگر X زیرمدول M و I ایده‌آل باشد آنگاه $l.Ann_I(X)$ ایده‌آل است.*

اثبات. واضح است که $0 \in l.Ann_I(X)$ و در نتیجه $l.Ann_I(X)$ ناتهی است. حال فرض کنیم $r, s \in l.Ann_I(X)$. در این صورت چون $(r+s)X = rX+sX = 0+0 = 0$ نتیجه می‌شود که $r+s \in l.Ann_I(X)$. از طرفی برای هر $t \in R$ داریم $(tr)X = t(rX) = t(0) = 0$. اما $tr \in I$ (چرا؟) پس باید $tr \in l.Ann_I(X)$ و اثبات قسمت اول تمام است.
برای قسمت دوم، کافی است نشان دهیم که برای هر $t \in R$ داریم $rt \in l.Ann_I(X)$. چون X زیرمدول است پس واضح است که $tX \subseteq X$. از طرفی $rX = 0$ در نتیجه $rtX = 0$. اما $rt \in I$ (چرا؟) پس باید $rt \in l.Ann_I(X)$ و اثبات قسمت دوم نیز تمام است. □

تذکر ۸.۴.۱. *پوچساز چپ X در I در زمانی برای ما از اهمیت بالای برخوردار است که $I = R$ و $X = M$ باشد یعنی $l.Ann_R(M)$. اگر حلقه R معلوم باشد و ابهام از مدول چپ یا راست نداشته باشیم گاهی به جای $l.Ann_R(M)$ از $l.Ann(M)$ یا $Ann_R(M)$ یا حتی خلاصه‌تر از $Ann(M)$ استفاده می‌کنیم. طبق گزاره ۷.۴.۱، $Ann(M)$ یک ایده‌آل است.*

در برخی مواقع نمی‌توان مطلبی را برای Rــ مدول چپ M به راحتی نشان داد و نیاز است که M را با کمک حلقه‌ای جدید که شناخته شده‌تر است به مدولی تبدیل کنیم که همان ساختار ضرب در اسکالر قدیم را داشته باشد (که به تبع آن ساختار زیرمدولی حفظ می‌شود) این حلقه جدید $R/Ann(M)$ است. برای روشن‌تر شدن مطلب مثال‌های زیر راهگشا است (تکنیک مثال زیر در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد).

مثال ۹.۴.۱. فرض کنیم p عددی اول باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که تعداد مولدهای هر زیرمدول از $\mathbb{Z}$ـ مدول $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus Z_p$ از عدد ۳ بیشتر نیست.
ابتدا می‌دانیم که

$$X = \{(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})\}$$

یک مولد برای مدول یکانی M است. حال واضح است که $Ann(M) = p\mathbb{Z}$. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}$.
اما با ضرب در اسکالر خوشتعریف زیر M یک $(R/Ann(M))$ـ مدول (چپ) تبدیل می‌شود

$$(r + Ann(M)).m = rm.$$

همانطور که از این ضرب در اسکالر جدید معلوم می‌شود ساختار مدولی قدیم M هیچ تغییری نکرده است و فقط حلقه را تغییر داده‌ایم. همچنین ساختار زیرمدول‌ها نیز دچار تغییر نشده است (چرا؟).
حال داریم $R/Ann(M) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ (به عنوان حلقه) و $\mathbb{Z}_p$ یک میدان است. پس در واقع M یک $\mathbb{Z}_p$ فضای برداری است که X برای آن پایه محسوب می‌شود. اکنون طبق خواص فضای برداری حکم به صورت بدیهی به دست می‌آید.

مثال ۱۰.۴.۱. می‌خواهیم نشان دهیم که بررسی هر نوع ویژگی مانند P در زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$ـ مدول $M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ با بررسی ویژگی P در ایده‌آل‌های حلقه $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ یکسان است.
واضح است که $Ann_{\mathbb{Z}}(M) = 15\mathbb{Z}$. در نتیجه $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ (به عنوان حلقه). اما با ضرب در اسکالر خوشتعریف زیر M یک $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ـ مدول (چپ) تبدیل می‌شود

$$(n + 15\mathbb{Z}).m = nm.$$

همانطور که از این ضرب در اسکالر جدید معلوم می‌شود ساختار مدولی قدیم M هیچ تغییری نکرده است و فقط حلقه را تغییر داده‌ایم. همچنین ساختار زیرمدول‌ها نیز دچار تغییر نشده است (چرا؟).
در واقع M به یک $(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5)$ـ مدول تبدیل شده است (تمرین ۱۶.۱.۱ را ببینید). اکنون واضح است که با ساختار جدید مدولی زیرمدول‌ها همان ایده‌آل‌ها هستند.

لم ۱۱.۴.۱. اگر M یک Rـ مدول چپ باشد آنگاه با ضرب در اسکالر زیر می‌توان M را به یک $(R/Ann(M))$ـ مدول چپ تبدیل کرد

$$(r + Ann(M)).m = rm.$$

به علاوه هر Rـ زیرمدول از M یک $(R/Ann(M))$ـ زیرمدول از M است و برعکس.

اثبات. بدیهی است. فقط دقت شود که $R/Ann(M)$ یک حلقه است (چرا؟). □

لم ۱۲.۴.۱. فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ، I ایده‌آل چپ از R و بعلاوه X و Y دو زیرمجموعه ناتهی با شرط $X \subseteq Y$ از M باشند. در این صورت $l.Ann_I(Y) \subseteq l.Ann_I(X)$.

اثبات. فرض کنیم $r \in l.Ann_I(Y)$. در این صورت $rY = 0$. چون $X \subseteq Y$ پس $rX = 0$ و این یعنی $r \in l.Ann_I(X)$. □

تعریف ۱۳.۴.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ، I زیرمجموعه ناتهی از R و $X \leq M$ باشد. در این صورت پوچساز راست I در X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$r.Ann_X(I) = \{x \in X \mid Ix = \circ\}.$$

در جایی که $I = \{a\}$، گاهی از نماد $r.Ann_I(a)$ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۱۴.۴.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ یکانی، I ایده‌آل راست از R و $X \leq M$ باشد. در این صورت $r.Ann_X(I)$ یک زیرمدول M است.*

اثبات. چون X زیرمدول است پس $\circ \in X$. در نتیجه $\circ \in r.Ann_X(I)$ پس $r.Ann_X(I)$ ناتهی است. فرض کنیم $x, y \in r.Ann_X(I)$ و $r \in R$. چون I ایده‌آل راست است داریم که $I(rx + y) = Irx + Iy = \circ + \circ = \circ$. پس $rx + y \in r.Ann_X(I)$. حال طبق محک فشرده، قضیه ۹.۲.۱، اثبات کامل است. □

گزاره ۱۵.۴.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ، I ایده‌آل از R و $M \leq N$ باشد. در این صورت $N \subseteq r.Ann_N(l.Ann_I(N))$.*

اثبات. برای هر $x \in N$ طبق تعریف پوچساز N در I داریم که $(l.Ann_I(N))x = \circ$. دقت شود که چون N زیرمدول است طبق گزاره ۷.۴.۱، $l.Ann_I(N)$ ایده‌آل R است و در نتیجه ناتهی است. پس برای هر $x \in N$ طبق تعریف پوچساز $l.Ann_I(N)$ در N داریم که $x \in r.Ann_N(l.Ann_I(N))$ و اثبات تمام است. □

تمرین‌ها

تمرین ۱۶.۴.۱. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و M یک Rـ مدول باشد. قرار می‌دهیم*

$$T(M) = \{m \in M \mid Ann(m) \neq \circ\}.$$

نشان دهید که $T(M)$ زیرمدولی از M است و به علاوه همواره داریم

$$T(M/T(M)) = \circ.$$

تمرین ۱۷.۴.۱. *فرض کنیم ایده‌آل I از حلقه یکدار R پوچتوان باشد. نشان دهید که $l.Ann_R(I)$ با تمام ایده‌آل‌های راست ناصفر R اشتراک نابدیهی دارد.*

قرار داد: از این لحظه در ادامه این نوشتار همه حلقه‌ها یکدار و همه مدول‌ها یکانی فرض می‌شوند مگر در جایی به روشنی خلاف این مطلب را ذکر کنیم.

۵.۱ دنباله‌های دقیق

تعریف ۱.۵.۱. *فرض کنیم M، N و T سه Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow T$، $g : T \longrightarrow N$ دو Rـ همریختی مدولی باشند. در این صورت به دنباله*

$$M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N$$

دقیق گوییم هرگاه $Ker(g) = Im(f)$. در حالت کلی تر، فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ و $\{f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Rـ همریختی‌های مدولی باشد. در این صورت به دنباله

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots$$

دقیق گوییم هرگاه برای هر i داشته باشیم $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.

مثال ۲.۵.۱. *برای هر Rـ مدول چپ M همواره*

$$0 \xrightarrow{o} M \xrightarrow{id_M} M$$

و

$$M \xrightarrow{id_M} M \xrightarrow{o} 0$$

دنباله دقیق هستند.

مثال ۳.۵.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. در این صورت دنباله*

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/Im(f) \longrightarrow 0$$

دقیق کوتاه است.

گزاره ۴.۵.۱. *فرض کنیم M، N و T سه Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow T$، $g : T \longrightarrow N$ دو Rـ همریختی مدولی باشند. برای دنباله دقیق*

$$M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N$$

موارد زیر برقرار است.
(۱) *همواره داریم $gf = 0$.*
(۲) *اگر $M = 0$ باشد آنگاه g یک به یک است (f همریختی صفر است).*
(۳) *اگر $N = 0$ باشد آنگاه f پوشا است (g همریختی صفر است).*

اثبات. بدیهی است. $\square$

گزاره ۵.۵.۱. *فرض کنیم M، N و T سه Rــ مدول چپ و $f : M \longrightarrow T$، $g : T \longrightarrow N$ دو Rــ همریختی مدولی باشند. برای دنباله دقیق*

$$M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

داریم $N \cong T/Im(f)$.

اثبات. چون g پوشا است پس طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، $T/Ker(g) \cong N$. اما دنباله دقیق است پس $Ker(g) = Im(f)$ و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

تعریف ۶.۵.۱. *فرض کنیم M، N و T سه Rــ مدول چپ و $f : M \longrightarrow T$، $g : T \longrightarrow N$ دو Rــ همریختی مدولی باشند. در این صورت به دنباله*

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

دقیق کوتاه گوییم.

مثال ۷.۵.۱. *فرض کنیم M و N دو Rــ مدول چپ، $K \leq M$ و $f : M \longrightarrow N$ یک Rــ همریختی مدولی باشد. در این صورت دنباله‌های*

$$\circ \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/K \longrightarrow \circ$$
$$\circ \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/Ker(f) \longrightarrow \circ$$
$$\circ \longrightarrow Im(f) \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} N/Im(f) \longrightarrow \circ$$

دقیق کوتاه هستند.

تذکر ۸.۵.۱. *جابجایی بودن نمودار مثلثی: یعنی در شکل زیر داشته باشیم $hf = g$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"'] \\ T & \end{tikzcd}$$

جابجایی بودن نمودار مربعی: یعنی در شکل زیر داشته باشیم $g'f = f'g$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "g'"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \end{tikzcd}$$

جابجایی بودن نمودار: یعنی هر مثلث و هر مربعی که در نمودار دیده می‌شود جابجایی باشد.

تعریف ۹.۵.۱. *دنباله‌های دقیق کوتاه (۱) و (۲)*

$$(۱)\quad \circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

$$(۲)\quad \circ \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} T' \xrightarrow{g'} N' \longrightarrow \circ$$

را یکریخت گوییم هرگاه نمودار جابجایی زیر

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & T & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & \circ \\ & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \\ \circ & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & T' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

موجود باشد که α، β و γ یکریختی‌های مدولی باشند.

گزاره ۱۰.۵.۱. *یکریختی دنباله‌های کوتاه دقیق یک رابطه هم‌ارزی است.*

اثبات. بدیهی است. □

برای ادامه کار به لم زیر نیاز داریم. این لم حالت بسیار خاصی از لم بسیار معروفی به نام "پنج لم" است و به دلیل شرایط خاص مشابه منابع دیگر جبر ما لم زیر را "پنج لم کوتاه" نامگذاری می‌کنیم. یکی از تفاوت‌های اصلی بین "پنج لم کوتاه" و "پنج لم" این است که در صورت اصلی "پنج لم" دنباله‌ها، دقیق کوتاه فرض نمی‌شوند!

لم ۱۱.۵.۱. (*پنج لم کوتاه*) *فرض کنیم نموار زیر از Rـ مدول‌های چپ و Rـ همریختی‌های مدولی را داریم*

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & T & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & \circ \\ & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \\ \circ & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & T' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

و به علاوه فرض کنیم سطرهای نمودار دنباله دقیق کوتاه، $\beta f = f'\alpha$ و $g'\beta = \gamma g$. در این صورت موارد زیر برقرار هستند.
(۱) اگر α و γ یک به یک باشند آنگاه β یک به یک است.
(۲) اگر α و γ پوشا باشند آنگاه β پوشا است.
(۳) اگر α و γ یکریختی باشند آنگاه β یکریختی است.

اثبات. کافی است (۱) و (۲) را اثبات کنیم تا (۳) اثبات شود. چون اثبات (۱) و (۲) شبیه به هم است ما فقط (۲) را نشان می‌دهیم و (۱) را به عنوان تمرین برای خواننده رها می‌کنیم.
(۲) فرض کنیم $t' \in T'$ دلخواه باشد. هدف ما پیدا کردن عنصری مانند $t \in T$ است که

$\beta(t) = t'$. چون $g'(t') \in N'$ و γ پوشا است، در نتیجه عنصری مانند $n \in N$ چنان وجود دارد که $\gamma(n) = g'(t')$. از طرفی g پوشا است پس عنصری مانند $t_۱ \in T$ چنان وجود دارد که $g(t_۱) = n$ و در نتیجه $\gamma(g(t_۱)) = g'(t')$. اما $\gamma g = g'\beta$ پس $g'\beta(t_۱) = g'(t')$ معادلا $g'(\beta(t_۱) - t') = ۰$. پس $\beta(t_۱) - t' \in Ker(g') = Im(f')$. بنابراین $m' \in M'$ چنان وجود دارد که $f'(m') = \beta(t_۱) - t'$. اما چون $m' \in M'$ و α پوشا است، در نتیجه عنصری مانند $m \in M$ چنان وجود دارد که $\alpha(m) = m'$ و در نتیجه $f'\alpha(m) = \beta(t_۱) - t'$. اما $\beta f = f'\alpha$ پس $\beta f(m) = \beta(t_۱) - t'$ یا معادلا $\beta(t_۱ - f(m)) = t'$. اکنون کافی است قرار دهیم $t = t_۱ - f(m)$ و اثبات کامل است. $\square$

قضیه ۱۲.۵.۱. *فرض کنیم M، N و T سه Rـ مدول چپ و دنباله*

$$(\mathrm{I}) \quad ۰ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow ۰$$

دقیق کوتاه باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

(۱) *Rـ همریختی مدولی $h : N \longrightarrow T$ وجود دارد که $gh = id_N$.*

(۲) *Rـ همریختی مدولی $q : T \longrightarrow M$ وجود دارد که $qf = id_M$.*

(۳) *Rـ یکریختی θ چنان وجود دارد که $T \overset{\theta}{\cong} M \oplus N$ و بعلاوه دنباله دقیق کوتاه (I) با دنباله دقیق کوتاه*

$$(\mathrm{II}) \quad ۰ \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda_۱} M \oplus N \xrightarrow{p_۲} N \longrightarrow ۰$$

یکریخت است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$q : T \longrightarrow M, \;\; q(t) = f^{-۱}(t - hg(t)).$$

q خوشتعریف است. زیرا داریم که

$$g(t - hg(t)) = g(t) - ghg(t) = g(t) - id_N g(t) = g(t) - g(t) = ۰$$

و در نتیجه $t - hg(t) \in Ker(g) = Im(f)$. حال چون $f : M \longrightarrow Im(f)$ یک به یک و پوشا است $f^{-۱}(t - hg(t))$ دقیقا یک عنصر از M را معلوم می‌کند. همچنین اگر $t = t'$ آنگاه چون g و h تابع هستند داریم $hg(t) = hg(t')$ و در نتیجه $t - hg(t) = t' - hg(t')$. اما f یک به یک است پس $f^{-۱}(t - hg(t)) = f^{-۱}(t' - hg(t'))$. این یعنی $q(t) = q(t')$.
چون ترکیب Rـ همریختی‌های مدولی و همچنین وارون Rـ همریختی‌های مدولی دوباره Rـ همریختی مدولی است، بلافاصله نتیجه می‌شود که q یک Rـ همریختی مدولی است. حال برای هر $m \in M$ داریم

$$q(f(m)) = f^{-۱}(f(m) - hgf(m)) = f^{-۱}(f(m) - ۰) = f^{-۱}(f(m)) = m$$

در نتیجه $qf = id_M$.
(۲) $\Leftarrow$ (۱). ابتدا دقت شود که چون g پوشا است، برای هر $n \in N$ عنصر $t \in T$ چنان وجود دارد که $g(t) = n$. حال قرار می‌دهیم

$$h : N \longrightarrow T, \;\; h(n) = t - fq(t).$$

h تابعی خوشتعریف است و ضابطه آن مستقل از t است. زیرا اگر $g(t)=g(t')=n$ آنگاه $g(t-t')=۰$ و در نتیجه $t-t'\in Ker(g)=Im(f)$. پس $m\in M$ چنان وجود دارد که $f(m)=t-t'$. در نتیجه

$$fqf(m)=fq(t)-fq(t')=f(m)=t-t'$$

یعنی $t-fq(t)=t'-fq(t')$.
اما h یک Rـ همریختی مدولی است. زیرا اگر $g(t)=n$ و $g(t')=n'$ باشد آنگاه برای هر $r\in R$ داریم که $g(rt+t')=rn+n'$. پس

$$h(rn+n')=rt+t'-(fq(rt+t'))=r(t-fq(t))+t'-fq(t')=rh(n)+h(n').$$

اکنون داریم

$$gh(n)=g(t-fq(t))=g(t)-gfq(t)=g(t)-۰=g(t)=n$$

یعنی $gh=id_N$. پس تا اینجا نشان دادهایم که (۱) و (۲) معادل هستند.
(۲) $\Leftarrow$ (۳). طبق فرض $q:T\longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $qf=id_M$. حال تعریف می‌کنیم

$$\theta:T\longrightarrow M\oplus N,\ \ \theta(t)=(q(t),g(t)).$$

چون q و g هر دو Rـ همریختی مدولی هستند، θ یک Rـ همریختی است. حال نموداری به صورت زیر می‌سازیم

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_M"'] & T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "id_N"'] & ۰ \\
۰ \arrow[r] & M \arrow[r, "\lambda_۱"] & M\oplus N \arrow[r, "p_۲"] & N \arrow[r] & ۰
\end{tikzcd}$$

هدف ما استفاده از پنج لم کوتاه، لم ۱۱.۵.۱، است. بنابراین کافی است نشان دهیم نمودار جابجایی است. پس داریم

$$\theta f(m)=(qf(m),gf(m))=(id_M(m),۰)=(m,۰)=\lambda_۱(m)=id_M\lambda_۱(m).$$

یعنی $\theta f=id_M\lambda_۱$. از سوی دیگر داریم

$$id_Ng(t)=g(t)=p_۲((q(t),g(t)))=p_۲\theta(t).$$

یعنی $id_Ng=p_۲\theta$. حال طبق پنج لم کوتاه، لم ۱۱.۵.۱ قسمت (۳)، باید θ یک Rـ یکریختی مدولی باشد و این (۳) را اثبات می‌کند.
(۳) $\Leftarrow$ (۲). طبق فرض نمودار جابجایی

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & ۰ \\
۰ \arrow[r] & M \arrow[r, "\lambda_۱"] & M\oplus N \arrow[r, "p_۲"] & N \arrow[r] & ۰
\end{tikzcd}$$

موجود است که α، β و θ یکریختی هستند. حال تعریف می‌کنیم

$$q : T \longrightarrow M,\ \ q(t) = \alpha^{-۱} p_۱ \theta(t).$$

چون q ترکیب Rـ همریختی‌ها مدولی است، یک Rـ همریختی مدولی است و داریم

$$qf(m) = \alpha^{-۱} p_۱ \theta f(m) = \alpha^{-۱} p_۱ \lambda_۱ \alpha(m) = \alpha^{-۱} id_M \alpha(m) = id_M(m) = m.$$

یعنی $qf = id_M$ و (۲) اثبات می‌شود. $\square$

اکنون تعریف بسیار مهم زیر را داریم.

تعریف ۱.۵.۱۳. *گوییم دنباله دقیق*

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

شکافته می‌شود هرگاه در یکی از شرایط قضیه ۱.۵.۱۲ ، صدق کند.

مثال ۱.۵.۱۴. *دنباله*

$$\circ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda_۱} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{p_۲} \mathbb{Z} \longrightarrow \circ$$

دقیق کوتاه است. قرار می‌دهیم

$$h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \ h(x) = (\circ, x)$$

در حقیقت $h = \lambda_۲$. واضح است که $p_۲ h = id_{\mathbb{Z}}$ یعنی شرایط قضیه ۱.۵.۱۲ ، برقرار است و طبق تعریف این دنباله شکافته می‌شود.

تمرین‌ها

تمرین ۱.۵.۱۵. *فرض کنیم که M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول دوری و متناهی باشد. نشان دهید که دنباله دقیق کوتاهی به صورت*

$$\circ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} M \longrightarrow \circ$$

موجود است.

تمرین ۱.۵.۱۶. *نشان دهید که دنباله زیر کوتاه دقیق است*

$$\circ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_۲) \xrightarrow{g} \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_۲ \longrightarrow \circ$$

که در آن

$$f(x) = (۲x, \bar{\circ}, \bar{\circ}, ...),\ \ g((x, \bar{x}_۱, \bar{x}_۲, ...)) = (\bar{x}, \bar{x}_۱, \bar{x}_۲, ...).$$

آیا این دنباله دقیق کوتاه شکافته می‌شود؟

تمرین ۱.۵.۱۷. *یک دنباله دقیق با نامتناهی جمله بسازید.*

۶.۱ Hom

یادآوری می‌کنیم که تبدیلات خطی در جبر خطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. چرا که با داشتن دو Fـ فضای برداری V و W، فضای برداری چون $L(V, W)$ متشکل از تبدیلات خطی بین V و W ساخت. اگر $V = W$ باشد آنگاه $L(V, V)$ با جمع و ترکیب توابع یک حلقه ناجابجایی تشکیل می‌دهد. و اگر V از بعد متناهی باشد آنگاه این حلقه جدید همان حلقه ماتریس‌های مربعی روی میدان F است. با توجه به این که مدول‌ها تعمیم فضاهای برداری هستند، در این بخش می‌خواهیم تعمیم‌های مطالب گفته شده در بالا را بررسی کنیم. برای دو Rـ مدول M و N تمام همریختی‌های مدولی ممکن از M به N را با $Hom_R(M, N)$ نشان می‌دهیم. با توجه به این که $L(V, W)$ مجددا یک فضای برداری است، طبیعی است که دنبال این مطلب باشیم که $Hom_R(M, N)$ را مجهز به ساختار مدولی کنیم. بسیار واضح است که $Hom_R(M.N)$ ساختار گروه آبلی دارد. اگر R حلقه جابجایی باشد $Hom_R(M, N)$ ساختار مدولی دارد که منطبق بر ساختار جبر خطی $L(M, N)$ است در زمانی که R را میدان فرض کنیم. در این بخش ابزاری قدرتمند را برای بررسی مدول‌ها معرفی می‌کنیم.

با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ باشند. مجموعه تمام Rـ همریختی‌های مدولی از M به N را با $Hom_R(M, N)$ نمایش می‌دهیم، به عبارت دیگر*

$$Hom_R(M, N) = \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ یک } R\text{ـ همریختی مدولی است}\}.$$

اگر $M = N$ آنگاه $Hom_R(M, N)$ را با $End_R(M)$ نشان می‌دهیم. همچنین به هر عضو $f \in End_R(M)$ یک اندومورفیسم گوییم. هر اندومورفیسم که یک به یک و پوشا باشد به آن اتومورفیسم گوییم.

تبدیل $Hom_R(M, N)$ به یک Rـ مدول چپ با ضرب در اسکالر مناسب که منطبق بر ساختار فضای برداری $L(M, N)$ باشد در زمانی که R را میدان فرض کنیم، دشوار است. اما در گزاره زیر تحت شرایط خاصی $Hom_R(M, N)$ به یک Rـ مدول چپ تبدیل می‌کنیم و در سرتاسر این نوشتار همین ساختارهای مدولی برای $Hom_R(M, N)$ مد نظر است.

گزاره ۲.۶.۱. *شرایط زیر برقرار است.*

(۱) *$Hom_R(M, N)$ با جمع معمولی توابع یک $\mathbb{Z}$ـ مدول (گروه آبلی) است.*

(۲) *اگر R حلقه جابجایی باشد آنگاه برای هر $f \in Hom_R(M, N)$ و هر $r \in R$، با ضرب در اسکالر*

$$r.f(m) = rf(m)$$

$Hom_R(M, N)$ یک Rـ مدول چپ است.

اثبات. (۱) بدیهی است. برای (۲) فقط خوشتعریفی ضرب در اسکالر را بررسی می‌کنیم و بقیه موارد را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

$$\begin{aligned} r.f(sm + m') = rf(sm + m') = rf(sm) + rf(m') = \\ rsf(m) + rf(m') = srf(m) + rf(m') = \\ s(r.f(m)) + r.f(m') \end{aligned}$$

یعنی $r.f \in Hom_R(M,N)$. $\square$

گزاره ۳.۶.۱. *با عمل ترکیب توابع و جمع عادی توابع همواره $End_R(M)$ یک حلقه است.*

اثبات. بدیهی است. $\square$

تعریف ۴.۶.۱. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. اگر M یک Rـ مدول چپ و یک Sـ مدول راست باشد به گونه‌ای که برای هر $r \in R$، هر $s \in S$ و هر $m \in M$ رابطه $r(xs) = (rx)s$ برقرار باشد آنگاه گوییم M یک $(R-S)$ـ دومدول است.*

مثال ۵.۶.۱. *همواره حلقه R یک $(R-R)$ـ دومدول است. زیرا با ضرب عادی حلقه R را می‌توان به یک Rـ مدول راست و یک Rـ مدول چپ تبدیل کرد. البته باید این مطلب را متذکر شویم که ضرب R خاصیت شرکتپذیری دارد که خاصیت دومدولی را ارضا می‌کند.*

مثال ۶.۶.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول راست باشد. در این صورت با ضرب در اسکالر زیر می‌توانیم M را به یک $End_R(M)$ـ مدول چپ تبدیل کنیم (بررسی کنید)*

$$. : End_R(M) \times M \longrightarrow M, \quad f.m = f(m)$$

حال M یک $(End_R(M) - R)$ـ دومدول است. زیرا

$$f.(mr) = f(mr) = f(m)r = (f.m)r$$

حال می‌خواهیم بیشتر ساختار مدولی $Hom_R(M,N)$ را بررسی کنیم البته باز هم در حالت‌های خاص!

گزاره ۷.۶.۱. *فرض کنیم R و S دو حلقه و به علاوه M و N دو Rـ مدول چپ باشند.*
(۱) اگر M یک $(R-S)$ـ دومدول باشد آنگاه $Hom_R(M,N)$ با ضرب در اسکالر زیر ساختار Sـ مدولی چپ دارد

$$. : S \times Hom_R(M,N) \longrightarrow Hom_R(M,N), \quad s.f = f(ms)$$

برای هر $m \in M$.
(۲) اگر N یک $(R-S)$ـ دومدول باشد آنگاه $Hom_R(M,N)$ با ضرب در اسکالر زیر ساختار Sـ مدولی راست دارد

$$. : Hom_R(M,N) \times S \longrightarrow Hom_R(M,N), \quad f.s = (f(m))s$$

برای هر $m \in M$.

اثبات. فقط (۲) را اثبات می‌کنیم (۱) مشابه است. بوضوح $Hom_R(M,N)$ با جمع عادی توابع یک گروهی آبلی است. حال کافی است خوشتعریفی ضرب در اسکالر را نشان دهیم.

$$f.s(rm+m') = (f(rm+m'))s = (rf(m)+f(m'))s = r(f.s(m)) + f.s(m')$$

یعنی $f.s \in Hom_R(M,N)$. حال برای هر $s, s' \in S$ داریم

$$f.(s+s')(m) = f(m)(s+s') = f(m)s + f(m)s' = f.s(m) + f.s'(m)$$

یعنی $f.(s+s') = f.s + f.s'$. بقیه موارد تعریف مدول یک بررسی سر راست است. $\square$

در ادامه قضیه‌های بسیار مهمی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های آینده بسیار به آنها نیاز داریم.

قضیه ۸.۶.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. در این صورت*

$$Hom_R(R, M) \cong_R M.$$

اثبات. ابتدا باید تذکر دهیم که $Hom_R(R, M)$ ساختار Rـ مدولی چپ دارد (چرا؟). حال تعریف می‌کنیم

$$\theta : Hom_R(R, M) \longrightarrow M, \;\; \theta(f) = f(۱).$$

به راحتی می‌توان نشان داد که θ یک Rـ همریختی مدولی است. حال اگر $\theta(f) = ۰$ آنگاه $f(۱) = ۰$ و در نتیجه برای هر $r \in R$ داریم $f(r) = ۰$ یعنی $f = ۰$. طبق لم ۱۸.۳.۱، θ یک به یک است. حال فرض کنیم $m \in M$. تعریف می‌کنیم

$$f_m : R \longrightarrow M, \;\; f_m(r) = rm.$$

با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد که $f_m \in Hom_R(R, M)$. اکنون داریم

$$\theta(f_m) = f_m(۱) = ۱.m = m$$

یعنی θ پوشا است و اثبات کامل است. □

مثال ۹.۶.۱. *شرط یکانی در قضیه ۸.۶.۱، قابل حذف نیست. زیرا $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Q}$ـ مدول با ضرب در اسکالر بدیهی، $(\frac{p}{q}).n = ۰$، در نظر بگیرید. فرض کنیم $f \in Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$. حال داریم*

$$f(\frac{p}{q}) = f(p(\frac{۱}{q})) = p.f(\frac{۱}{q}) = ۰.$$

یعنی $f = ۰$ یا معادلاً $Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = ۰$. پس قضیه ۸.۶.۱، برای مدول غیر یکانی در حالت کلی نمی‌تواند صحیح باشد.

لم ۱۰.۶.۱. *(لم شور) فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ساده یکانی و R حلقه یکدار باشد. در این صورت $End_R(M)$ حلقه تقسیم است.*

اثبات. کافی است نشان دهیم که هر عضو ناصفر مانند $f \in End_R(M)$ دارای وارون است (چرا؟). چون f ناصفر است پس باید $Ker(f)$ زیرمدول صفر است. حال طبق لم ۱۸.۳.۱، f یک به یک است. از طرفی باید $Im(f) = M$ باشد زیرا f ناصفر است و M ساده است. یعنی f پوشا است و در نتیجه f یکریختی و وارونپذیر است. □

در ادامه قضیه‌های را می‌آوریم که بلافاصله بعد اثبات آنها خاصیت‌های مهمی از Hom را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۶.۱. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های چپ و M یک Rـ مدول چپ دلخواه باشد. برای هر خانواده از Rـ همریختی‌های مدولی مانند $\{f_i : M_i \longrightarrow M\}_{i\in I}$،*

Rـ همریختی مدولی یکتایی مانند M $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ وجود دارد که برای هر $i \in I$ نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "f_i"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M & \end{tikzcd} \qquad f_i = f\lambda_i$$

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M, \ \ f((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f_i(x_i).$$

واضح است که f خوشتعریف (چرا؟) و یک Rـ همریختی مدولی است (چرا؟). از طرفی داریم

$$f\lambda_i((x_i)_{i\in I}) = f((..., \circ, ..., \circ, \overbrace{x_i}^{\text{محل } i \text{ ام}}, \circ, ..., \circ, ...)) = f_i(x_i).$$

یعنی $f\lambda_i = f_i$. حال نشان می‌دهیم f یکتا است. فرض کنیم Rـ همریختی مدولی دیگری مانند $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ با ویژگی $g\lambda_i = f_i$ موجود باشد. حال داریم

$$\begin{aligned} g((x_i)_{i\in I}) = g(id_{\bigoplus_{i\in I} M_i}(x_i)_{i\in I}) = \\ g(\sum_{i\in I} \lambda_i p_i((x_i)_{i\in I})) = \sum_{i\in I} g\lambda_i p_i((x_i)_{i\in I}) = \\ \sum_{i\in I} f_i p_i((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f_i(x_i) = f((x_i)_{i\in I}) \end{aligned}$$

یعنی $f = g$ و اثبات کامل است. $\square$

قضیه ۱۲.۶.۱. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های چپ و M یک Rـ مدول چپ دلخواه باشد. در این صورت داریم*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \cong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M).$$

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$\theta : Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M), \ \ \theta(f) = (f\lambda_i)_{i\in I}.$$

واضح است که θ خوشتعریف (چرا؟) و یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی است (چرا؟). نشان می‌دهیم که θ یک به یک و پوشا است. فرض کنیم $\theta(f) = 0$ یا معادلا برای هر $i \in I$، $f\lambda_i = 0$. حال دو نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "o"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "o"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dashed, "o"] \\ M & \end{tikzcd}$$

طبق قضیه ۱.۶.۱۱، قسمت یکتایی، باید f همریختی صفر باشد. این نشان می‌دهد $Ker(\theta) = 0$ و در نتیجه از لم ۱.۳.۱۸، θ یک به یک است.
اکنون فرض کنیم که $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M)$ عضوی دلخواه باشد. هدف ما پیدا کردن عضوی مانند $f \in Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M)$ به طوریکه $\theta(f) = (f_i)_{i\in I}$. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "f_i"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \\ M & \end{tikzcd}$$

طبق قضیه ۱.۶.۱۱، Rـ همریختی مدولی یکتایی مانند $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ وجود دارد که برای هر $i \in I$ نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "f_i"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M & \end{tikzcd} \qquad\qquad f_i = f\lambda_i$$

این همان f مورد نظر ما برای پوشایی است. زیرا

$$\theta(f) = (f\lambda_i)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I}.$$

پس θ یک $\mathbb{Z}$ـ یکریختی است. □

مثال ۱.۶.۱۳. *مثال زیر نشان می‌دهد که*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \ncong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in I} Hom_R(M_i, M).$$

قرار می‌دهیم $I = \mathbb{N}$، $R = \mathbb{Z}$، $M = \mathbb{Z}_2$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $M_i = \mathbb{Z}$. ابتدا دقت می‌کنیم که طبق قضیه ۱.۶.۸، $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$. بنابراین داریم

$$\prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) = \prod_{i\in \mathbb{M}} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2.$$

از طرفی دیگر طبق قضیه ۱.۶.۱۲ ، داریم

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \cong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M) = \prod_{i\in \mathbb{N}} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_۲) \cong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_۲.$$

اما $\prod_{i\in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_۲ \ncong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_۲$ (چرا؟). برای حالت‌های باقیمانده نیز به عنوان تمرین مثال نقض بیاورید.

تذکر ۱.۶.۱۴. اگر R حلقه جابجایی باشد باز هم اثبات قضیه ۱.۶.۱۲ ، کار گشا است و داریم

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \cong_R \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M).$$

حال قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱.۶.۱۵. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های چپ و M یک Rـ مدول چپ دلخواه باشد. برای هر خانواده از Rـ همریختی‌های مدولی مانند $\{f_i : M \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$، Rـ همریختی مدولی یکتایی مانند $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ وجود دارد که برای هر $i \in I$ نمودار زیر جابجایی است.*

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd} \qquad f_i = p_i f$$

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i, \ \ f(x) = (f_i(x))_{i\in I}.$$

واضح است که f خوشتعریف (چرا؟) و یک Rـ همریختی مدولی است (چرا؟). از طرفی داریم

$$p_i f(x) = p_i((f_i(x))_{i\in I}) = f_i(x).$$

یعنی $p_i f = f_i$. حال نشان می‌دهیم f یکتا است. فرض کنیم Rـ همریختی مدولی دیگری مانند $g : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ با ویژگی $p_i g = f_i$ موجود باشد. چون برای هر $x \in M$ داریم $g(x) \in \prod_{i\in I} M_i$ پس می‌توانیم فرض کنیم $g(x) = (y_i)_{i\in I}$. حال برای هر $i \in I$ داریم

$$y_i = p_i((y_i)_{i\in I}) = p_i(g(x)) = p_i g(x) = f_i(x)$$

این نشان می‌دهد که $f = g$ و اثبات کامل است. □

قضیه ۱.۶.۱۶. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های چپ و M یک Rـ مدول چپ دلخواه باشد. در این صورت داریم*

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \cong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i).$$

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$\theta : Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i), \;\; \theta(f) = (p_i f)_{i\in I}.$$

واضح است که θ خوشتعریف (چرا؟) و یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی است (چرا؟). نشان می‌دهیم که θ یک به یک و پوشا است. فرض کنیم $\theta(f) = 0$ یا معادلا برای هر $i \in I$، $p_i f = 0$. حال دو نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[ur, dashed, "o"] \arrow[r, "o"] & M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "o"] & M_i \end{tikzcd}$$

طبق قضیه ۱.۶.۱۵، قسمت یکتایی، باید f همریختی صفر باشد. این نشان می‌دهد $Ker(\theta) = 0$ و در نتیجه از لم ۱.۳.۱۸، θ یک به یک است.
اکنون فرض کنیم که $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i)$ عضوی دلخواه باشد. هدف ما پیدا کردن عضوی مانند $f \in Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i,)$ به طوریکه $\theta(f) = (f_i)_{i\in I}$. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[r, "f_i"] & M_i \end{tikzcd}$$

طبق قضیه ۱.۶.۱۵، Rـ همریختی مدولی یکتایی مانند $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ وجود دارد که برای هر $i \in I$ نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_i"] \\ M \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"] & M_i \end{tikzcd} \qquad f_i = p_i f$$

این همان f مورد نظر ما برای پوشایی است. زیرا

$$\theta(f) = (p_i f)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I}.$$

پس θ یک $\mathbb{Z}$ـ یکریختی است. $\square$

مثال ۱.۶.۱۷. مثال زیر نشان می‌دهد که

$$Hom_R(M, \bigoplus_{i\in I} M_i) \ncong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i).$$

قرار می‌دهیم $I = \mathbb{N}$ ، $R = \mathbb{Z}$ ، $M = \mathbb{Z}$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $M_i = \mathbb{Z}_2$. ابتدا دقت می‌کنیم که طبق قضیه ۱.۶.۸، $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$. بنابراین داریم

$$\prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i) = \prod_{i\in\mathbb{N}} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2.$$

از طرفی دیگر، دوباره از قضیه ۱.۶.۸، داریم

$$Hom_R(M, \bigoplus_{i\in I} M_i) = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2) \cong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2.$$

اما $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2 \ncong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ (چرا؟). برای حالت‌های باقیمانده نیز به عنوان تمرین مثال نقض بیاورید.

تذکر ۱.۶.۱۸. اگر R حلقه جابجایی باشد باز هم اثبات قضیه ۱.۶.۱۶ ، کارگشا است و داریم

$$Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \cong_R \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M).$$

تذکر ۱.۶.۱۹. اگر R حلقه جابجایی باشد آنگاه تمام لم، گزاره و قضیه‌های این بخش از $\mathbb{Z}$ قابل تعمیم به R هستند.

تمرین‌ها

تمرین ۱.۶.۲۰. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ ساده یکانی و R حلقه یکدار باشد. در این صورت $M \cong_R N$ اگر و تنها اگر $Hom_R(M, N) \neq 0$.

تمرین ۱.۶.۲۱. $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ شناسایی کنید و سپس به کمک آن نتیجه بگیرید که لزومی ندارد $Hom_R(M, R) \cong_R M$.

تمرین ۱.۶.۲۲. فرض کنیم I ایده‌آل حلقه R و M یک Rـ مدول چپ باشد در این صورت نشان دهید که $Hom_R(R/I, M) \cong_R r.Ann_M(I)$.

تمرین ۱.۶.۲۳. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی با بزرگترین مقسوم علیه مشترک d باشند. در این صورت نشان دهید که $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_d$.

۷.۱ Hom و ارتباط آن با دنباله‌های دقیق

در این بخش می‌خواهیم ارتباط Hom را با دنباله‌های دقیق مشخص کنیم. از این بخش در فصل دوم بسیار استفاده می‌کنیم. کار را با لم زیر آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۷.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ باشند. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد آنگاه برای هر Rـ مدول چپ مانند U، f یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی به شکل*

$$f_* : Hom_R(U, M) \longrightarrow Hom_R(U, N), \quad f_*(\alpha) = f\alpha$$

القا می‌کند.

اثبات. واضح است که f_* خوشتعریف است (چرا؟) و به علاوه داریم

$$f_*(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta) = f\alpha + f\beta = f_*(\alpha) + f_*(\beta)$$

و اثبات کامل است. □

نمادگذاری ۲.۷.۱. *در کل این نوشتار منظور از f_* یا g_* و ... همان نگاشت القایی است که در لم ۱.۷.۱، معرفی شد.*

حال گزاره زیر را داریم.

گزاره ۳.۷.۱. *فرض کنیم M، N و K سه Rـ مدول چپ باشند. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) دنباله $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ یک دنباله دقیق از Rـ همریختی‌های مدولی است.

(۲) برای هر Rـ مدول چپ U، دنباله

$$0 \longrightarrow Hom_R(U, M) \xrightarrow{f_*} Hom_R(U, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(U, K)$$

یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌های مدولی است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). ابتدا دقت می‌کنیم که طبق لم ۱.۷.۱، f_* و g_*، $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی هستند. حال نشان می‌دهیم که $Ker(f_*) = 0$. فرض کنیم که $\alpha \in Ker(f_*)$. پس داریم $f_*(\alpha) = 0$ یا معادلا $f\alpha = 0$. در نتیجه برای هر $u \in U$ داریم که $f(\alpha(u)) = 0$. اما f یک به یک است و طبق لم ۱۸.۳.۱، $Ker(f) = 0$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $u \in U$ داریم $\alpha(u) = 0$. بنابراین $\alpha = 0$ و در نتیجه $Ker(f_*) = 0$.
حال نشان می‌دهیم $Im(f_*) = Ker(g_*)$. فرض کنیم $\beta \in Im(f_*)$. پس $\alpha \in Hom_R(U, M)$ چنان وجود دارد که $f_*(\alpha) = f\alpha = \beta$. اما طبق فرض $gf = 0$ (چرا؟) پس باید داشته باشیم $g_*(\beta) = g\beta = gf\alpha = 0$. یعنی $\beta \in Ker(g_*)$ و در نتیجه $Im(f_*) \subseteq Ker(g_*)$. اکنون فرض کنیم $\beta \in Ker(g_*)$. پس $g\beta = g_*(\beta) = 0$. یعنی $Im(\beta) \subseteq Ker(g) = Im(f)$.

اما می‌دانیم که $f : M \longrightarrow Im(f)$ یک Rـ یکریختی مدولی است (چرا؟). اکنون قرار می‌دهیم $\alpha = f^{-1}\beta$. واضح است که $\alpha \in Hom_R(U, M)$ (چرا؟). حال $f_*(\alpha) = \beta$ (چرا؟). این نشان می‌دهد که $\beta \in Im(f_*)$. بنابراین $Ker(g_*) \subseteq Im(f_*)$. پس $Im(f_*) = Ker(g_*)$.
$(2) \Leftarrow (1)$. ابتدا نشان می‌دهیم f یک به یک است یا معادلاً طبق لم ۱.۳.۱۸، باید نشان دهیم که $Ker(f) = 0$. برای این منظور در (۲)، قرار می‌دهیم $U = Ker(f)$. یعنی

$$0 \longrightarrow Hom_R(Ker(f), M) \xrightarrow{f_*} Hom_R(Ker(f), N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(Ker(f), K)$$

اما Rـ همریختی شمول $i : Ker(f) \longrightarrow M$ عضوی از $Hom_R(Ker(f), M)$ است. حال $f_*(i) = 0$ (چرا؟) پس $i \in Ker(f_*) = 0$. یعنی $i = 0$ و در نتیجه برای هر $x \in Ker(f)$ داریم $x = i(x) = 0$. بنابراین $Ker(f) = 0$.
حال نشان می‌دهیم که $Ker(g) = Im(f)$. برای این منظور ابتدا در (۲)، قرار می‌دهیم $U = M$. یعنی

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, M) \xrightarrow{f_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M, K)$$

حال فرض کنیم $y \in Im(f)$. پس $x \in M$ چنان وجود دارد که $f(x) = y$. اما $g_*f_* = 0$ پس $gfid_M = 0$ (چرا؟). یعنی $g(y) = g(f(x)) = g(f(id_M(x))) = 0$. پس $y \in Ker(g)$ و در نتیجه $Im(f) \subseteq Ker(g)$. اکنون باید نشان دهیم $Ker(g) \subseteq Im(f)$. برای این منظور در (۲)، قرار می‌دهیم $U = Ker(g)$. یعنی

$$0 \longrightarrow Hom_R(Ker(g), M) \xrightarrow{f_*} Hom_R(Ker(g), N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(Ker(g), K)$$

اما Rـ همریختی شمول $i : Ker(g) \longrightarrow N$ عضوی از $Hom_R(Ker(g), N)$ است. حال $g_*(i) = 0$ (چرا؟) پس $i \in Ker(g_*) = Im(f_*)$. یعنی $\alpha \in Hom_R(Ker(g), M)$ چنان وجود دارد که $i = f_*(\alpha) = f\alpha$. اکنون فرض کنیم $y \in Ker(g)$. پس $y = i(y) = f(\alpha(y))$. یعنی $y \in Im(f)$ و در نتیجه $Ker(g) \subseteq Im(f)$. بنابراین $Ker(g) = Im(f)$. $\square$

تذکر ۴.۷.۱. *گزاره ۳.۷.۱، نشان می‌دهد که برای هر Rـ مدول چپ U، $Hom_R(U, -)$ هر دنباله دقیق از سمت چپ را از سمت چپ دقیق نگاه می‌دارد.*

اکنون وقت آن است که $Hom_R(-, T)$ را برای هر Rـ مدول چپ T بررسی کنیم. با لم زیر شروع می‌کنیم.

لم ۵.۷.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ باشند. اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد آنگاه برای هر Rـ مدول چپ مانند T، f یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی به شکل*

$$f^* : Hom_R(N, T) \longrightarrow Hom_R(M, T), \quad f^*(\alpha) = \alpha f$$

القا می‌کند.

اثبات. واضح است که f^* خوشتعریف است (چرا؟) و به علاوه داریم

$$f^*(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f = f^*(\alpha) + f^*(\beta)$$

و اثبات کامل است. $\square$

نمادگذاری ۶.۷.۱. *در کل این نوشتار منظور از f^* یا g^* و ... همان نگاشت القایی است که در لم ۵.۷.۱، معرفی شد.*

حال گزاره زیر را داریم.

گزاره ۷.۷.۱. *فرض کنیم M، N و K سه Rـ مدول چپ باشند. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) دنباله $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق از Rـ همریختی‌های مدولی است.

(۲) برای هر Rـ مدول چپ T، دنباله

$$0 \longrightarrow Hom_R(K,T) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N,T) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M,T)$$

یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌های مدولی است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). ابتدا دقت می‌کنیم که طبق لم ۵.۷.۱، f^* و g^*، $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی هستند. حال نشان می‌دهیم که $Ker(g^*) = 0$. فرض کنیم که $\alpha \in Ker(g^*)$. پس داریم $g^*(\alpha) = 0$ یا معادلا $\alpha g = 0$. اما $Im(g) = K$ پس $\alpha(K) = 0$ (چرا؟) و بنابراین $\alpha = 0$ و در نتیجه $Ker(g^*) = 0$.

نشان می‌دهیم $Im(g^*) = Ker(f^*)$. فرض کنیم $\beta \in Im(g^*)$. پس $\alpha \in Hom_R(K,T)$ چنان وجود دارد که $g^*(\alpha) = \alpha g = \beta$. اما طبق فرض $gf = 0$ (چرا؟) پس باید داشته باشیم $f^*(\beta) = \beta f = \alpha g f = 0$. یعنی $\beta \in Ker(f^*)$ و در نتیجه $Im(f^*) \subseteq Ker(g^*)$. اکنون فرض کنیم $\beta \in Ker(f^*)$. پس $f^*(\beta) = \beta f = 0$. یعنی $Im(f) \subseteq Ker(\beta)$. اما $Im(f) = Ker(g)$ پس $Ker(g) \subseteq Ker(\beta)$. حال قرار می‌دهیم

$$\bar{\beta} : N/Ker(g) \longrightarrow T, \;\; \bar{\beta}(y + Ker(g)) = \beta(y).$$

$\bar{\beta}$ یک Rـ همریختی خوشتعریف است (چرا؟). اما طبق قضیه اول یکریختی، ۲۰.۳.۱، داریم که $K \overset{h}{\cong} N/Ker(g)$ که در آن $h(y + Ker(g)) = g(y)$ (اثبات قضیه اول یکریختی را به یاد آورید). حال قرار می‌دهیم $\alpha = \bar{\beta}h^{-1}$. واضح است که $\alpha \in Hom_R(K,T)$ (چرا؟). اما برای هر $y \in N$ داریم

$$g^*(\alpha)(y) = \alpha g(y) = \bar{\beta}h^{-1}g(y) = \bar{\beta}h^{-1}h(y+Ker(g)) = \bar{\beta}(y+Ker(g)) = \beta(y).$$

یعنی $g^*(\alpha) = \beta$. پس $\beta \in Im(g^*)$ و در نتیجه $Ker(f^*) \subseteq Im(g^*)$. بنابراین داریم $Ker(f^*) = Im(g^*)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱). ابتدا نشان می‌دهیم g پوشا یا معادلا باید نشان دهیم که $Im(g) = K$. برای این منظور در (۲)، قرار می‌دهیم $T = K/Im(g)$. یعنی

$$0 \longrightarrow Hom_R(K, \frac{K}{Im(g)}) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N, \frac{K}{Im(g)}) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M, \frac{K}{Im(g)})$$

اما Rـ همریختی طبیعی $\pi : K \longrightarrow K/Im(g)$ عضوی از $Hom_R(K, \frac{K}{Im(g)})$ است. حال $g^*(\pi) = \circ$ (چرا؟) پس $\pi \in Ker(g^*) = \circ$. یعنی $\pi = \circ$ و در نتیجه $Im(g) = K$ (چرا؟).
حال نشان می‌دهیم که $Ker(g) = Im(f)$. برای این منظور ابتدا در (۲)، قرار می‌دهیم $T = K$. یعنی

$$\circ \longrightarrow Hom_R(K, K) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N, K) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M, K)$$

اما $f^*g^* = \circ$ پس $id_K gf = gf = \circ$ (چرا؟). یعنی $Im(f) \subseteq Ker(g)$. اکنون باید نشان دهیم $Ker(g) \subseteq Im(f)$. برای این منظور در (۲)، قرار می‌دهیم $T = N/Im(f)$. یعنی

$$\circ \longrightarrow Hom_R(K, \frac{N}{Im(f)}) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N, \frac{N}{Im(f)}) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M, \frac{N}{Im(f)})$$

اما Rـ همریختی شمول $\pi : N \longrightarrow N/Im(f)$ عضوی از $Hom_R(N, \frac{N}{Im(f)})$ است. حال $f^*(\pi) = \circ$ (چرا؟) پس $\pi \in Ker(f^*) = Im(g^*)$. یعنی $\alpha \in Hom_R(K, \frac{N}{Im(f)})$ چنان وجود دارد که $\pi = g^*(\alpha) = \alpha g$. اکنون فرض کنیم $y \in Ker(g)$. پس $\pi(y) = \alpha g(y) = \circ$. یعنی $y \in Im(f)$ (چرا؟) و در نتیجه $Ker(g) \subseteq Im(f)$. بنابراین $Ker(g) = Im(f)$. $\square$

تذکر ۸.۷.۱. *گزاره ۷.۷.۱، نشان می‌دهد که برای هر Rـ مدول چپ T، $Hom_R(-, T)$ هر دنباله دقیق از سمت راست را از سمت چپ دقیق نگاه می‌دارد.*

اکنون طبیعی است که از خود سوال کنیم در چه مواقعی Hom از سمت راست نیز دقیق است. جواب این سوال به قضیه مهم زیر منجر می‌شود.

قضیه ۹.۷.۱. *فرض کنیم M، N و K سه Rـ مدول چپ باشند. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) $\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow \circ$ *یک دنباله دقیق از Rـ همریختی‌هاست که شکافته می‌شود.*

(۲) *برای هر Rـ مدول چپ U، دنباله*

$$\circ \longrightarrow Hom_R(U, M) \xrightarrow{f_*} Hom_R(U, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(U, K) \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌هاست که شکافته می‌شود.

(۳) *برای هر Rـ مدول چپ T، دنباله*

$$\circ \longrightarrow Hom_R(K, T) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N, T) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M, T) \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌هاست که شکافته می‌شود.

اثبات. فقط معادل بودن (۳) و (۱) را نشان می‌دهیم معادل بودن (۱) و (۲) را که مشابه است به عنوان تمرین رها می‌کنیم.
(۱) $\Leftarrow$ (۳). برای این که نشان دهیم دنباله (۳) دقیق کوتاه است، کافی است طبق گزاره ۷.۷.۱،

فقط نشان دهیم که f^* پوشا است. فرض کنیم $\beta \in Hom_R(M,T)$. اما طبق فرض Rـ همریختی مدولی $q : N \longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $qf = id_M$. حال قرار دهید $\alpha = \beta q$. واضح است که $\alpha \in Hom_R(N,T)$ (چرا؟). از طرفی داریم

$$f^*(\alpha) = \alpha f = \beta q f = \beta id_M = \beta.$$

یعنی f^* پوشا است. حال نشان می‌دهیم دنباله دقیق کوتاه (۳) شکافته می‌شود. قرار می‌دهیم

$$q^* : Hom_R(M,T) \longrightarrow Hom_R(N,T), \ \ q^*(\alpha) = \alpha q.$$

اما داریم

$$f^*q^*(\alpha) = f^*(\alpha q) = \alpha q f = \alpha id_M = \alpha = id^*_{Hom_R(M,T)}(\alpha).$$

اکنون طبق قضیه ۱.۵.۱۲، دنباله دقیق کوتاه در (۳) شکافته می‌شود.
(۳) $\Leftarrow$ (۱). برای این که نشان دهیم دنباله (۱) دقیق کوتاه است، کافی است طبق گزاره ۱.۷.۷، فقط نشان دهیم که f یک به یک است. برای این منظور در (۳) قرار می‌دهیم $T = M$. یعنی

$$\circ \longrightarrow Hom_R(K,M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N,M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M,M) \longrightarrow \circ$$

اما $id_M \in Hom_R(M,M)$ و f^* پوشا است، پس $q \in Hom_R(N,M)$ وجود دارد که $f^*(q) = id_M$. این نشان می‌دهد که $qf = id_M$. حال طبق گزاره ۱.۳.۱۹، قسمت (۱)، f یک به یک است. همین مطلب طبق قضیه ۱.۵.۱۲، نشان می‌دهد که دنباله دقیق کوتاه (۱) شکافته می‌شود. $\square$

تذکر ۱.۷.۱۰. *اگر R حلقه جابجایی باشد آنگاه تمام لم، گزاره و قضیه‌های این بخش از $\mathbb{Z}$ قابل تعمیم به R هستند.*

تمرین‌ها

تمرین ۱.۷.۱۱. *لم، گزاره و قضیه‌های این بخش را برای حلقه جابجایی بازنویسی کنید و اثبات‌ها را بازنویسی نمایید.*

تمرین ۱.۷.۱۲. *اثبات قضیه ۱.۷.۹، را کامل کنید.*

تمرین ۱.۷.۱۳. *دنباله دقیق کوتاهی به شکل*

$$\circ \longrightarrow \mathbb{Z}_۲ \longrightarrow \mathbb{Z}_۴ \longrightarrow \mathbb{Z}_۲ \longrightarrow \circ$$

بسازید و سپس $Hom_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ را روی آن اثر دهید و نتیجه حاصل را تحلیل کنید.

۸.۱ تمرین‌های حل شده از کل مباحث فصل اول

تمرین ۱.۸.۱. *فرض کنیم F یک میدان باشد. نشان دهید که با ضرب در اسکالر زیر $M_n(F)$ یک $M_n(F)$ـ مدول چپ نیست*
$$A.B = A^t B$$
که منظور از A^t ماتریس ترانهاده A است.

حل. برای هر سه ماتریس لزوما رابطه زیر برقرار نیست
$$A.(B.C) = (AB).C.$$
زیرا
$$A.(B.C) = A.(B^t C) = A^t B^t C$$
ولی
$$(AB).C = (AB)^t C = B^t A^t C.$$

تمرین ۲.۸.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. موارد زیر را نشان دهید.*
(۱) اگر M متناهی مولد باشد آنگاه $Im(f)$ متناهی مولد است.
(۲) اگر $Ker(f)$ و $Im(f)$ متناهی مولد باشند آنگاه M متناهی مولد است.
(۳) اگر M متناهی مولد و $K \leq M$ آنگاه M/K متناهی مولد است.
(۴) اگر $K \leq M$ و M/K، K هر دو متناهی مولد باشند آنگاه M متناهی مولد است.

حل. (۱) طبق فرض داریم $M = Rm_۱ + ... + Rm_t$ که $m_i \in M$. حال اگر $y \in Im(f)$ آنگاه $x \in M$ چنان وجود دارد که داریم $y = f(x)$. اما r_iها در R چنان وجود دارند که داریم $x = r_۱m_۱ + ... + r_tm_t$. پس
$$y = f(x) = f(r_۱m_۱ + ... + r_tm_t) = r_۱f(m_۱) + ... + r_tf(m_t)$$
یعنی $f(m_i)$ها هر عضو $Im(f)$ را تولید می‌کنند. پس $Im(f)$ متناهی مولد است.
(۲) چون $Ker(f)$ متناهی مولد است پس اعضای $m_۱$، ...، m_l از M چنان وجود دارند که $Ker(f) = Rm_۱ + ... + Rm_l$. همچنین اعضای $m_{l+۱}$، ...، m_t از M چنان وجود دارند که $f(m_{l+۱})$، ...، $f(m_t)$ مولدی برای $Im(f)$ هستند. حال فرض کنیم $m \in M$. پس $r_{l+۱}$، ...، r_t در R وجود دارند که
$$f(m) = r_{l+۱}f(m_{l+۱}) + ... + r_tf(m_t) \;\Rightarrow\; f(m - r_{l+۱}m_{l+۱} - ... - r_tm_t) = ۰.$$
یعنی $m - r_{l+۱}m_{l+۱} - ... - r_tm_t \in Ker(f)$. بنابراین $r_۱$، ...، r_l در R وجود دارند که
$$m - r_{l+۱}m_{l+۱} - ... - r_tm_t = r_۱m_۱ + ... + r_lm_l.$$
پس $m = r_۱m_۱ + ... + r_lm_l + r_{l+۱}m_{l+۱} + ... + r_tm_t$. در نتیجه ثابت کرده‌ایم که $M = Rm_۱ + ... + Rm_l + Rm_{l+۱} + ... + Rm_t$.

(۳) Rـ همریختی طبیعی $\pi : M \longrightarrow M/K$ را در نظر می‌گیریم. چون $Im(\pi) = M/K$ و M متناهی مولد است پس طبق (۱) مسئله حل است.
(۴) Rـ همریختی طبیعی $\pi : M \longrightarrow M/K$ را در نظر می‌گیریم. چون $Im(\pi) = M/K$ و $Ker(\pi) = K$ متناهی مولد هستند پس طبق (۲) مسئله حل است.

تمرین ۳.۸.۱. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای Q باشد یعنی*

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R,\ b \neq \circ\}.$$

با ضرب در اسکالر $r.(\frac{a}{b}) = \frac{ra}{b}$، Q یک Rـ مدول است. نشان دهید که اگر Rـ مدول Q متناهی مولد باشد آنگاه $R = Q$.

حل. فرض کنیم $\frac{a_1}{b_1}$، ...، $\frac{a_t}{b_t}$ مولدهای Rـ مدول Q باشند. قرار می‌دهیم $x = b_1 b_2 ... b_t$. دقت شود که $x \neq \circ$ (چرا؟). حال اگر $r \in R$ آنگاه عناصر s_1،...،s_t در حلقه R وجود دارند که

$$\frac{1}{r} = s_1 \frac{a_1}{b_1} + ... + s_t \frac{a_t}{b_t} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{a_1 b_2 ... b_t + ... + a_t b_1 ... b_{t-1}}{b_1 ... b_t} = \frac{s}{x}$$

پس این نشان می‌دهد که برای هر $r \in R$ عنصر $s \in R$ چنان وجود دارد که $\frac{1}{r} = \frac{s}{x}$. از جمله اگر قرار دهیم $r = x^2$ آنگاه $\frac{1}{x^2} = \frac{s}{x}$ که $s \in R$. این نشان می‌دهد که $sx = 1$ زیرا R دامنه صحیح است. پس x عنصری یکال است. حال فرض کنیم $y \in R$ عنصری دلخواه و ناصفر باشد. طبق مطلب بالا، عنصری مانند $s' \in R$ چنان وجود دارد که $\frac{1}{y} = \frac{s'}{x}$. چون R دامنه صحیح است پس $ys' = x$ و این یعنی y یکال است. این یعنی R میدان است پس $R = Q$.

تمرین ۴.۸.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد و $M = N \oplus L = N \oplus K$ که N، L و K زیرمدول‌های M هستند. نشان دهید که $L \cong_R k$ ولی لزوما $L = K$ نیست.*

حل. می‌دانیم که هر عضو $m \in M$ به صورت یکتایی به شکل $n + l$ که $n \in N$ و $l \in L$ است نوشته می‌شود. حال قرار می‌دهیم

$$f : M \longrightarrow L,\ \ f(n + l) = l$$

f یک Rـ همریختی مدولی پوشا با $Ker(f) = N$ است (چرا؟). پس طبق قضیه اول یکرختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم که $M/N \cong_R L$. از طرفی می‌دانیم که هر عضو $m \in M$ به صورت یکتایی به شکل $n + k$ که $n \in N$ و $k \in K$ است نوشته می‌شود. حال قرار می‌دهیم

$$g : M \longrightarrow K,\ \ f(n + k) = k$$

g یک Rـ همریختی مدولی پوشا با $Ker(g) = N$ است (چرا؟). پس طبق قضیه اول یکرختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم که $M/N \cong_R K$. پس $K \cong_R L$.
برای قسمت دوم، قرار می‌دهیم $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$، $R = \mathbb{R}$ و

$$N = \{\circ\} \times \mathbb{R},\ \ K = \mathbb{R} \times \{\circ\},\ \ L = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

بررسی سر راست نشان می‌دهد که $N \cap L = \circ = N \cap K$ و $M = N \oplus L = N \oplus K$. در حالی که $L \neq K$.

تمرین ۵.۸.۱. *M یک Rـ مدول چپ (یکانی روی حلقه یکدار) R است اگر و تنها اگر یک همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(M)$ (حافظ یک) موجود باشد.*

حل. $(\Leftarrow)$. فرض کنیم $r \in R$. تعریف می‌کنیم

$$f_r : M \longrightarrow M, \ \ f_r(m) = rm.$$

واضح است که f_r خوشتعریف و یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی است (چرا؟). پس $f_r \in End_{\mathbb{Z}}(M)$. حال قرار می‌دهیم

$$f : R \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(M), \ \ f(r) = f_r.$$

واضح است که f خوشتعریف است و داریم

$$f_{r+s}(m) = (r + s)m = rm + sm = f_r(m) + f_s(m).$$

یعنی $f(r + s) = f(r) + f(s)$. همچنین

$$f_{rs}(m) = rsm = f_r f_s(m).$$

یعنی $f(rs) = f(r)f(s)$. پس f یک همریختی حلقه‌ای است که اگر R یکدار فرض شود آنگاه حافظ یک نیز است. زیرا

$$f(۱)(m) = f_۱(m) = m = id_M(m).$$

$(\Rightarrow)$. ضرب در اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r.m = f(r)(m)$$

یک بررسی ساده نشان می‌دهد با ضرب در اسکالر بالا M یک Rـ مدول چپ (یکانی) است.

تمرین ۶.۸.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ با زیرمدول‌های $N_۱$، ...، N_k باشد. موارد زیر معادل هستند.*

(۱) Rـ همریختی زیر پوشا (یک به یک) است

$$\pi : M \longrightarrow \prod_{i=۱}^{k} M/N_i, \ \ \pi(x) = (x + N_۱, ..., x + N_k).$$

(۲) برای هر i داریم $N_i + \cap_{i \neq j} N_j = M$ ($\cap_{i=۱}^{n} N_i = ۰$).

حل. معادل بودن عبارت‌های داخل پرانتز ساده است و به عهده خواننده واگذار می‌شود.
(۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $m \in M$. حکم را برای $i = ۱$ نشان می‌دهیم برای $۲ \leq i \leq k$ مشابه است. چون π پوشا است پس برای عنصر $(m + N_۱, ۰, ..., ۰) \in \prod_{i=۱}^{k} M/N_i$، عنصر m' در M چنان وجود دارد که

$$(m' + N_۱, ..., m' + N_k) = \pi(m') = (m + N_۱, ۰, ..., ۰).$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که

$$m - m' \in N_1, \ \ m' \in N_2, \ \ ..., \ \ m' \in N_k.$$

پس داریم

$$m = m - m' + m' \in N_1 + \cap_{i=2}^{k} N_i.$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱). عنصر $(m_1 + N_1, m_2 + N_2, ..., m_k + N_k) \in \prod_{i=1}^{k} M/N_i$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم

$$\begin{cases} m_1 = x_1 + y_1 \ ; & x_1 \in N_1, \ \ y_1 \in \cap_{j \neq 1} N_i \\ m_2 = x_2 + y_2 \ ; & x_2 \in N_2, \ \ y_2 \in \cap_{j \neq 2} N_i \\ \quad \vdots & \\ m_k = x_k + y_k \ ; & x_k \in N_k, \ \ y_k \in \cap_{j \neq k} N_i \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $m = y_1 + y_2 + ... + y_k$. حال داریم

$$\pi(m) = (m + N_1, m + N_2, ..., m + N_k) =$$
$$(m_1 - x_1 + \sum_{j \neq 1} y_j + N_1, m_2 - x_2 + \sum_{j \neq 2} y_j + N_2, ..., m_k - x_k + N_k + \sum_{j \neq k} y_j)$$
$$= (m_1 + N_1, m_2 + N_2, ..., m_k + N_k)$$

و این یعنی π پوشا است و حل کامل است.

تمرین ۱.۸.۷. *اگر M و N دو Rـ مدول متناهی مولد باشند آنگاه نشان دهید که در دنباله دقیق کوتاه*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

باید T ـR مدول T نیز متناهی مولد باشد.

حل. چون g پوشا است طبق نتیجه ۱.۳.۲۲، داریم $T/Ker(g) \cong N$. پس باید $T/Ker(g)$ متناهی مولد باشد. اما $Ker(g) = Im(f)$ و چون $Ker(f) = 0$ است (لم ۱.۳.۱۸) طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۱.۳.۲۰، داریم $Im(f) \cong M$. این نشان می‌دهد که $Ker(g)$ متناهی مولد است. اکنون طبق تمرین ۱.۸.۲ قسمت (۴) باید T متناهی مولد باشد.

تمرین ۸.۸.۱. *فرض کنیم نمودار زیر جابجایی و سطر افقی و مورب دقیق کوتاه باشد.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & \\
& U \arrow[dr, "\alpha"] & & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "f"] & T \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
& & & W \arrow[dr] & \\
& & & & 0
\end{tikzcd}$$

نشان دهید که $Im(\psi) \neq U$ اگر و تنها اگر φ یک به یک نباشد.

حل. ($\Leftarrow$). به برهان خلف، فرض کنیم φ یک به یک باشد یا به طور معادل طبق لم ۱۸.۳.۱، $Ker(\varphi) = 0$. چون $Im(\psi) \neq U$ پس فرض $u \in U \setminus Im(\psi)$ با معنی است. اما $\alpha(u) \in T$ پس $g\alpha(u) \in N$. در نتیجه چون $\beta = \varphi g$ پس $\beta\alpha(u) = \varphi g\alpha(u) = 0$. یعنی داریم که $g\alpha(u) \in Ker(\varphi) = 0$. این نشان می‌دهد که $\alpha(u) \in Ker(g) = Im(f)$. پس $m \in M$ چنان وجود دارد که $f(m) = \alpha(u)$. اما $f = \alpha\psi$ پس $\alpha\psi(m) = f(m) = \alpha(u)$. چون α یک به یک است (چرا؟) نتیجه می‌شود که $\psi(m) = u$ یعنی $u \in Im(\psi)$ که تناقض است.
($\Rightarrow$). به برهان خلف، فرض کنیم $Im(\psi) = U$ یعنی ψ پوشا باشد. فرض $0 \neq n \in Ker(\varphi)$ با معنی است (چرا؟). چون g پوشا است پس $t \in T$ چنان وجود دارد که $g(t) = n$. در نتیجه $\varphi g(t) = \varphi(n) = 0$. اما $\beta = \varphi g$ پس $\beta(t) = 0$ یعنی $t \in Ker(\beta) = Im(\alpha)$. بنابراین $u \in U$ چنان وجود دارد که $\alpha(u) = t$. از طرفی ψ پوشا است پس $m \in M$ چنان وجو دارد که $\psi(m) = u$. این نشان می‌دهد که $\alpha\psi(m) = t$. اما $f = \alpha\psi$ پس $f(m) = t$. بنابراین $t \in Im(f) = Ker(g)$. در نتیجه $n = g(t) = 0$ که این تناقض با ناصفر بودن nاست.

تمرین ۹.۸.۱. *فرض کنیم R یک دامنه (نه لزوما جابجایی) باشد که حلقه تقسیم نیست. نشان دهید زنجیری از ایده‌آل‌های (چپ) مانند*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

چنان وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $R/I_1 \cong_R I_n/I_{n+1}$.

حل. فرض کنیم $0 \neq x \in R$. چون R حلقه تقسیم نیست، می‌توانیم فرض کنیم x یکال نیست. حال قرار می‌دهیم $I_n = Rx^n$. واضح است که $Rx^n \supseteq Rx^{n+1}$. اکنون اگر برای $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $Rx^i = Rx^{i+1}$ آنگاه $r \in R$ چنان وجود دارد که $rx^{i+1} = x^i$. بنابراین $(rx - 1)x^i = 0$ و این نتیجه می‌دهد که $rx = 1$ (چرا؟) یعنی x یکال است که تناقض با فرض ما دارد پس $Rx^i \supset Rx^{i+1}$. یعنی زنجیری

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$$

از ایده‌آل‌های (چپ) است. حال برای هر n تعریف می‌کنیم

$$f_n : R \longrightarrow I_n/I_{n+1}, \quad f(r) = rx^n + I_{n+1}.$$

f خوشتعریف و یک Rـ همریختی مدولی پوشا است. اما

$$Ker(f_n) = \{r \in R \mid f(r) = 0\} =$$
$$\{r \in R \mid rx^n \in I_{n+1}\} = \{r \in R \mid rx^n = sx^{n+1},\ s \in R\} =$$
$$\{r \in R \mid (r - sx)x^n = 0,\ s \in R\} = \{r \in R \mid r = sx,\ s \in R\} = Rx = I_1$$

اکنون طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، داریم $R/I_1 \cong_R I_n/I_{n+1}$.

تمرین ۱۰.۸.۱. *نشان دهید که* $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}) = 0$.

حل. فرض کنیم $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q})$. قرار می‌دهیم $x = f(\bar{1})$. حال داریم

$$nx = nf(\bar{1}) = f(\bar{n}) = f(\bar{0}) = 0$$

این یعنی در $\mathbb{Q}$ داریم $nx = 0$ پس $x = 0$. حال برای هر $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ داریم

$$f(\bar{k}) = kf(\bar{1}) = kx = 0$$

یعنی $f = 0$ است.

تمرین ۱۱.۸.۱. *نشان دهید که* $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}) = 0$.

حل. فرض کنیم $0 \neq f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z})$ و به علاوه $f(1) = (k_i)_{i\in I}$. طبق تعریف فقط تعداد متناهی از k_i ها ناصفرند. فرض کنیم که k_{i1}، ...، k_{it} همان عناصر ناصفر باشند. حال قرار می‌دهیم $x = |k_{i1}|+|k_{i2}|+...+|k_{it}|+1$ و داریم

$$f(1) = f(x \times \frac{1}{x}) = xf(\frac{1}{x})$$

اگر فرض کنیم $f(\frac{1}{x}) = (k'_i)_{i\in I}$ آنگاه اندیس $j \in I$ چنان وجود دارد که $k_{ij} = xk'_{ij}$ (چرا؟) و این تناقض است (چرا؟).

تمرین ۱۲.۸.۱. *نشان دهید که* $Hom_{\mathbb{Z}}(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z}) = 0$.

حل. فرض کنیم $0 \neq f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z})$. این مطلب معادل با این است که $0 \neq f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z})$ ولی $f(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}) = 0$. حال قرار می‌دهیم

$$A = \{(2x_1, 4x_2, 8x_3, ..., 2^n x_n, ...) \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{(3y_1, 9y_2, 27y_3, ..., 3^n y_n, ...) \mid y_i \in \mathbb{Z}\}.$$

اما چون ۲ و ۳ نسبت به هم اول هستند، واضح است که $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = A+B$ (چرا؟). اما هر عنصر x از A و y از B به صورت زیر نیز قابل نمایش هستند

$$x = (2x_1, 4x_2, ..., 2^{n-1}x_{n-1}, 0, 0, ...) + 2^n(0, 0, ..., 0, x_n, 2x_{n+1}, ...)$$
$$y = (3y_1, 3y_2, ..., 3^{n-1}y_{n-1}, 0, 0, ...) + 3^n(0, 0, ..., 0, y_n, 3y_{n+1}, ...)$$

به وضوح مولفه اول جمع بالا برای x و y عضوی از $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ است. پس برای هر عدد طبیعی n داریم $f(A) \subseteq 2^n\mathbb{Z}$ و همچنین $f(B) \subseteq 3^n\mathbb{Z}$. در نتیجه $f(A) = f(B) = 0$ (چرا؟). پس $f(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}) = 0$. این یعنی $f = 0$ که تناقض است.

تمرین ۱۳.۸.۱. *فرض کنیم R حلقه جابجایی و M یک Rــ مدول متناهی مولد باشد. نشان دهید که عدد طبیعی n چنان وجود دارد که برای هر Rــ مدول N، $Hom_R(M, N)$ با زیرمدولی از $N^{(n)}$ یکریخت است.*

حل. فرض کنیم x_1، ...، x_t مولدهای M باشند. t همان مطلوب مسئله است یعنی $n = t$. برای اثبات رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$f : R^{(t)} \longrightarrow M, \quad f((r_1, r_2, ..., r_t)) = r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_tx_t.$$

واضح است که f یک Rــ همریختی مدولی خوشتعریف پوشا است (چرا؟). حال دنباله دقیق

$$Ker(f) \xrightarrow{i} R^{(t)} \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم N یک Rــ مدول دلخواه باشد. $Hom_R(-, N)$ را روی دنباله دقیق بالا اثر می‌دهیم. طبق گزاره ۷.۷.۱، دنباله

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N) \xrightarrow{f^*} Hom_R(R^{(t)}, N) \xrightarrow{i^*} Hom_R(Ker(f), N)$$

دقیق است. این نشان می‌دهد که f^* یک به یک است یعنی طبق لم ۱۸.۳.۱، داریم $Ker(f^*) = 0$. پس طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم

$$Hom_R(M, N) \cong Im(f^*).$$

اما $Im(f^*)$ زیرمدولی از $Hom_R(R^{(t)}, N)$ است. حال طبق قضیه ۸.۶.۱، قضیه ۱۲.۶.۱ و گزاره ۸.۲.۱ داریم

$$Hom_R(R^{(t)}, N) \cong \prod_{i=1}^{t} Hom_R(R, N) \cong \prod_{i=1}^{t} N = \bigoplus_{i=1}^{t} N = N^{(t)}$$

اکنون طبق نتیجه ۳۲.۳.۱، زیرمدول‌های $N^{(t)}$ و $Hom_R(R^{(t)}, N)$ در تناظر هستند. بنابراین $Hom_R(M, N)$ با زیرمدولی از $N^{(n)}$ یکریخت است.

تمرین ۱۴.۸.۱. *فرض کنیم $f: M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی باشد. نشان دهید که*
(۱) اگر f یکریختی باشد یعنی $N \cong M$ آنگاه $Ann(N) = Ann(M)$.
(۲) اگر f یک به یک باشد آنگاه $Ann(N) \subseteq Ann(M)$.
(۳) اگر f پوشا باشد آنگاه $Ann(M) \subseteq Ann(N)$.

حل. (۱) فرض کنیم $r \in Ann(N)$. در نتیجه $f(rM) = rf(M) = rN = ۰$. چون f یک به یک است پس $rM = ۰$ است یعنی $r \in Ann(M)$. برای برعکس از $f^{-۱}$ استفاده می‌کنیم و حکم به دست می‌آید.
(۲) طبق لم ۱۸.۳.۱، $Ker(f) = ۰$ است و طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم $M \cong Im(f)$. حال اگر $r \in Ann(N)$ آنگاه $rN = ۰$ پس $rIm(f) = ۰$ و مشابه استدلال (۱) باید $r \in Ann(M)$ باشد و اثبات کامل است.
(۳) طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، داریم $M/Ker(f) \cong N$. حال اگر $r \in Ann(M)$ پس $rM = ۰$. در نتیجه $rM = ۰ \subseteq Ker(f)$. بنابراین $r(M/Ker(f)) = ۰$. اکنون مشابه استدلال (۱) باید $r \in Ann(N)$ باشد و اثبات کامل است.

تمرین ۱۵.۸.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ساده باشد. نشان دهید که $Ann_R(M)$ یک ایده‌آل اول است. اگر R جابجایی باشد آنگاه $Ann_R(M)$ ایده‌آل ماکسیمال است.*

حل. فرض کنیم $Q = Ann_R(M)$. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل سره P در حلقه R اول است اگر برای هر دو ایده‌آل I و J از R که $IJ \subseteq P$ نتیجه شود که $I \subseteq I$ یا $J \subseteq P$.
اگر $Q = R$ آنگاه $M = ۱.M = ۰$. این تناقض با ساده بودن M است. پس Q ایده‌آل سره از R است. حال فرض کنیم $IJ \subseteq Q$ که I و J ایده‌آل‌های R هستند. فرض کنیم $J \not\subseteq Q$. بنابراین واضح است که $JM \neq ۰$. در نتیجه چون M ساده است داریم $JM = M$. با ضرب طرفین در I و استفاده از فرض $IJ \subseteq Q$ داریم $IM = IJM = ۰$. پس $J \subseteq Q$ و این نشان می‌دهد که Q اول است.
برای قسمت دوم، چون M ساده است پس برای هر $x \in M \neq ۰$ داریم که $Rx = M$ (چرا؟). چون R جابجایی است پس $Ann_R(M) = Ann_R(x)$. حال قرار می‌دهیم

$$f: R \longrightarrow Rx, \quad f(r) = rx.$$

با یک بررسی سر راست می‌توان دید که f یک Rـ همریختی مدولی پوشا است. اما داریم که $Q = Ker(f) = Ann_R(x)$. حال بر طبق نتیجه ۲۲.۳.۱، داریم $R/Q \cong_R Rx$. اکنون چون Rx هیچ زیرمدول نابدیهی ندارد، پس R/Q هم هیچ ایده‌آل نابدیهی ندارد. این نشان می‌دهد Q ایده‌آل ماکسیمال است (چرا؟).

تمرین ۱۶.۸.۱. *(تکنیک دترمینان) فرض کنیم R حلقه جابجایی و I ایده‌آل R باشد. اگر M یک Rـ مدول متناهی مولد و $IM = M$ آنگاه نشان دهید که $r \in R$ وجود دارد که $۱ - r \in I$ و $rM = ۰$.*

حل. فرض کنیم $M = Rm_۱ + \ldots + Rm_t$. چون $IM = M$ است پس $a_{ij} \in I$ ها چنان وجود

دارند که داریم

$$\begin{cases} m_۱ = a_{۱۱}m_۱ + a_{۱۲}m_۲ + ... + a_{۱t}m_t \\ m_۲ = a_{۲۱}m_۱ + a_{۲۲}m_۲ + ... + a_{۲t}m_t \\ \quad \vdots \\ m_t = a_{t۱}m_۱ + a_{t۲}m_۲ + ... + a_{tt}m_t \end{cases}$$

یا معادلا

$$\begin{cases} (a_{۱۱} - ۱)m_۱ + a_{۱۲}m_۲ + ... + a_{۱t}m_t = ۰ \\ a_{۲۱}m_۱ + (a_{۲۲} - ۱)m_۲ + ... + a_{۲t}m_t = ۰ \\ \quad \vdots \\ a_{t۱}m_۱ + a_{t۲}m_۲ + ... + (a_{tt} - ۱)m_t = ۰ \end{cases}$$

و با بازنویسی به شکل ماتریسی داریم

$$\begin{pmatrix} (a_{۱۱} - ۱) & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱t} \\ a_{۲۱} & (a_{۲۲} - ۱) & \cdots & a_{۲t} \\ \vdots & & & \\ a_{t۱} & a_{t۲} & \cdots & (a_{tt} - ۱) \end{pmatrix}_{t \times t} \begin{pmatrix} m_۱ \\ m_۲ \\ \vdots \\ m_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{pmatrix}$$

فرض کنیم A نمایش ماتریس ضرایب باشد. می‌دانیم $adj(A)A = det(A)I_{t\times t}$ (این تذکر لازم است که روی حلقه جابجایی یکدار تابع دترمینان داریم با همان خواصی که تابع دترمینان روی یک میدان دارد؛ برای مطالعه دقیقتر و دیدن جزییات به فصل ۵ کتاب جبر خطی هافمن مراجعه نمایید) که $I_{t\times t}$ ماتریس همانی است. پس

$$adj(A)A \begin{pmatrix} m_۱ \\ m_۲ \\ \vdots \\ m_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow det(A)I_{t\times t} \begin{pmatrix} m_۱ \\ m_۲ \\ \vdots \\ m_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{pmatrix}$$

پس برای هر $۱ \leq i \leq t$ داریم $det(A)m_i = ۰$. این نشان می‌دهد که $det(A)M = ۰$ (چرا؟). اما $det(A)$ حاصل ضرب مجموع قطرهای پراکنده همراه با علامت $+$ و یا $-$ است. چون I ایده‌آل و درایه‌های خارج قطر اصلی A در I قرار دارند، نتیجه می‌شود که $det(A)$ به صورت $x + ۱$ که $x \in I$ و یا $y + ۱-$ که $y \in I$ است. اکنون قرار می‌دهیم $r = (-۱)^t det(A)$. واضح است که $r \in R$، $rM = ۰$ و $r - ۱ \in I$. اثبات کامل است.

تمرین ۱۷.۸.۱. (*قضیه واسکانسلوس*) *فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد. اگر M یک Rــ مدول متناهی مولد و $f \in End_R(M)$ پوشا باشد آنگاه نشان دهید که f یک به یک است.*

حل. حلقه $R[x]$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تمرین ۱۶.۸.۱، را برای $R[x]$ به کار ببندیم. پس باید M را به یک $R[x]$ــ مدول متناهی مولد تبدیل کنیم و یک ایده‌آل مناسب I در $R[x]$ بیابیم که

$IM = M$. برای این منظور، با یک بررسی ساده می‌توان دید که ضرب در اسکالر زیر M را تبدیل به یک $R[x]$ـ مدول می‌کند

$$(r_nx^n + ... + r_۰).m = (r_nf^n + r_{n-۱}f^{n-۱} + ... + r_۱f + r_۰id_M)(m).$$

واضح است که R یک زیرحلقه از $R[x]$ است و ضرب در اسکالر بالا وقتی چندجمله‌ای را ثابت در نظر می‌گیرم (یعنی همان عناصر R)، ضرب در اسکالری است که M را به Rـ مدول تبدیل می‌کند. این نتیجه می‌دهد که M به عنوان $R[x]$ـ مدول نیز متناهی مولد است (چرا؟). حال قرار می‌دهیم $I =< x >$. واضح است که I ایده‌آل $R[x]$ است. از طرفی داریم که $M \subseteq IM$. فرض کنیم $b \in M$. چون f پوشا است پس $a \in M$ موجود است که $f(a) = b$. حال داریم

$$x.a = (f)(a) = f(a) = b.$$

یعنی $b \in IM$. پس $M \subseteq IM$ و در نتیجه $M = IM$. اکنون طبق تمرین ۱۶.۸.۱، عنصر $r(x) \in R[x]$ چنان موجود است که $r(x)M = ۰$ و $۱ - r(x) \in I =< x >$. پس $۱ - r(x) = xh(x)$ که $h(x) \in R[x]$ یا معادلا $r(x) = ۱ - xh(x)$. اکنون اگر $a \in Ker(f)$ باشد آنگاه $r(x).a = ۰$ یا معادلا $(۱ - xh(x)).a = ۰$. از طرفی $f(a) = ۰$ بنابراین

$$\begin{aligned}
& ۰ = (۱ - xh(x)).a = (۱ - x(h_nx^n + ... + h_۰)).a = \\
& (id_M - f(h_nf^n + ... + h_۰id_M))(a) = \\
& (id_M - (h_nf^{n+۱} + ... + h_۰f))(a) = \\
& id_M(a) - h_nf^{n+۱}(a) + ... + h_۰f(a) = \\
& id_M(a) = a.
\end{aligned}$$

پس $Ker(f) = ۰$ و طبق لم ۱۸.۳.۱، f یک به یک است.

تمرین ۱۸.۸.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد که فقط یک ایده‌آل چپ ماکسیمال $\mathcal{M}$ دارد. در این صورت موارد زیر را نشان دهید.*
(۱) برای هر $m \in \mathcal{M}$ عنصر $۱ - m$ یکال است.
(۲) اگر M یک Rـ مدول چپ باشد که هر زیرمدول متناهی تولید M دوری است آنگاه هر دو زیرمدول M تحت رابطه شمول با هم قابل مقایسه هستند.

حل. (۱) به برهان خلف، فرض کنیم $۱ - m$ یکال نباشد. پس ایده‌آل چپ $R(۱ - m)$ در ایده‌آل ماکسیمال چپ $\mathcal{M}$ قرار دارد (توجه کنید که هر ایده‌آل چپ در یک ایده‌آل ماکسیمال چپ قرار می‌گیرد). پس باید $۱ - m \in \mathcal{M}$ باشد. اما $m \in \mathcal{M}$ پس داریم $۱ = ۱ - m + m \in \mathcal{M}$. این نشان می‌دهد که $R = \mathcal{M}$ که تناقض با ماکسیمال چپ بودن $\mathcal{M}$ است.
(۲) فرض کنیم N و K دو زیرمدول دلخواه از M باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که $N \subseteq K$ یا $K \subseteq N$. به برهان خلف، فرض می‌کنیم که $N \not\subseteq K$ و $K \not\subseteq N$. پس فرض‌های زیر با معنی است.

$$۰ \neq n \in N \setminus K \qquad\qquad ۰ \neq k \in K \setminus N$$

حال طبق فرض زیرمدول متناهی تولید $Rn+Rk$ دوری است. یعنی $x \in M$ چنان وجود دارد که $Rn+Rk=Rx$. در نتیجه $r,s \in R$ چنان وجود دارد که $n=rx$ و $k=sx$. اما نه r و نه s یکال نیستند. زیرا اگر مثلا r یکال باشد آنگاه $x=r^{-1}n$. در نتیجه $k=sr^{-1}n$ و بنابراین $k \in N$ که تناقضی آشکار با فرض ما است. پس ایده‌آل‌های چپ Rr و Rs در $\mathcal{M}$ قرار دارند. در نتیجه $r,s \in \mathcal{M}$. از طرفی واضح است که عنصرهای r' و s' در R چنان وجود دارند که $x=r'n+s'k$. این نشان می‌دهد که $x=r'rx+s'sx$. پس $(1-r'r-s's)x=0$ یا معادلا $(1-(r'r+s's))x=0$. چون $\mathcal{M}$ یک ایده‌آل چپ است پس $r'r \in \mathcal{M}$ و $s's \in \mathcal{M}$. در نتیجه $r'r+s's \in \mathcal{M}$. حال طبق (۱) عنصر $1-(r'r+s's)$ یکال است و در نتیجه رابطه $(1-(r'r+s's))x=0$ نتیجه می‌دهد که $x=0$.
یعنی نشان داده‌ایم که $Rn+Rk=0$. این نشان می‌دهد که $n+k=0$ یا معادلا $n=-k$. پس $n \in K$. این تناقض با فرض ما است. بنابراین باید $N \subseteq K$ یا $K \subseteq N$.

تمرین ۱۹.۸.۱. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد و $M=N\oplus K$ که K و N دو زیرمدول از M هستند. نشان دهید که $Hom_R(N,K)=0$ اگر و تنها اگر برای هر $f \in End_R(M)$ داشته باشیم $f(N)\subseteq N$.*

حل. فرض کنیم $Hom_R(N,K)=0$ و $f \in End_R(M)$. نشان می‌دهیم $f(N)\subseteq N$. قرار می‌دهیم $f|_N=g$. حال به برهان خلف، فرض کنیم $g(N)=f(N)\not\subseteq N$. پس باید داشته باشیم $g(N)\cap K \neq 0$. در نتیجه $x \in g(N)$ چنان وجود دارد که $x=n+k$ و $k\neq 0$. بنابراین Rـ همریختی $p_2: g(N)\longrightarrow K$، همریختی صفر نیست. حال قرار می‌دهیم $h=p_2 g$. واضح است که $h \in Hom_R(N,K)$. چون $x \in g(N)$ پس $y \in N$ چنان وجود دارد که $g(y)=x$ و داریم

$$h(y)=p_2 g(y)=p_2(x)=p_2(n+k)=k\neq 0.$$

بنابراین h صفر نیست و این در تناقض با $Hom_R(N,K)=0$ است.
برعکس؛ فرض کنیم برای هر $f \in End_R(M)$ داشته باشیم $f(N)\subseteq N$. نشان می‌دهیم $Hom_R(N,K)=0$. به برهان خلف، فرض کنیم $0\neq g \in Hom_R(N,K)$. حال قرار می‌دهیم

$$f: M \longrightarrow M,\ \ f(n+k)=g(n)+k.$$

واضح است که f یک Rـ همریختی مدولی خوشتعریف است (چرا؟). همچنین به راحتی دیده می‌شود که $f(M)=Im(f)\subseteq K$ (چرا؟). در نتیجه $f(N)\subseteq K$. اما طبق فرض $f(N)\subseteq N$. بنابراین $f(N)\subseteq N\cap K=0$ یعنی $f(N)=0$. پس برای هر $n \in N$ داریم

$$0=f(n)=f(n+0)=g(n)+0=g(n).$$

این یعنی $g=0$. این یک تناقض آشکار است.

۹.۱ تمرین‌های مروری فصل اول

تمرین ۱.۹.۱. اگر M یک Rـ مدول چپ یکانی باشد و $N, K \leq M$. نشان دهید که اگر $N \cap K$ و $N + K$ متناهی مولد باشند نشان دهید که N و K متناهی مولد هستند.

تمرین ۲.۹.۱. فرض کنیم R حلقه یکدار و I ایده‌آل چپ باشد که $R \cong_R R/I$. نشان دهید که $e \in R$ چنان وجود دارد $I = Re$ و $e^2 = e$.

تمرین ۳.۹.۱. فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. آنگاه یک دنباله دقیق کوتاه به شکل زیر از زیرمدول‌های M بسازید.

$$0 \longrightarrow N \cap K \longrightarrow N \times K \longrightarrow N + K \longrightarrow 0$$

تمرین ۴.۹.۱. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همریختی مدولی پوشا باشد. اگر برای زیرمدول‌های K و L از M داشته باشیم $M = L + K$ و $K \cap L = Ker(f)$ آنگاه نشان دهید $N = f(K) \oplus f(L)$.

تمرین ۵.۹.۱. فرض کنیم R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای Q باشد. نشان دهید که

$$Hom_R(Q, R) = 0.$$

تمرین ۶.۹.۱. نشان دهید که $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}) = 0$.

تمرین ۷.۹.۱. اگر M و N دو Rـ مدول متناهی مولد باشند آنگاه آیا $Hom_R(M, N)$ متناهی مولد است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

تمرین ۸.۹.۱. برای حلقه دلخواه R موارد زیر را نشان دهید.
(۱) $R[x] \cong_R \bigoplus_{i=0}^{\infty} R$.
(۲) $R[[x]] \cong_R \prod_{i=0}^{\infty} R$.

تمرین ۹.۹.۱. (تکنیک دترمینان) فرض کنیم R حلقه یکدار جابجایی و I ایده‌آل R باشد. اگر M یک Rـ مدول متناهی مولد یکانی و $f \in End_R(M)$ به طوری که $f(M) \subseteq IM$ آنگاه نشان دهید که عضوهای مانند $r_0, ..., r_{n-1} \in I$ موجود هستند که

$$f^n + r_{n-1} f^{n-1} + ... + r_1 f_1 + r_0 id_M = 0.$$

تمرین ۱۰.۹.۱. نمودار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ T & & \end{tikzcd}$$

موارد زیر معادل هستند.
(۱) Rـ همریختی مدولی $h : T \longrightarrow N$ که نمودار جابجایی شود.
(۲) $Ker(f) \subseteq Ker(g)$.
به علاوه h یکتا معیین می‌شود. شرط لازم و کافی برای یک به یک بودن h چیست؟

تمرین ۱.۹.۱۱. *فرض کنیم R حلقه جابجایی و I ایده‌آل R باشد. اگر M یک Rـ مدول متناهی مولد یکانی و $r \in R$ چنان موجود باشد که $rM \subseteq IM$ آنگاه نشان دهید که $n \in \mathbb{N}$ و $s \in I$ وجود دارد که $(r^n + s)M = 0$.*

تمرین ۱.۹.۱۲. *فرض کنیم R حلقه باشد. نشان دهید که دنباله دقیق کوتاه زیر شکافته می‌شود.*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0$$

تمرین ۱.۹.۱۳. *(تکنیک دترمینان) فرض کنیم R حلقه یکدار جابجایی و P ایده‌آل اول R باشد. اگر P متناهی مولد و $Ann_R(P) = 0$ آنگاه نشان دهید $Ann_R(P/P^2) = P$.*

تمرین ۱.۹.۱۴. *با یک مثال نشان دهید که قضیه واسکانسلوس (تمرین ۱.۸.۱۷، را ببینید) برای حلقه ناجابجایی یکدار صحیح نیست.*

تمرین ۱.۹.۱۵. *با یک مثال نشان دهید که اگر در قضیه واسکانسلوس (تمرین ۱.۸.۱۷، را ببینید) جای پوشایی فرض یک به یکی قرار دهیم حکم پوشایی به دست نمی‌آید.*

فصل ۲

برخی مدول‌های خاص

در این فصل مدول‌های ویژه‌ای را مطالعه می‌کنیم. این مدول‌ها جایگاه خاصی در نظریه مدول و سایر شاخه‌های جبر دارند. قرار دادهای فصل قبل در این فصل نیز پا برجا هستند.

۱.۲ مدول‌های آزاد

یادآوری می‌کنیم که هر فضای برداری دارای پایه است. به این معنی که اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه یک $X \subseteq V$ وجود دارد که اولا V را تولید می‌کند و ثانیا X مستقل خطی است. مستقل خطی بودن X یعنی اگر x_1، ....، x_n در X دلخواه باشند و r_1، ...، r_n در F چنان باشند که $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ آنگاه نتیجه شود که $r_i = 0$. اکنون که با مفهوم مدول آشنا شده‌اید و دانسته‌اید که مدول یک تعمیم از فضای برداری است، طبیعی است که این سوال را مطرح کنیم که آیا مدول‌ها نیز مانند فضاهای برداری دارای پایه هستند؟ منظور ما از پایه دقیقا همان مفهومی که از فضای برداری دریافت می‌کنیم یعنی زیرمجموعه‌ای که تولید می‌کند و مستقل خطی است.

جواب سوال فوق در حالت کلی منفی است. برای مثال $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_2$ پایه ندارد. زیرا برای هر $\bar{x} \in \mathbb{Z}_2$ داریم $2\bar{x} = \bar{0}$.

داشتن پایه X برای مدولی مانند M از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ساده‌ترین مطلبی که پایه در اختیار ما قرار می‌دهد این است که از مدول M به مدول دلخواه N می‌توانیم یک همریختی دلخواه تعریف کنیم. به این صورت که کافی است هر عضو X را به یک عضو N نسبت دهیم و سپس با کمک ترکیب خطی آن را روی کل M گسترش می‌دهیم. روش دقیق کار را در ادامه خواهید دید.

در این بخش دسته‌ای از مدول‌ها را مطالعه خواهیم کرد که شباهت بسیاری به فضاهای برداری دارند. اما در برخی موارد نیز رفتار متفاوتی نسبت به فضاهای برداری از خود نشان می‌دهند. برای مثال در فضاهای برداری دیدیم که هر دو پایه از نظر تعداد اعضا یکسان هستند. اما در ادامه خواهیم دید مدول‌های وجود دارند که تعداد اعضای پایه آنها یکسان نیست.

دسته‌ای از مدول‌ها که پایه دارند را مدول آزاد گوییم که تعریف دقیق آن در ادامه می‌آید. معمولا در این نوشتار از حرف لاتین F برای نمایش یک مدول آزاد استفاده می‌کنیم که بر گرفته از اولین حرف معادل لاتین آن یعنی “Free” است.

این بخش را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. گوییم زیرمجموعه X از M مستقل خطی است هرگاه برای هر n عضو متمایز از X مانند x_1، ...، x_n و هر n عضو از R مانند r_1، ...، r_n که در $r_1x_1 + ... + r_nx_n = 0$ صدق می‌کند بتوانیم نتیجه بگیریم $r_1 = ... = r_n = 0$.*

مثال ۲.۱.۲. *فرض کنیم R حلقه (یکدار) باشد. زیرمجموعه $X = \{1\}$ از مدول ${}_RR$ مستقل خطی است.*

مثال ۳.۱.۲. *برای $\mathbb{Z}$ـ مدول $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ زیرمجموعه $X = \{(1, 0), (0, 2)\}$ مستقل خطی است.*

مثال ۴.۱.۲. *زیرمجموعه $X = \{2, 3\}$ از مدول ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ مستقل خطی نیست. زیرا داریم که $(-3)2 + (2)3 = 0$.*

تعریف ۵.۱.۲. *مجموعه مولد X برای Rـ مدول چپ M که مستقل خطی باشد را پایه نامیم. به عبارت دیگر $X \subseteq M$ یک پایه برای M است هرگاه مستقل خطی باشد و هر عضو m از M ترکیب خطی از عناصر X نوشته شود یعنی $m = \sum_{i=1}^{n} r_ix_i$ که $x_i \in X$ و $r_i \in R$. هر Rـ مدول M که پایه داشته باشد را مدول آزاد گوییم.*

مثال ۶.۱.۲. *هر فضای برداری روی میدان F یک Fـ مدول آزاد است.*

مثال ۷.۱.۲. *فرض کنیم R حلقه (یکدار) باشد. زیرمجموعه $X = \{1\}$ از مدول ${}_RR$ پایه است. پس هر برای هر حلقه یکدار مدول‌های R_R و ${}_RR$ آزاد هستند.*

مثال ۸.۱.۲. *برای $\mathbb{Z}$ـ مدول $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ زیرمجموعه $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ پایه است. پس M آزاد است.*

مثال ۹.۱.۲. *برای مدول 0 پایه را $\emptyset$ در نظر می‌گیریم.*

مثال ۱۰.۱.۲. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_6$ آزاد نیست. زیرا برای هر $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ داریم $6\bar{x} = \bar{0}$.*

تذکر ۱۱.۱.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. در این صورت $X \subseteq M$ یک پایه است اگر و تنها اگر هر عضو ناصفر m از M به صورت یکتایی به شکل $m = r_1x_x + ... + r_nx_n$ نوشته شود که x_i ها متمایز و r_i ها ناصفر هستند.*

در فضای برداری دیدیم که زیرفضای برداری و فضای برداری خارج قسمتی از یک فضای برداری دوباره فضای برداری است. اما این مطلب برای مدول‌ها در حالت کلی صحیح نیست. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۲.۱.۲. *$\mathbb{Z}_6$ـ مدول $\mathbb{Z}_6$ آزاد است در حالی که $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ زیرمدولی از $\mathbb{Z}_6$ است که آزاد نیست (چرا؟).*

مثال ۱۳.۱.۲. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ آزاد است در حالی که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ آزاد نیست (چرا؟).*

نتیجه ۱۴.۱.۲. *زیرمدول یک مدول آزاد و مدول خارج قسمتی از یک مدول آزاد، لزوما آزاد نیست.*

مثال ۱۵.۱.۲. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{R}$ آزاد نیست. زیرا اگر $X = \{x_۱, \{x_i\}_{i\in I}\}$ پایه باشد آنگاه داریم*

$$\frac{x_۱}{۲} = kx_۱ + k_۱x_{i_۱} + ... + k_tx_{i_t} \;\Rightarrow\; (۲k - ۱)x_۱ + k_۱x_{i_۱} + ... + k_tx_{i_t} = ۰$$

اکنون از مستقل خطی بودن داریم $۲k - ۱ = ۰$ که این با $k \in \mathbb{Z}$ در تناقض است. این در حالی است که زیرمدول $\mathbb{Z}$ آزاد است (چرا؟).

نتیجه ۱۶.۱.۲. *ممکن است مدولی آزاد نباشد ولی زیرمدول آزاد داشته باشد.*

تذکر ۱۷.۱.۲. *در فضای برداری هر مجموعه مستقل خطی را می‌توانستیم به یک پایه گسترش دهیم. این مطلب برای مدول‌های آزاد صحیح نیست. زیرا برای $\mathbb{Z}$ـ مدول آزاد $\mathbb{Z}$ مجموعه $\{۲\}$ مستقل خطی است. اما برای هر $x \in \mathbb{Z}$ مجموعه $\{۲, x\}$ مستقل خطی نیست (چرا؟) پس پایه هم نیست!*

تذکر ۱۸.۱.۲. *در فضای برداری از هر مجموعه مولد می‌توانستیم با حذف عناصر وابسته یک پایه بسازییم. این مطلب نیز برای مدول‌های آزاد صحیح نیست. زیرا برای $\mathbb{Z}$ـ مدول آزاد $\mathbb{Z}$ مجموعه $\{۲, ۳\}$ مولد است (چرا؟). اما با خذف ۲ یا ۳ از این مجموعه فقط به یک مجموعه مستقل خطی می‌رسیم که مولد نیست.*

تعریف و مثال ۱۹.۱.۲. *فرض کنیم R حلقه (یکدار) باشد. در این صورت مدول $\bigoplus_{i\in I} R$ یک Rـ مدول چپ آزاد است. زیرا $X = \{e_i\}_{i\in I}$ که*

$$e_i = (..., ۰, ..., ۰, \overbrace{۱}^{\text{محل } i \text{ ام}}, ۰, ..., ۰, ...)$$

یک پایه است (عبارت سمت دوم تساوی صرفا یک نماد است تا تصور بهتری از داشته باشیم و باید زمانی که مجموعه اندیس گذار ناشمارا است با حساسیت ویژه به این نماد دقت شود). به این پایه، پایه استاندارد گوییم.

قضیه زیر وجود پایه برای فضای برداری روی میدان را به حلقه تقسیم گسترش می‌دهد و طیف وسیعی از مثال برای مدول‌های آزاد فراهم می‌کند.

قضیه ۲۰.۱.۲. *فرض کنیم D یک حلقه تقسیم باشد. در این صورت هر Dـ مدول چپ دارای پایه است و در نتیجه آزاد است.*

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{X \subseteq M \mid \text{مستقل خطی است } X\}.$$

چون $\emptyset \in \mathcal{A}$ پس $\mathcal{A}$ ناتهی است و با رابطه شمول یک مجموعه جزئا مرتب است. طبق لم زرن $\mathcal{A}$ دارای عضو ماکسیمالی مانند B است. ادعا می‌کنیم B پایه است. کافی است نشان دهیم B مولد است یا معادلا $M = DB$. فرض کنیم $x \in M \setminus DB$. حال مجموعه $B \cup \{x\}$ مستقل خطی است (چرا؟) و این ماکسیمال بودن B در $\mathcal{A}$ را نقض می‌کند. پس باید $M = DB$. □

گزاره ۲.۱.۲۱. *فرض کنیم F یک Rـ مدول چپ آزاد با پایه X باشد. برای هر Rـ مدول چپ مانند M و هر تابع مانند $f : X \longrightarrow M$ یک Rـ همریختی مدولی منحصر به فرد مانند $g : F \longrightarrow M$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M & \end{tikzcd} \qquad\qquad (f = gi)$$

اثبات. هر عضو F دارای نمایشی منحصر به فرد به شکل $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ دارد. تعریف می‌کنیم

$$g : F \longrightarrow M, \;\; g(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i).$$

g خوشتعریف و یک Rـ همریختی مدولی است. برای هر $x \in X$ داریم

$$gi(x) = g(x) = f(x).$$

یعنی $f = gi$. حال فرض کنیم $g' : F \longrightarrow M$ با خاصیت $g'i = f$ موجود باشد. داریم

$$g(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i g' i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i g'(x_i) = g'(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i).$$

پس $g = g'$ و اثبات کامل است. □

گزاره زیر نشان می‌دهد که روی مدول‌های آزاد می‌توان همریختی مدولی غیر بدیهی تعریف کرد. این کار مشابه با جبر خطی صورت می‌گیرد. یعنی کافی است اثر تابع را روی پایه مشخص کنیم و با کمک خطی بودن این تابع یک همریختی روی مدول آزاد به دست می‌دهد.

گزاره ۲.۱.۲۲. *فرض کنیم F یک Rـ مدول چپ آزاد با پایه X و M یک Rـ مدول چپ باشد. هر تابع $f : X \longrightarrow M$ به صورت منحصر به فرد به Rـ همریختی مدولی $g : F \longrightarrow M$ قابل گسترش است یعنی $g|_X = f$.*

اثبات. طبق گزاره ۲.۱.۲۱، Rـ همریختی مدولی یکتای g وجود دارد که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M & \end{tikzcd} \qquad\qquad (f = gi)$$

از طرفی برای هر $x \in X$ داریم که $g(x) = fi(x) = f(x)$ پس $g|_X = f$. □

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که با هر مجموعه دلخواه مانند X و هر حلقه دلخواه مانند R می‌توانیم یک Rـ مدول چپ مانند F بسازییم که آزاد با پایه X باشد.

گزاره ۲۳.۱.۲. *فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و R یک حلقه باشد. در این صورت یک Rـ مدول چپ آزاد مانند F با پایه X وجود دارد. F تحت یکریختی یکتا معیین می‌شود.*

اثبات. فرض می‌کنیم F مجموعه همه ترکیبات خطی به صورت $\sum_{i=۱}^{k} r_i x_i$ باشد که $r_i \in R$ و $x_i \in X$ و همچنین از رابطه

$$\sum_{i=۱}^{k} r_i x_i = r_{۱}x_{۱} + r_{۲}x_{۲} + \ldots + r_k x_k = ۰x_{۱} + ۰x_{۲} + \ldots + ۰x_k$$

نتیجه شود که برای هر i، $r_i = ۰$. حال روی مجموعه F جمع و ضرب در اسکالر زیر را قرار می‌دهیم.

$$\sum_{\text{متناهی}} r_i x_i + \sum_{\text{متناهی}} s_i x_i = \sum_{\text{متناهی}} (r_i + s_i) x_i \qquad\qquad r.(\sum_{\text{متناهی}} r_i x_i) = \sum_{\text{متناهی}} (r r_i) x_i$$

با یک بررسی ساده F با جمع بالا یک گروه آبلی است. دقت شود که عضو $۰x_{۱} + ۰x_{۲} + \ldots + ۰x_k$ عضو خنثی جمعی است و برای راحتی آن را با ۰ نشان می‌دهیم. اکنون با یک بررسی ساده می‌توانیم مشاهده کنیم که F با ضرب در اسکالر بالا یک Rـ مدول چپ یکانی است. حال نشان می‌دهیم که F تحت یکریختی منحصر به فرد است.
فرض کنیم G یک Rـ مدول چپ آزاد دیگر با پایه X و $j : X \longrightarrow G$ تابع شمول روی G باشد. اکنون نمودارهای زیر را نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & F \\ G & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & G \\ F & \end{tikzcd}$$

طبق گزاره ۲۱.۱.۲، به نمودارهای جابجایی زیر می‌رسیم که f و g دو Rـ همریختی مدولی هستند.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & F \arrow[dl, dashed, "f"] \\ G & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & G \arrow[dl, dashed, "g"] \\ F & \end{tikzcd}$$

اما برای هر $x \in X$ داریم

$$gf(x) = gfi(x) = gj(x) = i(x) = x \qquad\qquad fg(x) = fgj(x) = fi(x) = j(x) = x$$

پس fg و gf روی X همانی هستند و چون fg و gf هر دو Rـ همریختی هستند داریم $fg = id_G$ و $gf = id_F$. اکنون طبق گزاره ۱۹.۳.۱، باید f یکریختی باشد و اثبات کامل است. $\square$

تذکر ۲.۱.۲۴. در مثال زیر رفتار بسیار عجیبی از مدول‌های آزاد را نشان می‌دهیم. این مثال نشان می‌دهد که روی یک حلقه ناجابجایی تعداد اعضای پایه‌ها (عدد اصلی) لزوما یک عدد یکسان نیست! باید خاطر نشان کنیم که در بخش بعدی با کمک مفهوم تنسور نشان می‌دهیم که تعداد اعضای پایه‌های (عدد اصلی) یک مدول آزاد روی حلقه جابجایی (یکدار) برابر هستند (نتیجه ۲.۲.۲.۱۱ را ببینید). پس عملا مفهوم بعد فضای برداری برای مدول آزاد روی حلقه دلخواه قابل تعمیم نیست.

مثال ۲.۱.۲۵. فرض کنیم R یک حلقه یکدار باشد. در این صورت $F = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R$ یک Rـ مدول چپ آزاد با پایه استاندارد X است یعنی $X = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. قرار می‌دهیم $S = End_R(F)$. می‌دانیم S یک حلقه ناجابجایی یکدار است (چرا؟). واضح است که ${}_SS$ مدولی آزاد با پایه یک عضوی $X_1 = \{1_S = id_F\}$ است. حال برای این مدول یک پایه دوعضوی می‌سازیم. تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} f : X \longrightarrow F \\ \quad f(e_{2n}) = e_n \\ \quad f(e_{2n-1}) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} f' : X \longrightarrow F \\ \quad f(e_{2n}) = 0 \\ \quad f(e_{2n-1}) = e_n \end{cases}$$

واضح است که f و f' تابع هستند. حال طبق گزاره ۲.۱.۲۲، f و f' قابل گسترش به دو Rـ همریختی مدولی

$$g : F \longrightarrow F \qquad\qquad g' : F \longrightarrow F$$

هستند که $g|_X = f$ و $g'|_X = f'$. حال ادعا می‌کنیم $X_2 = \{g, g'\}$ یک پایه برای ${}_SS$ است. ابتدا دقت شود که اگر عضوی از S روی X معلوم باشد آنگاه روی F معلوم است (چرا؟). حال اگر $\alpha \in S$ آنگاه قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} k(e_{2n-1}) = \alpha(e_{2n-1}) \\ k(e_{2n}) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} h(e_{2n}) = \alpha(e_{2n}) \\ h(e_{2n-1}) = 0 \end{cases}$$

حال واضح است که $\alpha = hg + kg'$. یعنی $X_2 = \{g, g'\}$ مولد است. فرض کنیم عناصر ناصفر h و k چنان در S باشند که $hg + kg' = 0$. بدون کم شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم $k(e_1) \neq 0$ (چرا؟). حال داریم

$$0 = 0(e_1) = (hg + kg')(e_1) = hg(e_1) + kg'(e_1) = 0 + k(e_1) = k(e_1).$$

این تناقض است. بنابراین $X_2 = \{g, g'\}$ مستقل خطی است.

قضیه زیر برای مدول‌های آزاد مشخصه سازی ارائه می‌کند.

قضیه ۲.۱.۲۶. فرض کنیم F یک Rـ مدول چپ آزاد با پایه X باشد. در این صورت دست کم یک مجموعه اندیس گذار I وجود دارد که $F \cong_R \bigoplus_{i\in I} R$. در واقع I مجموعه همتوان با مجموعه پایه X است یعنی $|X| = |I|$.

اثبات. فرض کنیم F یک Rـ مدول آزاد با پایه $X=\{x_i\}_{i\in I}$ باشد. قرار می‌دهیم

$$f:\bigoplus_{i\in I}R\longrightarrow F,\ \ f((r_i)_{i\in I})=\sum r_ix_i.$$

واضح است که f خوشتعریف (چرا؟) و یک Rـ یکریختی مدولی است. □

نمادگذاری ۲.۱.۲۷. *اگر I یک مجموعه اندیس گذار باشد آنگاه منظور از نماد W^I و $W^{(I)}$ یعنی $\prod_{|I|}W$ و $\bigoplus_{|I|}W$.*

نتیجه ۲.۱.۲۸. *جمع مستقیم هر خانواده از مدول‌های آزاد، مدولی آزاد است.*

اثبات. از قضیه ۲.۱.۲۶ بدیهی است. □

نتیجه ۲.۱.۲۹. *فرض کنیم F یک Rـ مدول چپ آزاد با پایه X باشد. در این صورت اگر $|X|=n$ آنگاه $F\cong_R R^{(n)}$.*

اثبات. طبق قضیه ۲.۱.۲۶، بدیهی است. □

تذکر ۲.۱.۳۰. *اگر Rـ مدول چپ آزاد F دو پایه مانند X_1 و X_2 داشته باشد آنگاه طبق قضیه ۲.۱.۲۶، $R^{(X_1)}\cong_R F\cong_R R^{(X_2)}$ (مثال ۲.۱.۲۵ را ببینید).*

تذکر ۲.۱.۳۱. *اگر F یک Rـ مدول چپ باشد که $F\cong_R R^{(I)}$ آنگاه F یک Rـ مدول چپ آزاد است. زیرا اگر $\{e_i\}_{i\in I}$ نمایش پایه استاندارد برای Rـ مدول چپ آزاد $R^{(I)}$ باشد و $R^{(I)}\overset{f}{\cong}F$ آنگاه با یک بررسی ساده $\{f(e_i)\}_{i\in I}$ پایه برای F است.*

با تعریف زیر کار را ادامه می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۳۲. *گوییم Rـ مدول چپ N تصویر همریخت Rـ مدول چپ M است هرگاه یک تابع پوشا از M به N موجود باشد.*

این بخش را با قضیه زیر پایان می‌بریم. قضیه زیر بسیار کاربردی است.

قضیه ۲.۱.۳۳. *هر Rـ مدول چپ M با یک Rـ مدول چپ آزاد مانند F تصویر همریخت است. اگر M متناهی مولد باشد F را نیز می‌توان متناهی مولد انتخاب کرد.*

اثبات. فرض کنیم X مجموعه مولدی برای M باشد (چرا چنین فرضی معتبر است؟). قرار می‌دهیم $F=R^{(X)}$. واضح است که F یک Rـ مدول چپ با پایه استاندارد $X'=\{e_x\}_{x\in X}$ است. حال تابع $f:X'\longrightarrow M$ با ضابطه $f(e_x)=x$ طبق گزاره ۲.۱.۲۲، قابل گسترش به یک Rـ همریختی مدولی منحصر به فرد $g:F\longrightarrow M$ است که $g|_{X'}=f$. اما برای هر $x\in X$ داریم

$$x=f(e_x)=g(e_x)\in g(F).$$

پس $X\subseteq g(F)$. بنابراین $M=RX\subseteq Rg(F)=g(F)\subseteq M$ یا معادلاً $M=g(F)$. یعنی g یک Rـ همریختی مدولی پوشا است. پس M تصویر همریخت مدول آزاد F است.
برای قسمت دوم، طبق فرض $|X|<\infty$ و این نتیجه می‌دهد که $X'=\{e_x\}_{x\in X}$ یک پایه متناهی برای $F=R^{(X)}$ باشد و اثبات کامل است. □

تمرین‌ها

تمرین ۲.۱.۳۴. نشان دهید $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول آزاد نیست.

تمرین ۲.۱.۳۵. فرض کنیم k یک عدد طبیعی دلخواه باشد. برای مثال ۲.۱.۲۵، یک پایه k عضوی بسازید و نتیجه بگیرید که برای هر عدد طبیعی k داریم $S \cong_S S^{(k)}$ (چه عجیب!).

تمرین ۲.۱.۳۶. فرض کنیم F یک Rـ مدول چپ آزاد باشد. اگر I یک ایده‌آل R باشد که به عنوان Rـ مدول چپ آزاد است آنگاه نشان دهید که IF نیز یک Rـ مدول چپ آزاد است.

تمرین ۲.۱.۳۷. مدول آزادی با پایه X مثال بزنید که زیرمدول آزادی با پایه Y داشته باشد که $|Y| > |X|$.

تمرین ۲.۱.۳۸. نشان دهید که برای هر Rـ مدول چپ M یک Rـ مدول چپ آزاد F و $K \leq F$ وجود دارند که $M \cong_R F/K$.

تمرین ۲.۱.۳۹. نشان دهید برای هر Rـ مدول چپ M دنباله دقیق به شکل $F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ که F یک Rـ مدول چپ آزاد است، وجود دارد. اگر M متناهی مولد باشد آنگاه می‌توان F را نیز متناهی مولد انتخاب کرد.

۲.۲ حاصل ضرب تنسوری مدول‌ها

در این بخش می‌خواهیم با کمک بخش مدول‌های آزاد و دو Rـ مدول یک $\mathbb{Z}$ـ مدول جدید بسازییم که حاصل ضرب تنسوری نامیده می‌شود. این مدول جدید ویژگی‌های جالبی دارد و در بعضی موارد روش‌های اثبات جدیدی برای ما فراهم می‌کند. تنسور در نظریه نمایش کاربرد وسیعی دارد. شاید بیشتر مطالب این بخش باید در فصل اول قرار می‌گرفت. اما سعی شده است که حاصل ضرب تنسوری بعد از معرفی مدول آزاد قرار بگیرد و نظر نگارنده اینگونه است که درک حاصل ضرب تنسوری با این دیدگاه برای دانشجو راحتر است. این بخش را به دو زیر بخش تقسیم کرده‌ایم تا مطالب راحتر قابل هضم باشند.

۱.۲.۲ معرفی و مقدمات

تعریف ۱.۱.۲.۲. *فرض کنیم که M یک Rـ مدول راست، N یک Rـ مدول چپ و G یک گروه آبلی (در واقع یک $\mathbb{Z}$ـ مدول) باشند. گوییم نگاشت $f\,:\,M\times N\longrightarrow G$ ، Rـ دوخطی میانی است هرگاه بری هر $m,m'\in M$ ، هر $n,n'\in N$ و هر $r\in R$ در شرایط زیر صدق کند:*

(۱) $f((m+m',n))=f((m,n))+f((m',n))$.

(۲) $f((m,n+n'))=f((m,n))+f((m,n'))$.

(۳) $f((mr,n))=f((m,rn))$.

به علاوه اگر G نیز یک Rـ مدول چپ و R جابجایی باشد آنگاه به f ، Rـ دوخطی گوییم هرگاه:

(۴) $f((mr,n))=f((m,rn))=rf((m,n))$.

برقرار باشد.

مثال ۲.۱.۲.۲. *برای هر حلقه R نگاشت*

$$f\,:\,R\times R\longrightarrow R,\ \ f((r,s))=rs$$

Rـ دوخطی میانی است. اگر R جابجایی باشد آنگاه f ، Rـ دوخطی است.

مثال ۳.۱.۲.۲. *فرض کنیم $M=N=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ و $R=\mathbb{Q}=G$ باشند. در این صورت*

$$f\,:\,M\times N\longrightarrow\mathbb{Q},\ \ f((x,y),(u,v))=xu+yv$$

Rـ دوخطی است.

مثال ۴.۱.۲.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. ضرب در اسکالر $.\,:\,R\times M\longrightarrow M$ یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است و اگر R جابجایی باشد یک نگاشت Rـ دوخطی است.*

مثال ۵.۱.۲.۲. *فرض کنیم M یک (R,R)ـ دومدول و N یک Rـ مدول چپ باشد. در این صورت نگاشت*

$$e\,:\,M\times Hom_R(M,N)\longrightarrow N,\ \ e((m,f))=f(m)$$

Rـ دوخطی میانی است و اگر R جابجایی باشد یک نگاشت Rـ دوخطی است. دقت شود که $Hom_R(M,N)$ یک Rـ مدول چپ است (چرا؟).

تعریف ۶.۱.۲.۲. *فرض کنیم که M یک Rـ مدول راست و N یک Rـ مدول چپ باشند. به زوج مرتب (G, f) که G یک گروه آبلی (در واقع یک $\mathbb{Z}$ـ مدول) و $f : M \times N \longrightarrow G$ یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است، حاصل ضرب تنسوری M و N گوییم هرگاه برای هر گروه H و هر نگاشت Rـ دوخطی میانی $g : M \times N \longrightarrow H$ یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی $\alpha : G \longrightarrow H$ موجود باشد (در واقع α همریختی گروهی است) که نمودار زیر جابجایی شود.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\alpha"] & H \end{tikzcd} \qquad (g = \alpha f)$$

در ادامه هدف ما این است که نشان دهیم گروه G که در تعریف ضرب تنسور دو مدول وجود دارد، تحت یکریختی گروهی یکتا معیین می‌شود. ابتدا یکتایی که آسانتر است را نشان می‌دهیم و سپس از دو مدول یک ضرب تنسوری می‌سازییم و به علاوه G و f را به دست می‌دهیم.

گزاره ۷.۱.۲.۲. *فرض کنیم که M یک Rـ مدول راست و N یک Rـ مدول چپ باشند. اگر (G, f) و (G', f') حاصل ضرب تنسوری M و N باشند آنگاه $\mathbb{Z}$ـ یکریختی $\beta : G \longrightarrow G'$ چنان وجود دارد که $f' = \beta f$.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\beta"] & G' \end{tikzcd}$$

اثبات. زوج (G, f) را ضرب تنسوری مد نظر قرار می‌دهیم و در تعریف حاصل ضرب تنسوری قرار می‌دهیم $H = G'$ و $g = f'$. پس نمودار زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ G & G' \end{tikzcd}$$

حال طبق تعریف حاصل ضرب تنسوری، $\mathbb{Z}$ـ همریختی β چنان وجود دارد که نمودار زیر جابجایی شود

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\beta"] & G' \end{tikzcd} \qquad (f' = \beta f)$$

حال زوج (G', f') را ضرب تنسوری مد نظر قرار می‌دهیم و در تعریف حاصل ضرب تنسوری قرار می‌دهیم $H = G$ و $g = f$. پس نمودار زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f"] & \\ G' & G \end{tikzcd}$$

حال طبق تعریف حاصل ضرب تنسوری، $\mathbb{Z}$ـ همریختی β' چنان وجود دارد که نمودار زیر جابجایی شود

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f"] & \\ G' \arrow[r, dashed, "\beta'"] & G \end{tikzcd} \qquad (f = \beta' f')$$

حال دو نمودار زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\beta'\beta"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\ G \arrow[r, dashed, "id_G"] & G \end{tikzcd}$$

طبق تعریف حاصل ضرب تنسوری چون یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی نمودار را جابجایی می‌کند، باید $\beta'\beta = id_G$. حال طبق گزاره ۱.۳.۱۹، قسمت (۱)، $\mathbb{Z}$ـ همریختی β یک به یک است.
این بار دو نمودار زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f'"] & \\ G' \arrow[r, dashed, "\beta\beta'"] & G' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f'"] & \\ G' \arrow[r, dashed, "id_{G'}"] & G' \end{tikzcd}$$

طبق تعریف حاصل ضرب تنسوری چون یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی نمودار را جابجایی می‌کند، باید $\beta\beta' = id_{G'}$. حال طبق گزاره ۱.۳.۱۹، قسمت (۲)، $\mathbb{Z}$ـ همریختی β پوشا است و اثبات کامل است. $\square$

در ادامه می‌خواهیم از دو مدول یک حاصل ضرب تنسوری بسازییم و وجود آن را نشان دهیم. کار را با تعریف زیر شروع می‌کنیم. گزاره ۲.۱.۲۳ در ادامه کار لازم می‌شود پس دوباره آن را با دقت مطالعه بفرمایید.

تعریف ۲.۲.۱.۸. *فرض کنیم M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول آزاد باشد. در این صورت به M گروه آبلی آزاد گوییم.*

تعریف ۹.۱.۲.۲. فرض کنیم M یک Rـ مدول راست و N یک Rـ مدول چپ باشند. گروه آبلی آزاد با پایه $X = M \times N$ را با نماد $\mathbb{Z}(M \times N)$ نشان می‌دهیم و این یعنی مجموعه تمام حاصل جمع‌ها به شکل $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i, y_i)$ که در آن $k \geq 1$، $n_i \in \mathbb{Z}$، $x_i \in M$ و $y_i \in N$. به عبارت دیگر

$$\mathbb{Z}(M \times N) = \{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i, y_i) \mid k \geq 1, n_i \in \mathbb{Z}, x_i \in M, y_i \in N\}.$$

تذکر ۱۰.۱.۲.۲. اگر $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i, y_i)$ و $\sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i)$ دو عضو دلخواه از $\mathbb{Z}(M \times N)$ باشند آنگاه با اضافه کردن تعداد مناسبی $0(x_i, y_i)$ می‌توانیم فرض کنیم $t = k$. گاهی برای راحتی $1(x_i, y_i)$ را با (x_i, y_i) نمایش می‌دهیم.

تذکر ۱۱.۱.۲.۲. دو عضو $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i, y_i)$ و $\sum_{i=1}^{k} n'_i(x_i, y_i)$ از $\mathbb{Z}(M \times N)$ را مساوی هستند هرگاه برای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم $n_i = n'_i$.

تذکر ۱۲.۱.۲.۲. عمل جمع در گروه آبلی آزاد $\mathbb{Z}(M \times N)$ (در واقع یک $\mathbb{Z}$ـ مدول است) به صورت

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{k} n'_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{k} (n_i + n'_i)(x_i, y_i)$$

است و عنصر $\sum_{i=1}^{k} 0(x_i, y_i)$ عضو خنثی (همانی یا صفر) این گروه است.

نمادگذاری ۱۳.۱.۲.۲. در ادامه این بخش، عضو خنثی گروه $\mathbb{Z}(M \times N)$ را با 0 نمایش می‌دهیم. خود گروه $\mathbb{Z}(M \times N)$ را با F نشان می‌دهیم و زیرگروهی از F که توسط عناصر به شکل

$$\begin{aligned}
&(x + x', y) - (x, y) - (x', y),\\
&(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),\\
&(xr, y) - (x, ry)
\end{aligned}$$

تولید می‌شود را با H نشان می‌دهیم که $r \in R$، $x \in M$ و $y \in N$. چون F آبلی است H زیرگروه نرمال است و گروه خارج قسمتی $G := F/H$ با معنی است.

لم ۱۴.۱.۲.۲. با نمادهای بالا، نگاشت

$$\lambda : M \times N \longrightarrow G, \quad \lambda((x, y)) = (x, y) + H$$

Rـ دوخطی میانی است.

اثبات. فرض کنیم $x, x' \in M$ و $y \in N$. چون $(x + x', y) - (x, y) - (x', y) \in H$ پس $(x + x', y) - (x, y) - (x', y) + H = H$. به عبارتی داریم

$$[(x + x', y) + H] - [(x, y) + H] - [(x', y) + H] = H.$$

اما H عضو خنثی گروه G است پس

$$[(x+x',y)+H]=[(x,y)+H]+[(x',y)+H].$$

بنابراین نشان داده ایم

$$\lambda((x+x',y))=\lambda((x,y))+\lambda((x',y)).$$

سایر خاصیت‌های نگاشت Rــ دوخطی میانی نیز برای λ به صورت مشابه اثبات می‌شوند. $\square$

اکنون با گزاره زیر به وعده‌ای که داده بودیم، عمل می‌کنیم.

گزاره ۱۵.۱.۲.۲. *با نمادهای معرفی شده، زوج (G,λ) حاصل ضرب تنسوری Rــ مدول راست M و Rــ مدول چپ N است.*

اثبات. طبق تعریف حاصل ضرب تنسوری، باید نشان دهیم که برای هر گروه K و هر نگاشت Rــ دوخطی میانی $g: M\times N\longrightarrow K$ یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ــ همریختی $\alpha: G\longrightarrow K$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "g"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\alpha"] & K \end{tikzcd} \qquad (g=\alpha\lambda)$$

پس برای اثبات، نگاشت Rــ دوخطی میانی $g: M\times N\longrightarrow K$ را به صورت دلخواه در نظر می‌گیریم و نموداری به شکل زیر می‌سازیم

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "g"] & \\ F & K \end{tikzcd}$$

اما F یک $\mathbb{Z}$ــ مدول آزاد است پس طبق گزاره ۲۱.۱.۲، یک $\mathbb{Z}$ــ همریختی مدولی یکتای مانند $h: F\longrightarrow K$ وجود دارد که نمودار زیر جابجایی است

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "g"] & \\ F \arrow[r, dashed, "h"] & K \end{tikzcd} \qquad (g=hi)$$

اما $H \subseteq Ker(h)$. زیرا g یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است و اثر h روی مولدهای H صفر می‌شود به عنوان مثال داریم

$$h((x,y+y')-(x,y)-(x,y')) = h((x,y+y')) - h((x,y)) - h((x,y')) =$$
$$hi((x,y+y')) - hi((x,y)) - hi((x,y')) =$$
$$g((x,y+y')) - g((x,y)) - g((x,y')) =$$
$$g((x,y)) + g((x,y')) - g((x,y)) - g((x,y')) = ۰$$

می‌دانیم که هر عنصر از G به شکل $\sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i) + H$ است. حال قرار می‌دهیم

$$\alpha : G \longrightarrow K, \ \ \alpha(\sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i) + H) = \sum_{i=۱}^{k} n_i g((x_i,y_i)).$$

α خوشتعریف است. زیرا اگر $\sum_{i=۱}^{k} n_i'(x_i,y_i) + H = \sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i) + H$ آنگاه داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i) - \sum_{i=۱}^{k} n_i'(x_i,y_i) \in H$$

پس

$$h(\sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i) - \sum_{i=۱}^{k} n_i'(x_i,y_i)) = ۰ \ \Rightarrow$$
$$h(\sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i)) = h(\sum_{i=۱}^{k} n_i'(x_i,y_i)) \ \Rightarrow$$
$$\sum_{i=۱}^{k} n_i h((x_i,y_i)) = \sum_{i=۱}^{k} n_i' h((x_i,y_i)) \ \Rightarrow$$
$$\sum_{i=۱}^{k} n_i hi((x_i,y_i)) = \sum_{i=۱}^{k} n_i' hi((x_i,y_i)) \ \Rightarrow$$
$$\sum_{i=۱}^{k} n_i g((x_i,y_i)) = \sum_{i=۱}^{k} n_i' g((x_i,y_i))$$

این یعنی $\alpha(\sum_{i=۱}^{k} n_i'(x_i,y_i) + H) = \alpha(\sum_{i=۱}^{k} n_i(x_i,y_i) + H)$. اما α یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی

نیز می‌باشد. زیرا

$$\alpha(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i,y_i)+H+\sum_{i=1}^{k} n'_i(x_i,y_i)+H)=$$
$$\alpha(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i,y_i)+\sum_{i=1}^{k} n'_i(x_i,y_i)+H)=$$
$$\alpha(\sum_{i=1}^{k}(n_i+n'_i)(x_i,y_i)+H)=$$
$$\sum_{i=1}^{k}(n_i+n'_i)g((x_i,y_i))=$$
$$\sum_{i=1}^{k} n_i g((x_i,y_i))+\sum_{i=1}^{k} n'_i g((x_i,y_i))=$$
$$\alpha(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i,y_i)+H)+\alpha(\sum_{i=1}^{k} n'_i(x_i,y_i)+H)$$

از طرفی

$$\alpha\lambda((x,y))=\alpha((x,y)+H)=g((x,y))$$

پس نمودار جابجایی زیر را به دست آورده‌ایم

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "g"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\alpha"] & K \end{tikzcd} \qquad (g=\alpha\lambda)$$

برای تکمیل اثبات، فقط یکتایی α باقیمانده است. داریم که

$$Im(\lambda)=\{(x,y)+H \mid x\in M, y\in N\}$$

مجموعه مولد برای G به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول است (زیرا $M\times N$ پایه برای F بود). اکنون اگر $K \longrightarrow G : \beta$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی دیگر با این خاصیت باشد که $g=\beta\lambda$ آنگاه α و β روی $Im(\lambda)$ اثر یکسان دارند

$$\alpha((x,y)+H)=g((x,y))=\beta((x,y)+H).$$

این نشان می‌دهد که α و β روی مولدها یکسان عمل می‌کند پس باید $\alpha=\beta$. اثبات کامل است. $\square$

گزاره ۱۵.۱.۲.۲، امکان تعریف زیر را فراهم می‌کند.

تعریف و نمادگذاری ۱۶.۱.۲.۲. *به گروه G حاصل ضرب تنسوری دو مدول گوییم و با $M \otimes_R N$ نشان می‌دهیم. عنصر $H + (x,y)$ از $M \otimes_R N$ را به صورت $x \otimes y$ نمایش می‌دهیم. پس $\lambda((x,y)) = x \otimes y$.*

گزاره ۱۷.۱.۲.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول راست، N یک Rـ مدول چپ، $x, y \in M$ و $u, w \in N$. در این صورت خواص زیر برقرار است.*
(۱) $x \otimes (u+w) = x \otimes u + x \otimes w$.
(۲) $(x+y) \otimes u = x \otimes u + y \otimes u$.
(۳) $xr \otimes u = x \otimes ru$.
(۴) اگر R جابجایی باشد آنگاه $r(x \otimes u) = xr \otimes u = x \otimes ru$. به ویژه اگر $R = \mathbb{Z}$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $n(x \otimes u) = xn \otimes u = x \otimes nu$.
(۵) $\circ \otimes u = x \otimes \circ = \circ$ به ویژه $\circ \otimes \circ = \circ$.

اثبات. فقط (۱) و (۵) را اثبات می‌کنیم بقیه مشابه است.
(۱) مشابه اثبات لم ۱۴.۱.۲.۲، داریم که

$$\begin{aligned}
&x \otimes (u+w) = (x, u+w) + H = \\
&(x,u) + H + (x,w) + H = \\
&x \otimes u + x \otimes w
\end{aligned}$$

(۵) در (۱) قرار می‌دهیم $u = w = \circ$ و در (۲) قرار می‌دهیم $x = y = \circ$. □

در لم زیر نمایش اعضای $M \otimes_R N$ را به دست می‌آوریم.

لم ۱۸.۱.۲.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول راست و N یک Rـ مدول چپ باشند. هر عضو $M \otimes_R N$ دارای نمایشی به شکل $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$ است که $k \geq 1$، $x_i \in M$ و $y_i \in N$.*

اثبات. طبق نمادهای قرار دادی، می‌دانیم که هر عضو $M \otimes_R N$ به صورت $\sum_{i=1}^{k} n_i(u_i, y_i) + H$ است که $k \geq 1$، $n_i \in \mathbb{Z}$، $u_i \in M$ و $y_i \in N$. اما طبق گزاره ۱۷.۱.۲.۲، داریم

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(u_i, y_i) + H = \sum_{i=1}^{k} n_i((u_i, y_i) + H) = \sum_{i=1}^{k} n_i(u_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i u_i \otimes y_i.$$

حال قرار می‌دهیم $n_i u_i = x_i \in M$ و اثبات کامل است. □

حال گزاره زیر داریم.

گزاره ۱۹.۱.۲.۲. *فرض کنیم M و M' دو Rـ مدول راست، N و N' دو Rـ مدول چپ باشند. اگر $f : M \longrightarrow M'$ و $g : N \longrightarrow N'$ دو Rـ همریختی مدولی باشند آنگاه یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی یکتا مانند*

$$f \otimes g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$$

وجود دارد که برای $x \in M$ و $y \in N$ داریم $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\alpha : M \times N \longrightarrow M' \otimes_R N', \ \ \alpha((x,y)) = f(x) \otimes g(y).$$

یک بررسی سر راست نشان می‌دهد که α یک نگاشت خوشتعریف (چرا؟) و Rــ دوخطی میانی است. برای مثال طبق گزاره ۲.۲.۱.۱۷، داریم

$$\begin{aligned}\alpha((xr,y)) = f(xr) \otimes g(y) = f(x)r \otimes g(y) = \\ f(x) \otimes rg(y) = f(x) \otimes g(ry) = \alpha((x,ry))\end{aligned}$$

اکنون نمودار زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ M \otimes_R N & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۲.۲.۱.۱۵، $M \otimes_R N$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ــ همریختی مانند $f \otimes g$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ M \otimes_R N \arrow[r, dashed, "f\otimes g"] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd} \qquad (\alpha = (f \otimes g)\lambda)$$

اما داریم

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (f \otimes g)\lambda((x,y)) = \alpha((x,y)) = f(x) \otimes g(y)$$

و اثبات کامل است. $\square$

اکنون نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۲.۱.۲۰. *فرض کنیم M و M' دو Rــ مدول راست، N و N' دو Rــ مدول چپ باشند. اگر $f : M \longrightarrow M'$ و $g : N \longrightarrow N'$ دو Rــ همریختی مدولی باشند آنگاه موارد زیر بر قراراند.*

(۱) $id_M \otimes id_N = id_{M \otimes_R N}$.

(۲) $f \otimes \circ = \circ \otimes g = \circ$.

(۳) *اگر $f' : M \longrightarrow M'$ و $g' : N \longrightarrow N'$ دو Rــ همریختی مدولی دیگر باشند آنگاه*

$$(f + f') \otimes g = (f \otimes g) + (f' \otimes g) \qquad f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$$

(۴) *اگر $f' : M' \longrightarrow M''$ و $g' : N' \longrightarrow N''$ دو Rــ همریختی مدولی باشند آنگاه*

$$(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g.$$

اثبات. از گزاره ۱۹.۱.۲.۲ استفاده می‌کنیم. چون اثبات‌ها مشابه هستند فقط یک مورد از (۳) و مورد (۴) را اثبات می‌کنیم. چون شکل عناصر $M \otimes_R N$ را از لم ۱۸.۱.۲.۲ می‌شناسیم و توابع فوق همه همریختی هستند، کافی است تساوی برای عناصر به شکل $x \otimes y$ بررسی شود (چرا؟).
حال برای (۳) داریم

$$\begin{aligned}
&[(f + f') \otimes g](x \otimes y) = (f + f')(x) \otimes g(y) = \\
&(f(x) + f'(x)) \otimes g(y) = f(x) \otimes g(y) + f'(x) \otimes g(y) = \\
&(f \otimes g)(x \otimes y) + (f' \otimes g)(x \otimes y)
\end{aligned}$$

و برای (۴)

$$\begin{aligned}
&(f' \otimes g')(f \otimes g)(x \otimes y) = (f' \otimes g')(f(x) \otimes g(y)) = \\
&f'f(x) \otimes g'f(y) = (f'f \otimes g'g)(x \otimes y)
\end{aligned}$$

و اثبات کامل است. □

گزاره ۲۱.۱.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد. اگر M و N دو Rـ مدول باشند در این صورت $M \otimes_R N$ با ضرب زیر یک Rـ مدول است.*

$$r.(\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes ry_i$$

اثبات. نشان می‌دهیم ضرب در اسکالر بالا خوشتعریف است. برای هر $x_i, x'_i \in M$، هر $y_i, y'_i \in N$ و هر $r \in R$ فرض کنیم

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{k'} x'_i \otimes y'_i.$$

اکنون برای $r \in R$، $\mathbb{Z}$ـ همریختی زیر را در نظر می‌گیریم

$$f_r : F \longrightarrow M \otimes_R N, \quad f_r(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{k} n_i(x_i \otimes ry_i).$$

اما $f_r(H) = 0$ است. زیرا f_r روی مولدهای H صفر می‌شود. برای مثال داریم

$$\begin{aligned}
&f_r((xs, y) - (x, sy)) = f_r((xs, y)) - f_r((x, sy)) = (xs \otimes ry) - (x \otimes rsy) = \\
&(x \otimes sry) - (x \otimes rsy) = (x \otimes sry) - (x \otimes sry) = 0
\end{aligned}$$

حال چون $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{k'} x'_i \otimes y'_i$ پس باید $\sum_{i=1}^{k}(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{k'}(x'_i, y'_i) \in H$ (چرا؟). در نتیجه $f_r(\sum_{i=1}^{k}(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{k'}(x'_i, y'_i)) = 0$. این نشان می‌دهد که

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes ry_i = \sum_{i=1}^{k'} x'_i \otimes ry'_i.$$

حال بررسی مدول بودن ساده است. □

تذکر ۲.۲.۱.۲۲. *اگر R حلقه جابجایی باشد آنگاه تمام لم، گزاره و قضیه‌های این بخش از $\mathbb{Z}$ قابل تعمیم به R هستند.*

مثال ۲.۲.۱.۲۳. *در این مثال می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. طبق لم ۲.۲.۱.۱۸، می‌دانیم که هر عنصر $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ به صورت $\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \otimes y_i$ است که $k \geq 1$، $\bar{x}_i \in \mathbb{Z}_n$ و $y_i \in \mathbb{Q}$. پس اگر نشان دهیم عناصری به صورت $\bar{x} \otimes y$ که $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ و $y \in \mathbb{Q}$ برابر صفر است کار تمام است. پس از گزاره ۲.۲.۱.۱۷، داریم*

$$\bar{x} \otimes y = \bar{x} \otimes \frac{n}{n} y = n\bar{x} \otimes \frac{1}{n} y = 0 \otimes \frac{1}{n} y = 0.$$

در مثال بعد یک روش محاسبه حاصل ضرب تنسوری را آموزش می‌دهیم. کلید اصلی، معرفی نگاشت دوخطی (میانی) مناسب است و سپس استفاده از گزاره ۲.۲.۱.۱۵، تعریف حاصل ضرب تنسوری و یا استفاده از گزاره ۱.۳.۱۹ است. البته همیشه محاسبه تنسور آسان نیست. در زیر بخش‌های بعدی بعضی قضایا کار را ساده می‌کنند.

مثال ۲.۲.۱.۲۴. *در این مثال می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. تابع $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ با ضابطه $f((x, y)) = xy$ را در نظر می‌گیریم. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که f نگاشت (تابع) $\mathbb{Z}$ـ دوخطی (میانی) است. به عنوان مثال داریم*

$$f((x + z, y)) = (x + z)y = xy + zy = f((x, y)) + f((z, y))$$

حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۲.۲.۱.۱۵، $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند g موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, dashed, "g"] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd} \qquad (f = g\lambda)$$

اما ضابطه g قابل محاسبه است. زیرا داریم

$$g(x \otimes y) = g\lambda((x, y)) = f((x, y)) = xy.$$

g پوشا است. زیرا برای هر $u \in \mathbb{Q}$ داریم

$$g(۱ \otimes u) = ۱ \times u = u.$$

g یک به یک است. زیرا اگر فرض کنیم $x \in Ker(g)$ آنگاه $x = \sum_{i=۱}^{k} u_i \otimes v_i$ است که $k \geq ۱$ و $u_i, v_i \in \mathbb{Q}$. اما داریم

$$g(x) = ۰ \ \Rightarrow \ g(\sum_{i=۱}^{k} u_i \otimes v_i) = ۰ \ \Rightarrow \ \sum_{i=۱}^{k} g(u_i \otimes v_i) = ۰ \ \Rightarrow \ \sum_{i=۱}^{k} u_i v_i = ۰.$$

با فرض $u_i = \frac{a_i}{b_i}$ و $v_i = \frac{a'_i}{b'_i}$ داریم $\sum_{i=۱}^{k} \frac{a_i a'_i}{b_i b'_i} = ۰$. از طرفی داریم

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=۱}^{k} u_i \otimes v_i = \sum_{i=۱}^{k} (\frac{a_i}{b_i}) \otimes (\frac{a'_i}{b'_i}) = \sum_{i=۱}^{k} (\frac{a_i b'_i}{b_i b'_i}) \otimes (\frac{a'_i}{b'_i}) = \\ \sum_{i=۱}^{k} (\frac{a_i}{b_i b'_i}) \otimes (\frac{a'_i b'_i}{b'_i}) = \sum_{i=۱}^{k} (\frac{a_i}{b_i b'_i}) \otimes a'_i = \sum_{i=۱}^{k} (\frac{a_i a'_i}{b_i b'_i}) \otimes ۱ = \\ ۰ \otimes ۱ = ۰ \end{aligned}$$

پس $ker(g) = ۰$ و طبق لم ۱.۳.۱۸، g یک به یک است و مسئله حل است.

تمرین‌ها

تمرین ۲.۲.۱.۲۵. فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد. لم، گزاره و قضیه‌های این قسمت را برای R بازنویسی و اثبات کنید.

تمرین ۲.۲.۱.۲۶. موارد باقیمانده نتیجه ۲.۲.۱.۲۰ را اثبات کنید.

تمرین ۲.۲.۱.۲۷. فرض کنیم M و N دو $\mathbb{Z}$ـ مدول یکانی متناهی مولد باشند. نشان دهید که $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ متناهی مولد است.

تمرین ۲.۲.۱.۲۸. فرض کنیم M گروه آبلی ($\mathbb{Z}$ـ مدول) باشد که مرتبه هر عضوش متناهی است. نشان دهید $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = ۰$.

تمرین ۲.۲.۱.۲۹. نشان دهید $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = ۰$.

تمرین ۲.۲.۱.۳۰. یک Rـ مدول راست M و یک Rـ مدول چپ N چنان مثال بزنید به طوری که $M \otimes_R N \neq M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

تمرین ۲.۲.۱.۳۱. یک Rـ مدول راست M و یک Rـ مدول چپ N چنان مثال بزنید به طوری که داشته باشیم $m \otimes n = m' \otimes n'$ ولی $m \neq m'$ و $n \neq n'$.

۲.۲.۲ قضیه‌های حاصل ضرب تنسوری و ارتباط تنسور با دنباله‌های دقیق

در ابتدای این زیر بخش می‌خواهیم بررسی کنیم چه زمانی حاصل ضرب تنسوری ساختاری مدولی پیدا می‌کند. البته موارد بررسی ما با شرایطی خاص همراه است.

گزاره ۱.۲.۲.۲. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. اگر M یک $(R-S)$ ـ دومدول و N یک S ـ مدول چپ باشد آنگاه $M\otimes_S N$ یک R ـ مدول چپ است. به ویژه ضرب در اسکالر آن به صورت زیر است.*

$$r.(\sum_{i=1}^{k} x_i\otimes y_i)=\sum_{i=1}^{k} rx_i\otimes y_i$$

اثبات. فرض کنیم $r\in R$ باشد. $\mathbb{Z}$ ـ همریختی زیر را در نظر می‌گیریم

$$f_r:M\longrightarrow M,\ \ f_r(m)=rm$$

و قرار می‌دهیم

$$f:R\longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(M\otimes_S N),\ \ f(r)=f_r\otimes id_N.$$

نشان می‌دهیم f یک همریختی حلقه‌ای است. زیرا با کمک گزاره ۱۹.۱.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned}&f(r+r')(x\otimes y)=(f_{r+r'}\otimes id_N)(x\otimes y)=f_{r+r'}(x)\otimes id_N(y)=\\&(r+r')x\otimes y=(rx+r'x)\otimes y=rx\otimes y+r'x\otimes y=\\&f_r(x)\otimes id_N(y)+f_{r'}(x)\otimes id_N=(f_r\otimes id_N)(x\otimes y)+(f_{r'}\otimes id_N)(x\otimes y)=\\&f(r)(x\otimes y)+f(r')(x\otimes y)=(f(r)+f(r'))(x\otimes y)\end{aligned}$$

یعنی $f(r+r')=f(r)+f(r')$. حال با کمک نتیجه ۲۰.۱.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned}&f(rr')(x\otimes y)=(f_{rr'}\otimes id_N)(x\otimes y)=f_{rr'}(x)\otimes id_N(y)=\\&(rr')x\otimes y=r(r'x)\otimes y=f_r(r's)\otimes y=f_rf_{r'}(x)\otimes y=\\&(f_rf_{r'}\otimes id_N)(x\otimes y)=(f_r\otimes id_N)(f_{r'}\otimes id_N)(x\otimes y)=\\&f(r)f(r')(x\otimes y)\end{aligned}$$

یعنی $f(rr')=f(r)f(r')$. پس f یک همریختی حلقه‌ای است. بنابراین طبق تمرین ۵.۸.۱، $N\otimes_S M$ یک R ـ مدول چپ است. طبق راه حل تمرین ۵.۸.۱، داریم

$$r.(\sum_{i=1}^{k} x_i\otimes y_i)=f(r)(\sum_{i=1}^{k} x_i\otimes y_i)=\sum_{i=1}^{k} rx_i\otimes y_i$$

و اثبات کامل است. □

گزاره ۲.۲.۲.۲. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. اگر M یک Rـ مدول راست و N یک $(R-S)$ـ دومدول باشد آنگاه $N \otimes_R M$ یک Sـ مدول راست است. به ویژه ضرب در اسکالر آن به صورت زیر است.*

$$(\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i).s = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i s$$

اثبات. فرض کنیم $s \in S$ باشد. $\mathbb{Z}$ـ همریختی زیر را در نظر می‌گیریم

$$f_s : N \longrightarrow N, \quad f_s(n) = ns$$

و قرار می‌دهیم

$$f : S \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N), \quad f(s) = id_M \otimes f_s.$$

f یک همریختی حلقه‌ای است (چرا؟). بنابراین طبق تمرین ۵.۸.۱، $N \otimes_R M$ یک Sـ مدول راست است. طبق راه حل تمرین ۵.۸.۱، داریم

$$(\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i).s = f(s)(\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i s$$

و اثبات کامل است. □

حال نتیجه زیر که معروف به خاصیت شرکت‌پذیری تنسور است را بیان و اثبات می‌کنیم.

نتیجه ۳.۲.۲.۲. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. اگر M یک Rـ مدول راست، N یک Sـ مدول چپ و T یک $(R-S)$ـ دومدول باشد آنگاه $M \otimes_R (T \otimes_S N) \cong_{\mathbb{Z}} (M \otimes_R T) \otimes_S N$.*

اثبات. قبل از اثبات دقت می‌کنیم که طبق گزاره ۱.۲.۲.۲، $T \otimes_S N$ یک Rـ مدول چپ است پس سمت چپ حکم از لحاظ حاصل ضرب تنسوری با معنی است. همچنین طبق گزاره ۲.۲.۲.۲، $M \otimes_R T$ یک Sـ مدول راست است پس سمت راست حکم از لحاظ حاصل ضرب تنسوری با معنی است. حال حکم را اثبات می‌کنیم. برای هر $n \in N$ تعریف می‌کنیم

$$f_n : M \times T \longrightarrow M \otimes_R (T \otimes_S N), \quad f_n((m,t)) = m \otimes (t \otimes n).$$

یک محاسبه سر راست نشان می‌دهد f_n یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است. حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd}
M \times T \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f_n"] & \\
M \otimes_R T & M \otimes_R (T \otimes_S N)
\end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $M \otimes_R T$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند $\bar{f}_n$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} M \times T \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f_n"] & \\ M \otimes_R T \arrow[r, dashed, "\bar{f}_n"] & M \otimes_R (T \otimes_S N) \end{tikzcd} \qquad (f_n = \bar{f}_n \lambda)$$

حال ضابطه $\bar{f}_n$ را روی مولدها (!) محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{f}_n(m \otimes t) = \bar{f}_n \lambda(m, t) = f_n((m, t)) = m \otimes (t \otimes n).$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$f : (M \otimes_R T) \times N \longrightarrow M \otimes_R (T \otimes_S N), \;\; f((m \otimes t), n)) = \bar{f}_n(m \otimes t).$$

یک محاسبه سر راست نشان می‌دهد f یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است. حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd} (M \otimes_R T) \times N \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ (M \otimes_R T) \otimes_S N & M \otimes_R (T \otimes_S N) \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $(M \otimes_R T) \otimes_S N$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند $\bar{f}$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} (M \otimes_R T) \times N \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ (M \otimes_R T) \otimes_S N \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & M \otimes_R (T \otimes_S N) \end{tikzcd} \qquad (f = \bar{f} \lambda)$$

حال ضابطه $\bar{f}$ را روی مولدها (!) محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{f}((m \otimes t) \otimes n) = \bar{f}\lambda((m \otimes t), n)) = f((m \otimes t), n)) = \bar{f}_n(m \otimes t) = m \otimes (t \otimes n).$$

به صورت مشابه می‌توانیم به یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی به شکل زیر دست پیدا کنیم

$$g : M \otimes_R (T \otimes_S N) \longrightarrow (M \otimes_R T) \otimes_S N, \;\; g(m \otimes (t \otimes n)) = (m \otimes t) \otimes n.$$

حال داریم $fg = id$ و $gf = id$. حال طبق گزاره ۱۹.۳.۱، g یکریختی است و اثبات کامل است. $\square$

در قضیه زیر ارتباط بین Hom و تنسور را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۲.۲. *(شرکت‌پذیری الحاقی) فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. اگر M یک Rـ مدول راست، N یک $(R-S)$ـ دومدول و T یک Sـ مدول راست باشند آنگاه*

$$Hom_S(M \otimes_R N, T) \cong_{\mathbb{Z}} Hom_R(M, Hom_S(N,T)).$$

اثبات. ابتدا دقت می‌کنیم که بر طبق گزاره ۷.۶.۱ و گزاره ۲.۲.۲.۲ طرفین حکم ساختار مدولی مناسب دارند. قرار می‌دهیم

$$\alpha : Hom_S(M \otimes_R N, T) \longrightarrow Hom_R(M, Hom_S(N,T))$$

که در آن برای هر

$$f : M \otimes_R N \longrightarrow T$$

داریم

$$[\alpha(f)(m)](n) = f(m \otimes n).$$

دقت شود که $\alpha(f)(m)$ عضوی از $Hom_S(N,T)$ است. همچنین $\alpha(f)$ یک Rـ همریختی مدولی از M به $Hom_S(N,T)$ است. اثبات این که α همریختی یک به یک و پوشا است به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

قضیه زیر اهمیت بسیار زیادی دارد و بعضی مواقع محاسبه تنسور را ساده می‌کند.

قضیه ۵.۲.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه و I ایده‌آل راست از R باشد. اگر M یک Rـ مدول چپ باشد آنگاه $(R/I) \otimes_R M \cong_{\mathbb{Z}} M/IM$.*

اثبات. نگاشت خوشتعریف (چرا؟) زیر را در نظر می‌گیریم

$$f : R/I \times M \longrightarrow M/IM, \quad f((r+I, m)) = rm + IM.$$

با یک بررسی ساده f نگاشتی Rـ دوخطی میانی است (چرا؟). حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd} R/I \times M \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ R/I \otimes_R M & M/IM \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $(R/I) \otimes_R M$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند $\bar{f}$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} R/I \times M \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ R/I \otimes_R M \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & M/IM \end{tikzcd} \qquad (f = \bar{f}\lambda)$$

حال ضابطه $\bar{f}$ را روی مولدها (!) محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{f}((r+I)\otimes m)=\bar{f}\lambda((r+I,m))=f((r+I,m))=rm+IM.$$

$\bar{f}$ یک همریختی پوشا است. زیرا اگر $m+IM\in M/IM$ عضوی دلخواه باشد آنگاه داریم $\bar{f}((۱+I)\otimes m)=۱m+IM=m+IM$. نشان می‌دهیم $\bar{f}$ یک به یک است. فرض کنیم که $\bar{f}(\sum_{i=۱}^{k}(r_i+I)\otimes m_i)=۰$. پس $\sum_{i=۱}^{k}r_im_i+IM=۰$ یا به صورت معادل $\sum_{i=۱}^{k}r_im_i+\in IM$. یعنی $\sum_{i=۱}^{k}r_im_i=\sum_{i=۱}^{t}a_im'_i$ که $a_i\in I$ و $m'_i\in M$. اکنون داریم

$$\sum_{i=۱}^{k}(r_i+I)\otimes m_i=\sum_{i=۱}^{k}(۱+I)r_i\otimes m_i=\sum_{i=۱}^{k}(۱+I)\otimes r_im_i=$$
$$(۱+I)\otimes(\sum_{i=۱}^{k}r_im_i)=(۱+I)\otimes(\sum_{i=۱}^{t}a_im'_i)=$$
$$\sum_{i=۱}^{t}(۱+I)\otimes a_im_i=\sum_{i=۱}^{t}(۱+I)a_i\otimes m_i=$$
$$\sum_{i=۱}^{t}(a_i+I)\otimes m_i=\sum_{i=۱}^{t}۰\otimes a_im_i=۰$$

یعنی $Ker(\bar{f})=۰$ و طبق لم ۱.۳.۱۸، یک به یک بودن و در نتیجه یکریختی بودن $\bar{f}$ به دست می‌آید. $\square$

یک کاربرد قضیه بالا را در مثال زیر مشاهده می‌کنید.

مثال ۲.۲.۲.۶. *فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند. اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n برابر d باشد، نشان می‌دهیم که $\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_d$. طبق قضیه ۲.۲.۲.۵، داریم*

$$\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m\cong_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m/(n\mathbb{Z})\mathbb{Z}_m\cong_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/((n\mathbb{Z})(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$$
$$\cong_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/((n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z})/m\mathbb{Z})\cong_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_d.$$

دقت شود که از قضیه سوم یکریختی نیز استفاده شده است. واضح است که اگر $d=۱$ آنگاه داریم $\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m=۰$.

قضیه زیر نیز گاهی کار را ساده می‌کند.

قضیه ۲.۲.۲.۷. *فرض کنیم R حلقه یکدار، M یک Rــ مدول چپ و N یک Rــ مدول راست باشد. در این صورت داریم*
(۱) $R\otimes_R M\cong_R M$.
(۲) $N\otimes_R R\cong_R N$.

اثبات. فقط (۱) را اثبات می‌کنیم، (۲) مشابه است. دقت شود که R یک $(R-R)$ـ دومدول است و سمت چپ حکم ساختار Rـ مدولی چپ دارد (چرا؟). نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$f: R\times M \longrightarrow M, \;\; f((r,m)) = rm.$$

f یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است (چرا؟). حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd} R\times M \arrow[d, "\lambda"] \arrow[drr, "f"] & & \\ R\otimes_R M & & M \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۲.۲.۱.۱۵، $R\otimes_R M$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند $\bar{f}$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} R\times M \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ R\otimes_R M \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & M \end{tikzcd} \qquad\qquad (f=\bar{f}\lambda)$$

حال ضابطه $\bar{f}$ را روی مولدها (!) محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{f}(r\otimes m) = \bar{f}\lambda((r,m)) = f((r,m)) = rm.$$

اکنون می‌توانیم ببینیم که $\bar{f}$ یک Rـ همریختی مدولی است. زیرا f یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی است پس کافی است نشان دهیم که

$$f(s.(r\otimes m)) = f(sr\otimes m) = srm = s(rm) = sf(r\otimes m).$$

حال نگاشت

$$\bar{g}: M \longrightarrow R\otimes_R M, \;\; \bar{g}(m) = ۱\otimes m$$

یک Rـ همریختی مدولی است (چرا؟). از طرفی $\bar{f}\bar{g} = id_M$ و $\bar{g}\bar{f} = id_{R\otimes_R M}$. طبق گزاره ۱.۳.۱۹، $\bar{f}$ یکریختی است. $\square$

قضیه ۲.۲.۲.۸. *فرض کنیم R حلقه، M یک Rـ مدول راست و N یک Rـ مدول چپ باشند. اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های راست و $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های چپ باشد آنگاه داریم*

(۱) $M\otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i) \cong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in I}(M\otimes_R N_i)$.

(۲) $(\bigoplus_{i\in I} M_i)\otimes_R N \cong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes_R N)$.

اثبات. مورد (۱) را اثبات می‌کنیم، (۲) مشابه است. ابتدا تذکر می‌دهیم که λ_i همان Rـ همریختی مدولی است که در بخش سوم از فصل اول معرفی شد و λ همان نگاشت معروف این بخش است که برای تنسور استفاده می‌کنیم. نموداری به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "id_M \otimes \lambda_i"] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i) \\ M \otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i) & \end{tikzcd}$$

طبق قضیه ۱۱.۶.۱، Rـ همریختی مدولی یکتایی مانند

$$f : \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i) \longrightarrow M \otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i)$$

وجود دارد که برای هر $i \in I$ نمودار بالا جابجایی است، یعنی

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "id_M \otimes \lambda_i"] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i) \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M \otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i) & \end{tikzcd} \qquad id_M \otimes \lambda_i = f\lambda_i$$

اکنون ضابطه f را حساب می‌کنیم. برای این منظور کافی است اثر f را روی عناصری به شکل

$$(x \otimes y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i)$$

مشخص کنیم (چرا؟).

حال داریم

$$f((x \otimes y_i)_{i\in I}) = f(\sum_{i\in I}(..., \circ, ..., \circ, \overbrace{x \otimes y_i}^{\text{محل } i \text{ ام}}, \circ, ..., \circ, ...)) =$$

$$\sum_{i\in I} f((..., \circ, ..., \circ, \overbrace{x \otimes y_i}^{\text{محل } i \text{ ام}}, \circ, ..., \circ, ...)) =$$

$$\sum_{i\in I} f\lambda(x \otimes y_i) = \sum_{i\in I}(id_M \otimes \lambda_i)(x \otimes y_i) = \sum_{i\in I} id_M(x) \otimes \lambda_i(y_i) =$$

$$\sum_{i\in I}((x \otimes (..., \circ, ..., \circ, \overbrace{y_i}^{\text{محل } i \text{ ام}}, \circ, ..., \circ, ...)) =$$

$$x \otimes (\sum_{i\in I}(..., \circ, ..., \circ, \overbrace{y_i}^{\text{محل } i \text{ ام}}, \circ, ..., \circ, ...)) = x \otimes ((y_i)_{i\in I})$$

حال تابع

$$g : M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i), \quad g(m, (n_i)_{i\in I}) = (m \otimes n_i)_{i\in I}$$

Rـ دوخطی میانی است (چرا؟). نمودار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "g"] & \\ M \otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i) & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i) \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $M \otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i)$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند $\bar{g}$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} M \times (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "g"] & \\ M \otimes_R (\bigoplus_{i\in I} N_i) \arrow[r, dashed, "\bar{g}"] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i) \end{tikzcd} \qquad (g = \bar{g}\lambda)$$

$\bar{g}$ دارای ضابطه زیر روی مولدها است

$$\bar{g}(m \otimes (n_i)_{i\in I}) = \bar{g}\lambda((m, (n_i)_{i\in I})) = g((m, (n_i)_{i\in I})) = (m \otimes n_i)_{i\in I}.$$

حال $\bar{g}f = id$ و $f\bar{g} = id$. پس طبق گزاره ۱۹.۳.۱، f یکریختی است. □

تذکر ۱.۲.۲. *مشابه قضیه ۸.۲.۲.۲، برای حاصل ضرب صحیح نیست (چرا؟).*

قضیه زیر ارتباط تنسور را با دنباله‌های دقیق نشان می‌دهد.

قضیه ۹.۲.۲.۲. *موارد زیر برقراراند.*
(۱) *فرض کنیم M، N و K سه Rـ مدول راست و*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow \circ$$

دنباله دقیق باشد. در این صورت برای هر Rـ مدول چپ U دنباله

$$M \otimes_R U \xrightarrow{f \otimes id_U} N \otimes_R U \xrightarrow{g \otimes id_U} K \otimes_R U \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌های مدولی است.
(۲) *فرض کنیم M، N و K سه Rـ مدول چپ و*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow \circ$$

دنباله دقیق باشد. در این صورت برای هر Rـ مدول راست T دنباله

$$T \otimes_R M \xrightarrow{id_T \otimes f} T \otimes_R N \xrightarrow{id_T \otimes g} T \otimes_R K \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌های مدولی است.

اثبات. مورد (۱) را اثبات می‌کنیم، مورد (۲) مشابه است. برای اثبات (۱) باید نشان دهیم که $Im(g \otimes id_U) = K \otimes_R U$ و $Im(f \otimes id_U) = Ker(g \otimes id_U)$ است. فرض کنیم $\sum_{i=۱}^{t} k_i \otimes u_i$ عضوی دلخواه از $K \otimes_R U$ باشد (لم ۱۸.۱.۲.۲). چون g پوشا است پس برای هر i عنصر $n_i \in N$ چنان وجود دارد که $g(n_i) = k_i$. اما داریم

$$(g \otimes id_U)(\sum_{i=۱}^{t} n_i \otimes u_i) = \sum_{i=۱}^{t} g(n_i) \otimes id_U(u_i) = \sum_{i=۱}^{t} k_i \otimes u_i$$

پس $Im(g \otimes id_U) = K \otimes_R U$.
از طرفی طبق نتیجه ۲۰.۱.۲.۲ داریم

$$(g \otimes id_U)(f \otimes id_U) = gf \otimes id_U = \circ \otimes id_U = \circ$$

پس $Im(f \otimes id_U) \subseteq Ker(g \otimes id_U)$. به علاوه همین مطلب سبب می‌شود که Rـ همریختی خوشتعریف زیر القا شود (چرا؟)

$$\begin{cases} \overline{g \otimes id_U} : \frac{N \otimes_R U}{Im(f \otimes id_U)} \longrightarrow K \otimes_R U \\ \qquad \overline{g \otimes id_U}((n \otimes u) + Im(f \otimes id_U)) = (g \otimes id_U)(n \otimes u) \end{cases}$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases}\alpha : K \times U \longrightarrow \frac{N\otimes_R U}{Im(f\otimes id_U)} \\ \qquad \alpha((k,u)) = (n \otimes u) + Im(f \otimes id_U)\end{cases}$$

که در آن n از پوشایی g به دست می‌آید یعنی $g(n) = k$. α خوشتعریف است. زیرا اگر $g(n) = k = g(n')$ آنگاه $n - n' \in Ker(g) = Im(f)$. پس $n - n' = f(m)$ که $m \in M$. در نتیجه

$$(f \otimes id_U)(m \otimes u) = f(m) \otimes id_U(u) = (n - n') \otimes u \in Im(f \otimes id_U)$$

و این نشان می‌دهد که $n \otimes u - [n' \otimes u] \in Im(f \otimes id_U)$ و بنابراین

$$(n \otimes u) + Im(f \otimes id_U) = (n' \otimes u) + Im(f \otimes id_U).$$

با یک بررسی سر راست α یک نگاشت Rـ دوخطی میانی است (چرا؟). حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} K \times U \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ K \otimes_R U & \frac{N\otimes_R U}{Im(f\otimes id_U)} \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $K \otimes_R U$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند $\bar{\alpha}$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} K \times U \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ K \otimes_R U \arrow[r, dashed, "\bar{\alpha}"] & \frac{N\otimes_R U}{Im(f\otimes id_U)} \end{tikzcd} \qquad (\alpha = \bar{\alpha}\lambda)$$

اما $\bar{\alpha}$ روی مولدها به صورت زیر عمل می‌کند

$$\bar{\alpha}(k \otimes u) = \bar{\alpha}\lambda((k,u)) = \alpha((k,u)) = (n \otimes u) + Im(f \otimes id_U).$$

این نشان می‌دهد که $\bar{\alpha}\overline{g \otimes id_U} = id$ و $\overline{g \otimes id_U}\bar{\alpha} = id$. پس اگر $x \in Ker(g \otimes id_U)$ آنگاه $(g \otimes id_U)(x) = ۰$ و در نتیجه $\overline{g \otimes id_U}(x + Im(f \otimes id_U)) = ۰$. این نشان می‌دهد که

$$۰ = \bar{\alpha}\overline{g \otimes id_U}(x + Im(f \otimes id_U)) = id(x + Im(f \otimes id_U)) = x + Im(f \otimes id_U)$$

پس $x \in Im(f \otimes id_U)$. بنابراین $Ker(g \otimes id_U) \subseteq Im(f \otimes id_U)$ و اثبات کامل است. $\square$

قضیه ۹.۲.۲.۲، نشان می‌دهد که تنسور از راست به صورت دقیق عمل می‌کند. به عبارت دیگر تنسور با اثر روی یک دنباله دقیق کوتاه، فقط پوشایی را حفظ می‌کند. مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی تنسور از چپ به صورت دقیق عمل نمی‌کند. به عبارت دیگر در یک دنباله دقیق کوتاه، یک به یکی حفظ نمی‌شود.

مثال ۲.۲.۲. *دنباله دقیق کوتاه زیر را در نظر می‌گیریم.*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f(x)=3x} \mathbb{Z} \xrightarrow{g(y)=\bar{y}} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

حال $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} -$ را روی دنباله دقیق کوتاه بالا اثر می‌دهیم و داریم

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{id\otimes f} \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{id\otimes g} \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

اما

$$(id \otimes f)(\bar{1} \otimes 1) = \bar{1} \otimes 3 = \bar{3} \otimes 1 = \bar{0} \otimes 1 = 0$$

اگر $\bar{1} \otimes 1 = 0$ باشد آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که (برای هر مولد) $\bar{x} \otimes y = 0$ است (چرا؟) و در نتیجه $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ برابر صفر است (چرا؟). اما طبق قضیه ۷.۲.۲.۲، داریم $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$ و این تناقض است. پس $\bar{1} \otimes 1 \neq 0$ و در نتیجه $Ker(id \otimes f) \neq 0$. پس $id \otimes f$ یک به یک نیست و بنابراین تنسور یک به یکی را در حالت کلی حفظ نمی‌کند.

تذکر ۱۰.۲.۲.۲. *اگر R حلقه جابجایی (یکدار) باشد آنگاه تمام لم، گزاره و قضیه‌های این بخش از $\mathbb{Z}$ قابل تعمیم به R هستند.*

این بخش را با نتیجه جالب زیر پایان می‌دهیم. نتیجه زیر نشان می‌دهد که مدول آزاد روی یک حلقه جابجایی دارای پایایی بعد است (تذکر ۲۴.۱.۲ را ببینید).

نتیجه ۱۱.۲.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت هر دو پایه Rـ مدول آزاد M عدد اصلی برابر دارند.*

اثبات. فرض کنیم X و X' دو پایه برای Rـ مدول آزاد M باشند. طبق قضیه ۲۶.۱.۲، داریم

$$\bigoplus_{|X|} R = R^{(X)} \cong_R M \cong_R R^{(X')} = \bigoplus_{|X'|} R.$$

از طرفی طبق نتیجه ۴۰.۲.۱، R دارای ایده‌آل ماکسیمال مانند $\mathcal{M}$ است و در نتیجه $R/\mathcal{M}$ میدان است. حال طبق تذکر ۱۰.۲.۲.۲، قضیه ۸.۲.۲.۲ و قضیه ۷.۲.۲.۲ داریم

$$(R/\mathcal{M}) \otimes_R M \cong_R (R/\mathcal{M}) \otimes_R (\bigoplus_{|X|} R) \cong_R \bigoplus_{|X|}[(R/\mathcal{M}) \otimes_R R] \cong_R \bigoplus_{|X|} R/\mathcal{M}.$$

به صورت مشابه داریم

$$(R/\mathcal{M}) \otimes_R M \cong_R \bigoplus_{|X'|} R/\mathcal{M}$$

این نشان می‌دهد که $\bigoplus_{|X'|} R/\mathcal{M} \cong_R \bigoplus_{|X|} R/\mathcal{M}$. اکنون طبق لم ۱۱.۴.۱، داریم

$$\bigoplus_{|X|} R/\mathcal{M} \cong_{R/\mathcal{M}} \bigoplus_{|X'|} R/\mathcal{M}.$$

اما $R/\mathcal{M}$ میدان است و فضاهای برداری روی میدان پایایی بعد دارند، پس نتیجه می‌شود که $|X|=|X'|$. $\square$

تمرین‌ها

تمرین ۱۲.۲.۲.۲. *خاصیت جابجایی تنسور را به صورت دقیق بنویسید و اثبات کنید.*

تمرین ۱۳.۲.۲.۲. *اثبات‌هایی که در متن کامل نشده‌اند را کامل نمایید.*

تمرین ۱۴.۲.۲.۲. *حلقه جابجایی یکدار R را موضعی گوییم هرگاه دقیقا یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. فرض کنیم R موضعی باشد. برای Rـ مدول‌های متناهی مولد M و N نشان دهید که $M \otimes N = 0$ اگر و تنها اگر $M = 0$ یا $N = 0$. آیا شرط موضعی قابل حذف است؟*

تمرین ۱۵.۲.۲.۲. *نشان دهید که $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$.*

تمرین ۱۶.۲.۲.۲. *برای حلقه جابجایی یکدار R و ایده‌آل‌های I و J نشان دهید*

$$(R/I) \otimes_R (R/J) \cong_R R/(I+J)$$

تمرین ۱۷.۲.۲.۲. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول روی حلقه جابجایی و یکدار R باشند. نشان دهید که اگر M و N ساده و غیر یکریخت باشند آنگاه $M \otimes_R N = 0$.*

تمرین ۱۸.۲.۲.۲. *نشان دهید که اگر R حلقه جابجایی باشد آنگاه $R[x] \otimes_R R[y] \cong_R R[x,y]$.*

۳.۲ مدول‌های نیمساده

فرض کنیم V یک Fـ فضای برداری باشد. فرض کنیم U زیرفضای دلخواه از V باشد. U دارای یک پایه است. پایه U را به V گسترش می‌دهیم. اعضایی از پایه V که از گسترش به دست آمده‌اند را در نظر می‌گیریم. این اعضا تشکیل زیرفضای مانند W می‌دهند. واضح است که $W \cap U = 0$ و $V = W \oplus U$. این نشان می‌دهد که در هر فضای برداری برای هر زیرفضای U زیرفضای V چنان وجود دارد که $V = U \oplus V$.

با توجه به این که فضاهای برداری تعمیمی از مدول‌ها هستند، این سوال به ذهن می‌اید که آیا برای هر مدول M و هر زیرمدول N از M زیرمدول L وجود دارد که $M = N \oplus L$؟

اما جواب این سوال در حالت کلی منفی است. برای مثال $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_4$ خاصیت بالا را ندارد (چرا؟).

در این بخش به معرفی مدول‌های می‌پردازیم که خاصیت مطرح شده در سوال بالا را داشته باشند و آنها را مدول‌های نیمساده می‌نامیم. دلیل این نام گذاری مطلبی است که در ادامه اثبات خواهیم کرد و آن این است که هر مدول نیمساده جمع مستقیمی از مدول‌های ساده است.

این بخش به مطالعه مختصر از مدول‌های نیمساده می‌پردازد. در نظریه حلقه و مدول مفهوم نیمساده جایگاه ویژه دارد. مهمترین قضیه جبر مجرد یعنی قضیه ودربرن‌ـ آرتین مربوط به همین مفهوم است. البته ما در این بخش به قضیه ودربرن‌ـ آرتین نخواهیم پرداخت و در درس نظریه حلقه به طور مفصل در مورد این قضیه و نتایج آن بحث خواهد شد. هدف این بخش آشنایی مختصری با مفهوم نیمساده است.

با تعریف زیر کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. *گوییم Rـ مدول چپ M نیمساده است هرگاه هر زیرمدول آن جمعوند باشد، یعنی برای هر $N \leq M$ زیرمدول K چنان باشد که $M = N \oplus K$.*

تعریف ۲.۳.۲. *گوییم حلقه R نیمساده چپ است هرگاه مدول ${}_RR$ نیمساده باشد. حلقه نمیساده راست به صورت مشابه تعریف می‌شود.*

مثال ۳.۳.۲. *هر Rـ مدول چپ ساده، یک مدول نیمساده است.*

مثال ۴.۳.۲. *هر حلقه تقسیم D یک حلقه نمیساده چپ (راست) است.*

مثال ۵.۳.۲. *مدول ۰ را یک Rـ مدول چپ نیمساده حساب می‌کنیم.*

مثال ۶.۳.۲. *هر Fـ فضای برداری V یک مدول نیمساده است.*

مثال ۷.۳.۲. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ نیمساده نیست. در واقع $\mathbb{Z}$ حلقه نیمساده نیست.*

مثال ۸.۳.۲. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_4$ نیمساده نیست.*

تذکر ۹.۳.۲. *قضیه ودربرن‌ـ آرتین در مورد حلقه‌های نیمساده است. این قضیه مهمترین قضیه ساختاری جبر است که به صورت کاملا دقیق توصیفی از حلقه نیمساده ارائه می‌کند. این قضیه نشان می‌دهد که حلقه‌های نیمساده چپ نیمساده راست نیز می‌باشد و برعکس. بعلاوه نشان می‌دهد که حلقه نیمساده چیزی نیست جز حاصل ضرب ماتریس‌های مربعی با درایه‌هایی از حلقه‌های تقسیم. جزییات، اثبات و نتایج این قضیه ساختاری را در درس نظریه حلقه خواهید دید.*

در ادامه برخی خواص مدول‌های نیمساده را بررسی می‌کنیم و سپس مثال‌های متفاوتی ارائه می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۳.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ نیمساده باشد. در این صورت*
(۱) هر زیرمدول N از M نیمساده است.
(۲) هر مدول خارج قسمتی M/K نیمساده است.

اثبات. (۱) فرض کنیم N' زیرمدولی از N باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که N' جمعوند N است. چون $N' \leq M$ و M نیمساده است پس $M = N' \oplus L$ که L زیرمدولی از M است. حال طبق گزاره ۱۶.۲.۱، قانون مدولی، داریم

$$N = N \cap M = N \cap (N' \oplus L) = (N \cap N') \oplus (N \cap L) = N' \oplus (N \cap L).$$

این نشان می‌دهد که N' جمعوندی از N است.
(۲) می‌دانیم که هر زیرمدول M/K به صورت N/K است که N زیرمدولی از M شامل K است (چرا؟). چون M نیمساده است پس $M = N \oplus N'$ که $N' \leq M$. حال داریم

$$M/K = (N/K) \oplus ((N' + K)/K).$$

پس طبق تعریف M/K نیمساده است. $\square$

مثال ۱۱.۳.۲. *واضح است که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_۲$ نیمساده است. در حالی که نه $\mathbb{Z}$ و نه $۲\mathbb{Z}$ نمیساده نیستند.*

لم زیر نشان می‌دهد که هر مدول نیمساده ناصفر، دارای دست کم یک زیرمدول ساده است.

لم ۱۲.۳.۲. *هر Rـ مدول چپ نیمساده M شامل زیرمدولی ساده است.*

اثبات. فرض کنیم $M \ni x \neq ۰$. واضح است که Rx زیرمدولی ناصفر و تولید متناهی (دوری) است. پس طبق قضیه ۳۹.۲.۱، Rx دارای زیرمدول ماکسیمالی مانند N می‌باشد. اما طبق گزاره ۱۰.۳.۲، Rx نیمساده است. در نتیجه $Rx = N \oplus N'$ که $N' \leq Rx$. واضح است که $N' \leq M$ و $N' \cong Rx/N$ (چرا؟). چون N زیرمدول ماکسیمال از Rx است پس N' ساده است (چرا؟) و اثبات کامل است. $\square$

قضیه زیر برای ادامه کار اهمیت ویژه‌ای دارد.

قضیه ۱۳.۳.۲. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـ مدول‌های چپ ساده باشد. به علاوه فرض کنیم $M = \sum_{i \in I} M_i$ و $K \leq M$. در این صورت اندیس گذار $J \subseteq I$ چنان وجود دارد که $M = K \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j)$.*

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{L \subseteq I \mid (\sum_{l \in L} M_l) \cap K = ۰, \text{ مجموع مستقیم است } \sum_{l \in L} M_l\}.$$

چون $\emptyset \in \mathcal{A}$، پس $\mathcal{A}$ ناتهی است. $\mathcal{A}$ با رابطه شمول یک مجموعه جزئا مرتب است (چرا؟). حال زنجیر $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ در $\mathcal{A}$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $J' = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} L_\alpha$. ادعا می‌کنیم $J' \in \mathcal{A}$. چون برای هر $\alpha \in \Gamma$، داریم $L_\alpha \subseteq I$ پس واضح است که $J' \subseteq I$. حال فرض کنیم

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \dots + x_{\alpha_t} = 0$$

که $x_{\alpha_s} \in M_{\alpha_s}$ و $\alpha_s \in L_{\alpha_s}$. چون $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ زنجیر است پس L_{α_t} چنان وجود دارد که همه α_sها در L_{α_t} قرار می‌گیرند. اما L_{α_t} عضو $\mathcal{A}$ است. پس $\sum_{l\in L_{\alpha_t}} M_l$ مجموع مستقیم است. حال طبق قضیه ۱۳.۲.۱، باید

$$x_{\alpha_1} = x_{\alpha_2} = \dots = x_{\alpha_t} = 0.$$

پس طبق قضیه ۱۳.۲.۱، $\sum_{j\in J'} M_j$ مجموع مستقیم است. از طرفی اگر $x \in (\sum_{j\in J'} M_j) \cap K$ آنگاه

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_t} = x \in K.$$

که $x_{j_s} \in M_{j_s}$. چون $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ زنجیر است، پس L_{α_t} چنان وجود دارد که همه j_sها در L_{α_t} قرار می‌گیرند. اما L_{α_t} عضو $\mathcal{A}$ است. پس باید $x = 0$ و این یعنی $(\sum_{j\in J'} M_j) \cap K = 0$. در نتیجه $J' \in \mathcal{A}$. حال طبق لم زرن، $\mathcal{A}$ دارای عضو ماکسیمالی مانند J است.

اکنون ادعا می‌کنیم $M = K \oplus (\bigoplus_{j\in J} M_j)$. فرض کنیم $N = K \oplus (\bigoplus_{j\in J} M_j)$. اگر برای یک اندیس $i \in I$، داشته باشیم $N \cap M_i = 0$ آنگاه داریم $J \subsetneq J \cup \{i\} \in \mathcal{A}$ (چرا؟). این در تناقض با ماکسیمال بودن J در $\mathcal{A}$ است. پس برای هر $i \in I$ داریم $N \cap M_i \neq 0$. اما برای هر $i \in I$، $N \cap M_i \leq M_i$. چون M_i ساده است پس $M_i = N \cap M_i$. یعنی برای هر $i \in I$ داریم $M_i \subseteq N$. در نتیجه $M = \sum_{i\in I} M_i \subseteq N$. این نشان می‌دهد که $M = N$ و اثبات کامل است. □

نتیجه ۱۴.۳.۲. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـ مدول‌های چپ ساده باشد. به علاوه فرض کنیم $M = \sum_{i\in I} M_i$. در این صورت اندیس گذار $J \subseteq I$ چنان وجود دارد که داریم $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$.*

اثبات. کافی است در قضیه ۱۳.۳.۲، قرار دهیم $K = 0$. □

نتیجه ۱۵.۳.۲. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـ مدول‌های چپ ساده باشد. به علاوه فرض کنیم $M = \sum_{i\in I} M_i$ و $N \leq M$. در این صورت اندیس گذار $J \subseteq I$ چنان وجود دارد که داریم $N \cong \bigoplus_{j\in J} M_j$.*

اثبات. طبق قضیه ۱۳.۳.۲، $M = N \oplus (\bigoplus_{j\in J'} M_j)$ که $J' \subseteq I$. از طرفی طبق نتیجه ۱۵.۳.۲، داریم $M = \bigoplus_{j\in J''} M_j$ که $J'' \subseteq I$. پس

$$N \cong M/\bigoplus_{j\in J'} M_j = \bigoplus_{j\in J} M_j/\bigoplus_{j\in J'} M_j \cong \bigoplus_{j\in J'\setminus J''} M_j$$

و اثبات کامل است. □

قضیه زیر راه را برای ساختن مثال از مدول‌های نیمساده نشان می‌دهد و یک مشخصه سازی از مدول‌های نیمساده ارائه می‌کند. این قضیه نشان می‌دهد که برای ساختن یک مدول نیمساده روی حلقه R کافی است مدول‌های ساده روی R را بشناسید. به علاوه این قضیه توجیهی برای نام گذاری نیمساده ارائه می‌کند.

قضیه ۱۶.۳.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ناصفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) *M نیمساده است.*

(۲) *M جمع عادی زیرمدول‌های ساده خود است.*

(۳) *M جمع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده خود است.*

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده تمام زیرمدول‌های ساده M باشد. این خانواده ناتهی است زیرا M نیمساده است پس طبق لم ۱۲.۳.۲، M دارای زیرمدول ساده است. قرار می‌دهیم $N=\sum_{i\in I} M_i$. چون M نیمساده است پس $M=N\oplus N'$ که $N'\leq M$. نشان می‌دهیم $N'=0$. اگر N' صفر نباشد آنگاه چون طبق گزاره ۱۰.۳.۲، N' نیمساده است، از لم ۱۲.۳.۲، دارای زیرمدول ساده K است. این نشان می‌دهد که $0\neq K\subseteq N\cap N'$. این تناقض آشکار است. پس $N'=0$ و در نتیجه $M=N=\sum_{i\in I} M_i$.

(۲) $\Leftarrow$ (۳). نتیجه ۱۴.۳.۲ چیزی برای اثبات باقی نمی‌گذارد.

(۳) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنیم $M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ که M_iها ساده هستند. فرض کنیم $N\leq M$. نشان می‌دهیم N جمعوند است. طبق قضیه ۱۳.۳.۲، اندیس گذار $J\subseteq I$ چنان وجود دارد که $M=N\oplus(\bigoplus_{j\in J} M_j)$. این یعنی N جمعوند است و اثبات کامل است. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که مدول‌های نیمساده دسته جدیدی از مدول‌ها است که متفاوت مدول‌های از قبل معرفی شده است.

مثال ۱۷.۳.۲. *طبق قضیه ۱۶.۳.۲، $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3$ نیمساده است در حالی که آزاد نیست (چرا؟). $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ آزاد است و نیمساده نیست.*

تمرین‌ها

تمرین ۱۸.۳.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد و $N\leq M$ که N و M/N نیمساده هستند. آیا M نیمساده است؟*

تمرین ۱۹.۳.۲. *تمام $\mathbb{Z}$ـ مدول‌های نیمساده را شناسایی کنید. سپس نتیجه بگیرید که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}$ نمی‌تواند نیمساده باشد.*

تمرین ۲۰.۳.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ساده و R حلقه جابجایی باشد. نشان دهید که $End_R(M)$ یک میدان است.*

تمرین ۲۱.۳.۲. *نشان دهید که هیچ خارج قسمتی از $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}$ نمی‌تواند ساده باشد.*

تمرین ۲۲.۳.۲. *اگر M یک مدول نیمساده باشد که $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i=M=\bigoplus_{i=j}^{m} M_j$ آنگاه نشان دهید که $m=n$ و هر M_i با یک و دقیقا یک M_j یکریخت است.*

تمرین ۲.۳.۲۳. *نشان دهید که هر Rـ مدول چپ M نیمساده است اگر و تنها اگر هر زیرمدول دوری از M نیمساده باشد.*

تمرین ۲.۳.۲۴. *نشان دهید که هر Rـ مدول چپ متناهی تولید M که نیمساده است جمع مستقیم تعداد متناهی مدول ساده است.*

۴.۲ مدول‌های تصویری

فرض کنیم Fــ فضای برداری V را در اختیار داریم و نموداری به صورت

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "f"] & \\ U \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

به ما داده شده است که U و W دو Fــ فضای برداری هستند. همواره می‌توانیم یک Fــ همریختی از V به U بسازییم که نمودار بالا را جابجایی کند. برای ساخت چنین همریختی، فرض می‌کنیم که $\{v_i\}_{i\in I}$ یک پایه برای V باشد. چون g پوشا است و $f(v_i) \in W$ پس عنصر $u_i \in U$ چنان وجود دارد که $g(u_i) = f(v_i)$. حال قرار می‌دهیم $h : V \longrightarrow U$ با ضابطه $h(v_i) = u_i$. واضح است که h یک تابع است پس طبق گزاره ۲۲.۱.۲، می‌توانیم h را به یک Fــ همریختی مانند $\bar{h} : V \longrightarrow U$ گسترش دهیم. حال برای هر v_i داریم

$$f(v_i) = g(u_i) = gh(v_i) = g\bar{h}(v_i).$$

چون f و $g\bar{h}$ روی مولدها یکسان هستند پس $f = g\bar{h}$. بنابراین نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"'] \arrow[d, "f"] & \\ U \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (f = g\bar{h})$$

حال سوالی که به ذهن می‌رسد این است که اگر Rــ مدول چپ مانند M را در اختیار ما قرار دهند و نموداری به صورت

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] & \\ K \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

به ما داده شود که K و N دو Rــ مدول چپ هستند، آنگاه آیا همواره می‌توانیم یک Rــ همریختی از M به K بسازییم که نمودار بالا را جابجایی کند؟

جواب این سوال نیز در حالت کلی منفی است و در ادامه خواهیم دید که همه مدول‌ها چنین خاصیتی ندارند. دسته‌ی از مدول‌ها که چنین خاصیتی دارند به مدول‌های تصویری معروف شده‌اند و تبدیل به یکی از مهمترین مفاهیم جبر جابجایی و جبر ناجابجایی شده‌اند. مدول تصویری یکی از پر کاربردترین مفاهیم نظریه مدول در جبر هومولوژی است. مدول تصویری در هندسه جبری و سایر شاخه‌های ریاضی نیز مطرح است. معمولا در این نوشتار از حرف لاتین P برای نمایش یک مدول تصویری استفاده می‌کنیم که بر گرفته از اولین حرف معادل لاتین آن یعنی ”Projective“ است.

این بخش را با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۲. گوییم Rـ مدول چپ P تصویری است هرگاه برای هر دنباله دقیق از Rـ مدول‌های چپ به صورت

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

و هر Rـ همریختی مدولی مانند $f : P \longrightarrow N$، Rـ همریختی مدولی مانند $h : P \longrightarrow M$ موجود باشد که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (f = gh)$$

مثال ۲.۴.۲. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول، تصویری است. زیرا دنباله دقیق از $\mathbb{Z}$ـ مدول‌ها به صورت

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

و $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی دلخواه مانند $f : \mathbb{Z} \longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم آنگاه چون g پوشا است و $f(1) \in N$ پس عنصر $m \in M$ چنان وجود دارد که $g(m) = f(1)$. حال قرار می‌دهیم $h : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ با ضابطه $h(k) = km$. بررسی راحت نشان می‌دهد که g یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی خوشتعریف است (چرا؟) و داریم

$$f(k) = kf(1) = kg(m) = g(km) = gh(k)$$

یعنی $f = gh$. پس نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (f = gh)$$

مثال ۳.۴.۲. $\mathbb{Z}_2$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول، تصویری نیست. برای نشان دادن این مطلب باید یک دنباله دقیق و یک همریختی مناسب مانند f چنان ارائه کنیم که نتوان هیچ h ارائه کرد به گونه‌ای که نمودار را جابجا کند. بدین منظور قرار می‌دهیم $f = id_{\mathbb{Z}_2}$. حال دنباله دقیق

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{g(k)=\bar{k}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

را از $\mathbb{Z}$ـ مدول‌ها در نظر می‌گیریم. پس نمودار زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "id_{\mathbb{Z}_2}"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "g"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

اما می‌دانیم که $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$ (چرا؟) و این کار را تمام می‌کند.

مثال ۴.۴.۲. *$\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ــ مدول تصویری نیست. برای نشان دادن این مطلب باید یک دنباله دقیق و یک همریختی مناسب مانند f چنان ارائه کنیم که نتوان هیچ h ارائه کرد به گونه‌ای که نمودار را جابجا کند. بدین منظور قرار می‌دهیم $f = id_{\mathbb{Q}}$. حال دنباله دقیق*

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

را از $\mathbb{Z}$ــ مدول‌ها در نظر می‌گیریم که $g((k_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum \frac{k_i}{i}$ (دقت شود که جمع روی تعداد متناهی است). باید تذکر دهیم که g پوشا است. زیرا اگر $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ آنگاه داریم

$$g((\ldots, 0, \ldots, 0, \overbrace{p}^{\text{محل } q \text{ ام}}, 0, \ldots, 0, \ldots)) = \frac{p}{q}.$$

پس نمودار زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q} \arrow[d, "id_{\mathbb{Q}}"] & \\ \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \arrow[r, "g"] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

اما طبق تمرین ۱۱.۸.۱، $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}) = 0$ و این کار را تمام می‌کند.

قضیه زیر طیف وسیعی مثال از مدول‌های تصویری فراهم می‌کند و نشان می‌دهد که هر فضای برداری مثالی برای مدول تصویری است.

قضیه ۵.۴.۲. *هر Rــ مدول چپ آزاد F، تصویری است.*

اثبات. دنباله دقیق از Rــ مدول‌ها به صورت

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

و Rــ همریختی مدولی دلخواه مانند $f : F \longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم که $X = \{x_i\}_{i\in I}$ یک پایه برای F باشد. چون g پوشا است و $f(x_i) \in N$ پس عنصر $m_i \in M$ چنان وجود دارد که $g(m_i) = f(x_i)$. حال قرار می‌دهیم $h : F \longrightarrow M$ با ضابطه $h(x_i) = m_i$. واضح است که h یک تابع است پس طبق گزاره ۲۲.۱.۲، می‌توانیم h را به یک Rــ همریختی مدولی مانند $\bar{h} : F \longrightarrow M$ گسترش دهیم که $\bar{h}|_X = h$. حال برای هر $x_i \in X$ داریم

$$f(x_i) = g(m_i) = gh(m_i) = g\bar{h}(m_i).$$

چون f و $g\bar{h}$ روی مولدها یکسان هستند پس $f = g\bar{h}$. بنابراین نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (f = g\bar{h})$$

اثبات کامل است. $\square$

تذکر ۶.۴.۲. *سوالی که در اینجا ممکن است مطرح شود این است که عکس قضیه ۵.۴.۲، برقرار است؟ جواب این سوال در حالت کلی منفی است. برای دیدن مثال نقض باید کمی صبور باشید. اما جالب است که بدانید روی دامنه ایده‌آل اصلی جابجایی و یا یک حلقه موضعی جابجایی عکس این قضیه نیز صحیح است (تمرین ۱۷.۷.۲ و تمرین ۱۸.۷.۲ را ببینید). روی چه حلقه‌های دیگری عکس این گزاره صحیح است؟!*

قضیه زیر از اهمیت بسیار بالای برخوردار است.

قضیه ۷.۴.۲. *فرض کنیم P یک Rـ مدول چپ باشد. موارد زیر معادل هستند.*
(۱) P *تصویری است.*
(۲) *هر دنباله دقیق کوتاه به شکل*

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \circ$$

شکافته می‌شود.
(۳) *Rـ مدول چپ آزاد مانند F و Rـ مدول چپ مانند K وجود دارند که $F \cong_R K \oplus P$.*

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & P & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle id_P} & & \\ \circ & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

چون P تصویری است پس Rـ همریختی مانند $h : P \longrightarrow N$ وجود دارد که $gh = id_P$. یعنی نموداری جابجایی به شکل زیر داریم

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "id_P"] & \\ \circ \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & \circ \end{tikzcd} \qquad (gh = id_P)$$

حال طبق قضیه ۱۲.۵.۱، قسمت (۱)، حکم به دست می‌آید.
(۲) $\Leftarrow$ (۳). طبق گزاره ۲۳.۱.۲، یک Rـ مدول چپ آزاد مانند F با پایه $X = P$ وجود دارد. بدون خللی در اثبات می‌توانیم فرض کنیم $X = \{x_p\}_{p\in P}$. واضح است که $\alpha : X \longrightarrow P$ با ضابطه $\alpha(x_p) = p$ یک تابع پوشا است. پس طبق گزاره ۲۲.۱.۲، می‌توانیم α را به یک Rـ همریختی مدولی پوشا مانند $\bar{\alpha} : F \longrightarrow P$ گسترش دهیم که $\bar{\alpha}|_X = \alpha$. حال طبق فرض دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow Ker(\bar{\alpha}) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\bar{\alpha}} P \longrightarrow \circ$$

شکافته می‌شود. پس طبق قضیه ۱۲.۵.۱، قسمت (۳)، داریم $F \cong_R Ker(\bar{\alpha}) \oplus P$. یعنی K همان $Ker(\bar{\alpha})$ است.
(۳) $\Leftarrow$ (۱). دنباله دقیق از Rـ مدول‌ها به صورت

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow ۰$$

و Rـ همریختی مدولی دلخواه مانند $f : P \longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم. حال می‌توانیم نمودار زیر را بسازییم.

$$\begin{tikzcd} & K \oplus P \arrow[d, "p_{۲}"] & \\ & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & ۰ \end{tikzcd}$$

اما $F \cong_R K \oplus P$ و F آزاد است پس $K \oplus P$ آزاد است و طبق قضیه ۵.۴.۲، داریم که $K \oplus P$ تصویری است. پس Rـ همریختی $h : K \oplus P \longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $gh = fp_{۲}$. یعنی نمودار جابجایی زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} & K \oplus P \arrow[d, "p_{۲}"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] & \\ & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & ۰ \end{tikzcd} \qquad (gh = fp_{۲})$$

اکنون Rـ همریختی $h' = h\lambda_{۲} : P \longrightarrow M$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$gh = fp_{۲} \;\Rightarrow\; gh\lambda_{۲} = fp_{۲}\lambda_{۲} \;\Rightarrow\; gh' = fid_P \;\Rightarrow\; gh' = f$$

پس به نمودار جابجایی زیر می‌رسیم

$$\begin{tikzcd} & K \oplus P \arrow[d, "p_{۲}"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] & \\ & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h'"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & ۰ \end{tikzcd} \qquad (gh = fp_{۲},\ \ gh' = f)$$

یعنی P تصویری است و اثبات کامل است. $\square$

حال نتیجه بسیار مهم زیر را داریم.

نتیجه ۲.۴.۸. *فرض کنیم $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rــ مدول‌های چپ باشد. در این صورت هر P_i تصویری است اگر و تنها اگر $\bigoplus_{i\in I} P_i$ تصویری باشد.*

اثبات. فرض کنیم هر P_i تصویری است. در این صورت طبق قضیه ۲.۴.۷، قسمت (۳)، Rــ مدول چپ آزاد F_i و Rــ مدول چپ K_i وجود دارند که $K_i \oplus P_i \cong_R F_i$. پس داریم

$$(\bigoplus_{i\in I} K_i) \oplus (\bigoplus_{i\in I} P_i) \cong_R \bigoplus_{i\in I} F_i.$$

اما طبق نتیجه ۲.۱.۲۸، Rــ مدول چپ $\bigoplus_{i\in I} F_i$ آزاد است. پس شرایط قسمت (۳) از قضیه ۲.۴.۷ برقرار است. بنابراین باید $\bigoplus_{i\in I} P_i$ تصویری باشد.
حال برعکس؛ فرض کنیم $\bigoplus_{i\in I} P_i$ تصویری باشد. در این صورت طبق قضیه ۲.۴.۷، قسمت (۳)، Rــ مدول چپ آزاد F و Rــ مدول چپ K وجود دارند که $K \oplus (\bigoplus_{i\in I} P_i) \cong_R F$. پس داریم

$$[K \oplus (\bigoplus_{i\neq j\in I} P_j)] \oplus P_i \cong_R F.$$

بنابراین شرایط قسمت (۳) از قضیه ۲.۴.۷ برقرار است. بنابراین باید P_i تصویری باشد. □

اکنون می‌توانیم مثالی را که وعده داده بودیم بیان کنیم. مثال زیر نشان می‌دهد که یک Rــ مدول تصویری لزوما آزاد نیست.

مثال ۲.۴.۹. *می‌دانیم که $\mathbb{Z}_6$ــ مدول $\mathbb{Z}_6$ آزاد است و در نتیجه طبق گزاره ۲.۱.۲۳، تصویری است. از طرفی داریم $\mathbb{Z}_6 = ۲\mathbb{Z}_6 \oplus ۳\mathbb{Z}_6$. حال طبق نتیجه ۲.۴.۸، $\mathbb{Z}_6$ــ مدول $۳\mathbb{Z}_6$ تصویری است در حالی که این مدول آزاد نیست زیرا $\bar{۳} \times \bar{۲} = \bar{0}$.*

مثال زیر نشان می‌دهد که مدول‌های تصویری دسته‌ای جدید و متمایز از مدول‌هایی است که تا کنون آموخته‌اید.

مثال ۲.۴.۱۰. *طبق قضیه ۲.۳.۱۶، $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_۳ \oplus \mathbb{Z}_۲$ نیمساده است در حالی که تصویری نیست (چرا؟). $\mathbb{Z}_۴$ــ مدول $\mathbb{Z}_۴$ تصویری است در حالی که نیمساده نیست (چرا؟)*

تذکر ۲.۴.۱۱. *فرض کنیم $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rــ مدول‌های چپ باشد. در این صورت اگر $\prod_{i\in I} P_i$ تصویری باشد آنگاه به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که برای هر i، P_i نیز تصویری است. اما عکس این مطلب صحیح نیست. برای ساختن یک مثال نقض ابتدا تمرین ۲.۷.۳ را ببینید و سپس تمرین ۲.۷.۱۸ و قضیه ۲.۴.۵ را به کار ببندید.*

تمرین‌ها

تمرین ۲.۴.۱۲. نشان دهید که $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$ـ مدول تصویری نیست.

تمرین ۲.۴.۱۳. فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد و همچنین P و Q دو Rـ مدول تصویری باشند آنگاه نشان دهید که $P \otimes_R Q$ یک Rـ مدول تصویری است.

تمرین ۲.۴.۱۴. فرض کنیم R یک زیرحلقه از حلقه S باشد. اگر P یک Sـ مدول تصویری باشد آنگاه با یک مثال نشان دهید که لزومی ندارد P یک Rـ مدول تصویری باشد.

تمرین ۲.۴.۱۵. نشان دهید که موارد زیر معادل هستند.
(۱) Rـ مدول چپ P تصویری است.
(۲) برای هر Rـ همریختی پوشا مانند $g : M \longrightarrow N$، $\mathbb{Z}$ـ همریختی

$$g_* : Hom_R(P, M) \longrightarrow Hom_R(P, N)$$

پوشا است.
(۳) $Hom_R(P, -)$ هم از چپ و هم از راست دقیق است.

تمرین ۲.۴.۱۶. (ترفند ایلینبرگ) اگر P یک Rـ مدول چپ تصویری باشد آنگاه نشان دهید که Rـ مدول چپ آزاد F چنان وجود دارد که $P \oplus F$ یک Rـ مدول چپ آزاد است.

تمرین ۲.۴.۱۷. فرض کنیم R حلقه جابجایی و I ایده‌آل R باشد. اگر P یک Rـ مدول تصویری باشد آنگاه نشان دهید که (R/I)ـ مدول P/IP تصویری است (راهنمایی: قضیه ۲.۲.۲.۵ را به کار ببنید).

۵.۲ مدول‌های تزریقی

فرض کنیم Fـ فضای برداری V را در اختیار داریم و نموداری به صورت

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & W \\ & V & \end{tikzcd}$$

به ما داده شده است که U و W دو Fـ فضای برداری هستند. همواره می‌توانیم یک Fـ همریختی از W به V بسازییم که نمودار بالا را جابجایی کند. برای ساخت چنین همریختی، می‌دانیم که $Im(g) \leq W$ و در نتیجه $L \leq W$ چنان وجود دارد که $W = Im(g) \oplus L$ (چرا؟). حال تعریف می‌کنیم

$$h : W \longrightarrow V, \;\; h(g(u) + l) = f(u).$$

h خوشتعریف وهمان همریختی مطلوب است زیرا

$$hg(u) = h(g(u) + \circ) = f(u).$$

بنابراین نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & V & \end{tikzcd} \qquad (f = hg)$$

حال سوالی که به ذهن می‌رسد این است که اگر Rـ مدول چپ مانند M را در اختیار ما قرار دهند و نموداری به صورت

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \\ & M & \end{tikzcd}$$

به ما داده شود که K و N دو Rـ مدول چپ هستند، آنگاه آیا همواره می‌توانیم یک Rـ همریختی از N به M بسازییم که نمودار بالا را جابجایی کند؟

جواب این سوال نیز در حالت کلی منفی است و در ادامه خواهیم دید که همه مدول‌ها چنین خاصیتی ندارند.

خانواده‌ای از مدول‌ها که به سوال بالا جواب مثبت می‌دهند به مدول تزریقی معروف شده‌اند. اهمیت این دسته از مدول‌ها برای جبردانان به مراتب حتی بیشتر از مدول‌های تصویری است. کاربرد این دسته از مدول‌ها به فراوان در جبر همولوژی دیده می‌شود. مطابق بر بخش‌های قبل، باید از کلمه لاتین I برای مدول تزریقی استفاده کنیم چرا که اولین حرف معادل لاتین آن "Injective" است.

اما حرف I در نوشتار ما معمولا برای ایده‌آل و مجموعه اندیس‌گذار استفاده شده است. پس برای سر در گم نشدن، بهتر است که در ادامه این نوشتار از حرف لاتین T برای نمایش یک مدول تزریقی استفاده کنیم که بر گرفته از اولین حرف فارسی آن است.

حال با تعریف زیر کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۲. *گوییم Rـ مدول چپ T تزریقی است هرگاه برای هر دنباله دقیق از Rـ مدول‌های چپ به صورت*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} N$$

و هر Rـ همریختی مدولی مانند $f : M \longrightarrow T$، Rـ همریختی مدولی مانند $h : N \longrightarrow T$ موجود باشد که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad (f = hg)$$

با کمک تعریف بالا ساختن مثال غیر بدیهی کم دشوار است. پس ابتدا کمی ویژگی‌های این مدول را شناسایی می‌کنیم و سپس با کمک این ویژگی‌ها مثال‌هایی ارائه خواهیم کرد. در زیر دو مثال تقریبا بدیهی از این مدول‌ها خواهیم آورد.

مثال ۲.۵.۲. *واضح است که مدول 0 تزریقی است.*

مثال ۳.۵.۲. *در شروع بخش نشان دادیم که هر Fـ فضای برداری V، تزریقی است. در زیر یک روش دیگر برای تزریقی بودن V را به دست می‌دهیم. ماهیت هر دو روش یک چیز است! برای هر دنباله دقیق از Fـ مدول‌های چپ (Fـ فضاهای برداری) به صورت*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} N$$

و هر Fـ همریختی مدولی (Fـ همریختی فضا برداری) مانند $f : M \longrightarrow V$، می‌توانیم فرض کنیم که $\{g(x_i)\}_{i\in I}$ یک پایه برای $Im(g)$ است و این پایه را برای N گسترش می‌دهیم و سپس Fـ همریختی فضای برداری مانند $h : N \longrightarrow V$ روی عناصر پایه به شکل $h(g(x_i)) = f(x_i)$ و اگر $x \neq g(x_i)$ آنگاه $h(x) = 0$، تعریف می‌کنیم. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که نمودار زیر جابجایی می‌شود.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & V & \end{tikzcd} \qquad (f = hg)$$

مثال ۴.۵.۲. $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ تزریقی نیست. *برای نشان دادن این مطلب باید یک دنباله دقیق و یک همریختی مناسب مانند f چنان ارائه کنیم که نتوان هیچ h ارائه کرد به گونه‌ای که نمودار را جابجا کند. بدین منظور قرار می‌دهیم $f = id_{\mathbb{Z}}$. حال دنباله دقیق*

$$\circ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$$

را از $\mathbb{Z}$ـ مدول‌ها در نظر می‌گیریم. پس نمودار زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_{\mathbb{Z}}"] & \mathbb{Q} \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

اما می‌دانیم که $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \circ$ (چرا؟) و این کار را تمام می‌کند.

گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل ضرب مدول‌های تزریقی خودش یک مدول تزریقی است.

گزاره ۵.۵.۲. *فرض کنیم $\{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ باشد. در این صورت $\prod_{i\in I} T_i$ یک Rـ مدول چپ تزریقی است اگر و تنها اگر هر T_i یک Rـ مدول چپ تزریقی باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). نموداری به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & N \\ & T_i & \end{tikzcd}$$

نمودار بالا را به نمودار زیر گسترش می‌دهیم.

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & N \\ & T_i \arrow[d, "\lambda_i"] & \\ & \prod_{i\in I} T_i & \end{tikzcd}$$

طبق فرض $\prod_{i\in I} T_i$ تزریقی است پس Rـ همریختی $h : N \longrightarrow \prod_{i\in I} T_i$ چنان وجود دارد که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & N \arrow[ddl, dashed, "h"] \\
& T_i \arrow[d, "\lambda_i"] & \\
& \prod_{i\in I} T_i &
\end{tikzcd} \qquad (hg = \lambda_i f_i)$$

اکنون قرار می‌دهیم $\bar{h} : N \longrightarrow T_i$ که $\bar{h}(n) = p_i h(n)$. داریم

$$\bar{h}g = p_i hg = p_i \lambda_i f_i = id_{T_i} f_i = f_i.$$

پس نمودار زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"'] \arrow[ddl, dashed, "h"] \\
& T_i \arrow[d, "\lambda_i"] & \\
& \prod_{i\in I} T_i &
\end{tikzcd} \qquad (hg = \lambda_i f_i,\ \ \bar{h}g = f_i)$$

پس طبق تعریف T_i تزریقی است.

$(\Rightarrow)$. نموداری به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \\
& \prod_{i\in I} T_i &
\end{tikzcd}$$

نمودار بالا را به نمودار زیر گسترش می‌دهیم.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \\
& \prod_{i\in I} T_i \arrow[d, "p_i"] & \\
& T_i &
\end{tikzcd}$$

طبق فرض T_i تزریقی است پس Rـ همریختی $h_i : N \longrightarrow T_i$ چنان وجود دارد که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[ddl, dashed, "h_i"] \\
& \prod_{i\in I} T_i \arrow[d, "p_i"] & \\
& T_i &
\end{tikzcd} \qquad (h_i g = p_i f)$$

اکنون طبق قضیه ۱۵.۶.۱، Rـ همریختی مدولی یکتایی مانند $\bar{h} : N \longrightarrow \prod_{i\in I} T_i$ وجود دارد که برای هر $i \in I$ نمودار زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"'] \arrow[ddl, dashed, "h_i"] \\
& \prod_{i\in I} T_i \arrow[d, "p_i"] & \\
& T_i &
\end{tikzcd} \qquad (h_i g = p_i f, \;\; p_i\bar{h} = h_i)$$

اما داریم که

$$p_i f = h_i g = p_i \bar{h} g.$$

اکنون فرض کنیم $f(x) = (t_i)_{i\in I}$ و $\bar{h}g(x) = (t'_i)_{i\in I}$ که $x \in M$. داریم

$$t_i = p_i((t_i)_{i\in I}) = p_i(f(x)) = p_i(\bar{h}(g(x))) = p_i((t'_i)_{i\in I}) = t'_i.$$

این نشان می‌دهد که $\bar{h}g = f$. پس نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"'] \arrow[ddl, dashed, "h_i"] \\
& \prod_{i\in I} T_i \arrow[d, "p_i"] & \\
& T_i &
\end{tikzcd} \qquad (h_i g = p_i f, \;\; p_i\bar{h} = h_i, \;\; \bar{h}g = f)$$

پس طبق تعریف $\prod_{i\in I} T_i$ تزریقی است. $\square$

تذکر ۶.۵.۲. *فرض کنیم $\{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ باشد. در این صورت اگر $\bigoplus_{i\in I} T_i$ تزریقی باشد آنگاه به آسانی می‌توان نشان داد که هر T_i تزریقی است (تمرین ۳۴.۵.۲ را ببینید). عکس این مطلب در حالت کلی صحیح نیست. ساختن مثال نقض از حیطه این نوشتار خارج است. اما شرط لازم و کافی برای اینکه جمع مستقیم مدول‌های چپ تزریقی مدولی تزریقی شود، در قضیه‌ای بسیار جالب و قوی توسط دو جبردان به نام‌های پاپ و باس به دست آمده است.*

مهمترین قضیه این بخش شاید محک بئر باشد که در ادامه خواهد آمد. این قضیه کار را برای تشخیص تزریقی بودن یک مدول ساده می‌کند. در واقع این محک می‌گوید که به جای بررسی تمام دنباله‌های دقیق و همریختی‌ها، کافی است روی گسترش دامنه هر همریختی مدولی که از یک ایده‌آل چپ به مدول مورد نظر است، تمرکز کنید و دامنه آنها را به کل حلقه گسترش دهید.

قضیه ۷.۵.۲. *(محک بئر) فرض کنیم T یک Rـ مدول چپ باشد. در این صورت T تزریقی است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل چپ I از R و هر Rـ مدول همریختی مانند $h : I \longrightarrow T$، h قابل گسترش به $\bar{h} : R \longrightarrow T$ باشد یعنی $\bar{h}|_I = h$.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ و $h : I \longrightarrow T$ یک Rـ همریختی باشد. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & R \\ & T & \end{tikzcd}$$

چون T تزریقی است پس همریختی مدولی مانند $\bar{h} : R \longrightarrow T$ موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & R \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad (h = \bar{h}i)$$

اما به وضوح داریم

$$\bar{h}(I) = \bar{h}(i(I)) = h(I).$$

پس $\bar{h}|_I = h$. یعنی $\bar{h}$ همان Rـ همریختی مطلوب است.

($\Rightarrow$). دنباله دقیق از Rـ مدول‌های چپ به صورت

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} N$$

و Rـ همریختی مدولی مانند $f : M \longrightarrow T$ را در نظر می‌گیریم و داریم

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \\ & T & \end{tikzcd}$$

حال قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{k : U \longrightarrow T \mid Im(g) \subseteq U \subseteq N, \;\; f = kg\}.$$

$\mathcal{A}$ ناتهی است. زیرا $\bar{g} : M \longrightarrow Im(g)$ یک Rـ همریختی یک به یک و پوشا است پس اگر Rـ همریختی مدولی $T \longrightarrow Im(g) : k = f\bar{g}^{-۱}$ را در نظر بگیریم آنگاه $kg = f$. پس $k \in \mathcal{A}$.
حال که $\mathcal{A}$ ناتهی است روی آن یک رابطه به شکل زیر قرار می‌دهیم.
فرض کنیم $k : U \longrightarrow T$ و $k' : U \longrightarrow T$ تعریف می‌کنیم

$$k \preceq k' \;\; \Leftrightarrow \;\; U \subseteq U', \; k'|_U = k.$$

به راحتی می‌توانیم ببینیم که رابطه "$\preceq$" یک رابطه جزئا مرتب است (چر؟). اکنون فرض کنیم که $\{k_\alpha : U_\alpha \longrightarrow T\}_{\alpha \in \Gamma}$ یک زنجیر در $\mathcal{A}$ باشد. قرار می‌دهیم $U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$. پس اگر $u \in U$ آنگاه $\beta \in \Gamma$ وجود دارد که $u \in U_\beta$. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$k : U \longrightarrow T, \;\; k(u) = k_\beta(u).$$

k خوشتعریف است. زیرا اگر $u \in U_\gamma$ آنگاه بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $U_\gamma \subseteq U_\beta$ و در نتیجه $k(u) = k_\beta(u) = k_\gamma(u)$ (چرا؟).
از طرفی برای هر α داریم که $Im(g) \subseteq U_\alpha \subseteq N$. بنابراین $Im(g) \subseteq U \subseteq N$. حال اگر $m \in M$ آنگاه α چنان وجود دارد که $g(m) \in U_\alpha$ و داریم $k(g(m)) = k_\alpha(g(m)) = f(m)$ و این یعنی $kg = f$. در نتیجه $k \in \mathcal{A}$. اما برای هر α با توجه به تعریف k داریم $K\alpha \preceq k$.
این نشان می‌دهد که k یک کران بالا برای $\{k_\alpha : U_\alpha \longrightarrow T\}_{\alpha \in \Gamma}$ است. طبق لم زرن $\mathcal{A}$ عضو ماکسیمال مانند $k' : U' \longrightarrow T$ دارد که $Im(g) \subseteq U' \subseteq N$ و $f = k'g$. اگر نشان دهیم $U' = N$ است تزریقی بودن T به دست می‌آید (چرا؟). به برهان خلف، فرض کنیم $n \in N \setminus U'$.
قرار می‌دهیم

$$I = \{r \in R \mid rn \in U'\}.$$

به راحتی می‌توان دید که I یک ایده‌آل چپ از R است (چرا؟). اکنون رابطه

$$h : I \longrightarrow T, \;\; h(x) = k'(xn).$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که h یک Rـ همریختی خوشتعریف است (چرا؟). طبق فرض h قابل گسترش به $\bar{h} : R \longrightarrow T$ است یعنی $\bar{h}|_I = h$. اکنون رابطه

$$k'' : U' + Rn \longrightarrow T, \;\; k''(u' + rn) = k'(u') + \bar{h}(r).$$

را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که k'' خوشتعریف است.

$$u'_۱ + rn = u'_۲ + sn \;\Rightarrow\; u'_۱ - u'_۲ = rn + sn \;\Rightarrow\; k'(u'_۱ - u'_۲) = k'((r - s)n).$$

اما $u'_۱ - u'_۲ = (r - s)n \in U'$ پس

$$k'((r - s)n) = h(r - s) = \bar{h}(r - s) = \bar{h}(r) - \bar{h}(s).$$

پس $k'(u'_۱) - k'(u'_۲) = \bar{h}(r) - \bar{h}(s)$. این نشان می‌دهد که k'' خوشتعریف است. به وضوح $k''|_{U'} = k'$. چون $\bar{h}$ و k' هر دو Rـ همریختی هستند، نتیجه می‌شود که k'' یک Rـ همریختی است. اما $Im(g) \subseteq U' \subsetneq U' + Rn$ و برای هر $m \in M$ داریم که $g(m) \in Im(g)$ پس

$$k''(g(m)) = k'(g(m)) = f(m).$$

یعنی $f = k''g$. حال $k'' : U' + Rn \longrightarrow T$ ماکسیمال بودن $k : U' \longrightarrow T$ را نقض می‌کند. پس $U' = N$ و اثبات کامل است. $\square$

اکنون وقت آن است که یک مثال نابدیهی از یک مدول تزریقی را که وعده داده بودیم، بیان کنیم.

مثال ۲.۵.۸. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}$ تزریقی است. می‌خواهیم از محک بئر، قضیه ۲.۵.۷، استفاده کنیم. پس فرض کنیم I یک ایده‌آل $\mathbb{Z}$ باشد. بنابراین $I = k\mathbb{Z}$ که k یک عدد صحیح مناسب است (چرا؟). حال فرض کنیم $h : I \longrightarrow \mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی دلخواه باشد. چون $h(k) \in \mathbb{Q}$ پس عنصر $x \in \mathbb{Q}$ چنان وجود دارد که $h(k) = kx$ (چرا؟). حال تعریف می‌کنیم*

$$\bar{h} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad h(t) = tx.$$

به وضوح $\bar{h}$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی با شرط $\bar{h}|_I = h$ است. پس طبق محک بئر، قضیه ۲.۵.۷، $\mathbb{Q}$ تزریقی است.

تذکر ۲.۵.۹. *همانطور که از مثال‌های بالا بر می‌آید هیچ لزومی ندارد که مدول آزاد یا حتی تصویری، یک مدول تزریقی باشد. همچنین هیچ لزومی ندارد که یک مدول تزریقی، آزاد یا حتی تصویری باشد.*

همانطور که دیدیم $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}$ این خاصیت خیلی جالب را دارد که برای هر عنصر ناصفر $x \in \mathbb{Z}$ و هر عنصر $u \in \mathbb{Q}$ عنصر $v \in \mathbb{Q}$ چنان وجود دارد که $u = xv$. این خاصیت جالب برای تعمیم دادن وسوسه کننده است. البته باید برای تعمیم دادن دقت کنیم که دامنه صحیح بودن $\mathbb{Z}$ را نادیده نگیریم. عناصر $\mathbb{Z}$ مقسوم علیه صفر نیستند. یادآوری می‌کنیم که عنصر r در حلقه R مقسوم علیه صفر راست است اگر عنصر ناصفر $s \in R$ موجود باشد که $sr = ۰$. این تعمیم را در تعریف زیر می‌بینیم.

تعریف ۲.۵.۱۰. *گوییم Rـ مدول چپ M بخش پذیر است هرگاه برای هر $m \in M$ و هر عضو $r \in R$ که مقسوم علیه راست صفر نیست، عضو $m' \in M$ چنان موجود باشد که $m = rm'$.*

مثال ۲.۵.۱۱. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}$ بخش پذیر است.*

مثال ۲.۵.۱۲. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ بخش پذیر است.*

مثال ۲.۵.۱۳. *با وجود این که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}$ بخش پذیر است، اما $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ بخش پذیر نیست. زیرا برای عنصر ۱ و ۲ در $\mathbb{Z}$، هیچ عنصری مانند x در $\mathbb{Z}$ وجود ندارد که $۲x = ۱$.*

نتیجه ۲.۵.۱۴. *لزوما زیرمدول یک مدول بخش پذیر، بخش پذیر نیست.*

در ادامه رابطه بسیار جالبی بین مدول‌های بخش پذیر و مدول‌های تزریقی را بیان می‌کنیم که سبب می‌شود یک طیف مثال از مدول‌های تزریقی و بخش پذیر داشته باشیم. اما فعلا مثال‌های بالا انگیزه‌ای برای گزاره زیر هستند.

گزاره ۲.۵.۱۵. *موارد زیر برقرار هستند.*
(۱) اگر M یک Rـ مدول چپ بخش پذیر باشد آنگاه برای هر زیرمدول M مانند N، M/N بخش پذیر است.
(۲) فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از Rـ مدول‌های چپ بخش پذیر باشد. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} M_i$ و $\prod_{i\in I} M_i$ بخش پذیر هستند.

اثبات. (۱) فرض کنیم $m+N$ عنصر دلخواه و r در R مقسوم علیه راست صفر نباشد. چون M بخش پذیر است پس عنصر $m'\in M$ چنان وجود دارد که $m=rm'$. این نشان می‌دهد که $m+N=rm'+N$ یا معادلا $m+N=r(m'+N)$ و اثبات کامل است.
(۲) به عنوان تمرین رها می‌کنیم. □

قضیه زیر ارتباط بین مدول تزریقی و یک مدول بخش پذیر را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۵.۱۶. *هر Rـ مدول چپ تزریقی T، بخش پذیر است.*

اثبات. فرض کنیم که $r\in R$ مقسوم علیه صفر راست نباشد و $m\in T$. رابطه‌ای به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f: Rr \longrightarrow T, \quad f(sr)=sm.$$

واضح است که f یک Rـ همریختی خوشتعریف است (چرا؟). چون T تزریقی است پس طبق محک بئر، قضیه ۲.۵.۷، f قابل گسترش است. یعنی Rـ همریختی $\bar{f}: R\longrightarrow T$ وجود دارد که $\bar{f}|_{Rr}=f$. حال داریم

$$m=1.m=f(r)=\bar{f}(r)=r\bar{f}(1).$$

پس کافی است قرار دهیم $m'=\bar{f}(1)$. اثبات کامل است. □

تذکر ۲.۵.۱۷. *سوال طبیعی که باید پرسیده شود این است که آیا عکس قضیه ۲.۵.۱۶، نیز صحیح است؟ جواب به سوال در حالت کلی منفی است (تمرین ۲.۷.۲۶ را ببینید). اما در یک حالت خاص، در زیر جواب مثبت به این سوال می‌دهیم.*

گزاره ۲.۵.۱۸. *فرض کنیم که R دامنه ایده‌آل اصلی چپ باشد. در این صورت هر Rـ مدول چپ T تزریقی است اگر و تنها اگر بخش پذیر باشد.*

اثبات. طبق قضیه ۲.۵.۱۶، کافی است بر عکس را اثبات کنیم. فرض کنیم T بخش پذیر است. با محک بئر، قضیه ۲.۵.۷، نشان می‌دهیم T تزریقی است. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ دلخواه و $f: I\longrightarrow T$ یک Rـ همریختی باشد. طبق فرض عنصر $x\in R$ چنان وجود دارد که $I=Rx$. اگر I صفر باشد آنگاه $f(0)=0$ (چرا؟) و به وضوح $\bar{f}: R\longrightarrow T$ با ضابطه $\bar{f}(r)=rm$ که $m\in T$ دلخواه و ثابت است، یک Rـ همریختی و گسترش f است. پس در این حالت، چیزی برای

اثبات نداریم. بنابراین فرض کنیم I ناصفر است یعنی $x \neq 0$. چون R دامنه است پس x مقسوم علیه راست ناصفر است. پس برای هر $m \in T$ عنصر $m' \in T$ چنان وجود دارد که $m = xm'$؛ از جمله اگر $m = f(x) \in T$ باشد. یعنی $f(x) = xm'$ که $m' \in T$. پس برای هر $sx \in I$ داریم $f(sx) = sf(x) = sxm'$. اکنون

$$\bar{f} : R \longrightarrow T, \quad \bar{f}(r) = rm'$$

یک Rــ همریختی خوشتعریف است (چرا؟). همچنین $\bar{f}|_I = f$ (چرا؟). پس طبق محک بئر قضیه ۲.۵.۷، اثبات تمام است. □

مثال‌های زیر نشان می‌دهد که مدول‌های تزریقی دسته‌ای جدید از مدول‌هایی است که تا کنون با آنها آشنا شده‌اید.

مثال ۲.۵.۱۹. *طبق قضیه ۲.۳.۱۶، $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ نیمساده است در حالی که نه آزاد، نه تصویر و نه تزریقی است (چرا؟). اما $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Q}$ تزریقی است که نه آزاد، نه تصویری و نه نیمساده است (چرا؟).*

مثال ۲.۵.۲۰. *$\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ نه تصویری است و نه تزریقی. چون $\mathbb{Z}$ یک دامنه ایده‌آل اصلی است با کمک گزاره ۲.۵.۱۸، کافی است نشان دهیم $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ بخش پذیر نیست تا تزریقی نبودن اثبات شود. به وضوح معادله $(3, 0) = 2(x, y)$ در $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ جواب ندارد. بنابراین $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ بخش پذیر نیست. قبلا نشان داده‌ایم که $\mathbb{Q}$ تصویری نیست (به مثال‌های بخش تصویری مراجعه کنید) پس طبق نتیجه ۲.۴.۸، $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ تصویری نیست.*

در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم هر مدول در یک مدول تزریقی نشانده می‌شود. قبل از این که این مطلب را نشان دهیم ابتدا به صورت دقیق مفهوم نشانده شدن را بیان می‌کنیم و سپس با مثال‌های نشان می‌دهیم که هر مدول در یک مدول آزاد یا تصویری نشانده نمی‌شود. این یعنی مدول‌های تزریقی ویژگی بسیار جالبی از خود نشان می‌دهند که همین ویژگی آنها را از مدول‌های آزاد و تصویری با برجسته‌تر می‌کند.

تعریف ۲.۵.۲۱. *گوییم Rــ مدول چپ N نشانده می‌شود (می‌نشیند) در Rــ مدول چپ M، هرگاه یک Rــ همریختی یک به یک از N به M موجود باشد.*

مثال ۲.۵.۲۲. *$\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_2$ در هیچ مدول آزادی نمی‌نشیند. زیرا اگر $\mathbb{Z}_2$ در یک $\mathbb{Z}$ــ مدول آزاد مانند F نشانده شود، آنگاه طبق قضیه ۲.۱.۲۶، داریم $F \cong \mathbb{Z}^{(I)}$. پس $\mathbb{Z}_2$ با زیرمدولی از $\mathbb{Z}^{(I)}$ یکریخت است (چرا؟). اما هیچ عضوی در $\mathbb{Z}^{(I)}$ از مرتبه ۲ نیست (چرا؟). این یک تناقض است.*

مثال ۲.۵.۲۳. *$\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Q}$ در هیچ مدول تصویری نمی‌نشیند. زیرا اگر $\mathbb{Q}$ در یک $\mathbb{Z}$ــ مدول تصویری مانند P نشانده شود، آنگاه طبق تمرین ۲.۷.۱۸، P آزاد است. بنابراین طبق قضیه ۲.۱.۲۶، داریم $P \cong \mathbb{Z}^{(I)}$. این نشان می‌دهد که یک $\mathbb{Z}$ــ همریختی ناصفر از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{Z}^{(I)}$ وجود دارد (چرا؟). این در تناقض با تمرین ۱.۸.۱۱ است.*

برای دست یابی به هدف اصلی که نشاندن هر مدول در یک مدول تزریقی است، ابتدا باید همین کار را برای یک $\mathbb{Z}$ــ مدول انجام دهیم و سپس به هدف اصلی خودمان دست یابیم. پس به گزاره‌های زیر نیاز داریم.

گزاره ۲.۵.۲۴. *هر $\mathbb{Z}$ـ مدول (گروه آبلی) M در یک $\mathbb{Z}$ـ مدول تزریقی مانند T می‌نشیند.*

اثبات. بنا بر قضیه ۲.۱.۳۳، $\mathbb{Z}$ـ مدول M تصویر همریخت یک $\mathbb{Z}$ـ مدول آزاد مانند F است. بنابراین $\mathbb{Z}$ـ همریختی پوشایی مانند $f : F \longrightarrow M$ وجود دارد که طبق نتیجه ۱.۳.۲۲، داریم $F/Ker(f) \cong_{\mathbb{Z}} M$. اما طبق قضیه ۲.۱.۲۶، داریم $F \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(I)}$. بنابراین

$$M \cong_{\mathbb{Z}} F/Ker(f) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(I)}/Ker(f) \leq \mathbb{Q}^{(I)}/Ker(f).$$

اکنون قرار می‌دهیم $T = \mathbb{Q}^{(I)}/Ker(f)$. چون $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ـ مدول بخش پذیر است (چرا؟)، از گزاره ۲.۵.۱۵، T یک $\mathbb{Z}$ـ مدول بخش پذیر است. اثبات کامل است. □

گزاره ۲.۵.۲۵. *فرض کنیم T یک $\mathbb{Z}$ـ مدول تزریقی و R یک حلقه باشد. در این صورت Rـ مدول چپ $Hom_{\mathbb{Z}}(R,T)$ تزریقی است.*

اثبات. ابتدا یادآوری می‌کنیم که $Hom_{\mathbb{Z}}(R,T)$ با ضرب در اسکالر $r.f = rf$ (به این معنی که $((rf)(s) = f(sr)$)، یک Rـ مدول چپ است (چرا؟). برای راحتی ادامه کار فرض کنیم $T' = Hom_{\mathbb{Z}}(R,T)$. برای نشان دادن این که T' تزریقی است، می‌خواهیم از محک بئر، قضیه ۲.۵.۷، استفاده کنیم. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ و $f : I \longrightarrow T'$ یک Rـ همریختی باشد. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\beta : I \longrightarrow T, \;\; \beta(x) = (f(x))(۱).$$

واضح است که β یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی خوشتعریف است (چرا؟). چون T یک $\mathbb{Z}$ـ مدول تزریقی است، β قابل گسترش است یعنی $\mathbb{Z}$ـ همریختی $\bar{\beta} : R \longrightarrow T$ وجود دارد که $\bar{\beta}|_I = \beta$. به وضوح $\bar{\beta} \in T'$. قرار می‌دهیم

$$\bar{f} : R \longrightarrow T', \;\; \bar{f}(r) = r.\bar{\beta} \; (= r\bar{\beta}).$$

حال برای هر $x \in I$ داریم

$$(\bar{f}(x))(۱) = (x.\bar{\beta})(۱) = (x\bar{\beta})(۱) = \bar{\beta}(۱.x) = \bar{\beta}(x) = \beta(x) = (f(x))(۱).$$

پس $\bar{f}|_I = f$. حال طبق محک بئر، قضیه ۲.۵.۷، T' تزریقی است. □

اکنون وقت آن است که وعده خود را عملی کنیم. باید خاطر نشان کنیم که قضیه زیر منسوب به بئر است.

قضیه ۲.۵.۲۶. *(بئر) هر Rـ مدول چپ M در یک Rـ مدول چپ تزریقی T می‌نشیند.*

اثبات. واضح است که M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول نیز می‌باشد (چرا؟). بنابراین طبق گزاره ۲.۵.۲۴، M در یک $\mathbb{Z}$ـ مدول تزریقی مانند D می‌نشیند. حال طبق گزاره ۲.۵.۲۵، $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ یک Rـ مدول چپ تزریقی است. اما طبق قضیه ۱.۶.۸، داریم

$$M \cong_R Hom_R(R,M) \leq Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \leq Hom_{\mathbb{Z}}(R,D).$$

بنابراین $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ همان T مطلوب است. اثبات کامل است. □

قضیه زیر اهمیت بسیار بالایی دارد و یک مشخصه سازی از مدول‌های تزریقی ارائه می‌کند.

قضیه ۲.۵.۲۷. *فرض کنیم T یک Rـ مدول چپ باشد. موارد زیر معادل هستند.*
(۱) T تزریقی است.
(۲) هر دنباله دقیق کوتاه به شکل

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

شکافته می‌شود.
(۳) برای هر Rـ مدول چپ مانند T' که $T \leq T'$، Rـ مدول چپ K چنان وجود دارد که $T' \cong_R T \oplus K$.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). نمودار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_T"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & T & & & \end{tikzcd}$$

چون T تزریقی است پس Rـ همریختی مانند $h : M \longrightarrow T$ وجود دارد که $hf = id_T$. یعنی نمودار جابجایی به شکل زیر داریم

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_T"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"] & N \arrow[r] & 0 \\ & T & & & \end{tikzcd} \qquad (hf = id_T)$$

اکنون طبق قضیه ۱.۵.۱۲، قسمت دوم، حکم به دست می‌آید.
(۲) $\Leftarrow$ (۳). دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T'/T \longrightarrow 0$$

را در نظر می‌گیریم. طبق فرض این دنباله شکافته می‌شود. پس طبق قضیه ۱.۵.۱۲، قسمت سوم، داریم $T' \cong_R T \oplus (T'/T)$. در واقع $K = T'/T$ است.
(۳) $\Leftarrow$ (۱). طبق قضیه بئر، ۲.۵.۲۶، Rـ مدول چپ تزریقی T' چنان وجود دارد که T در T' می‌نشیند. پس طبق فرض Rـ مدول چپ K چنان وجود دارد که $T' \cong_R T \oplus K$. حال طبق تمرین ۲.۵.۳۴، T تزریقی است. $\square$

اکنون قضیه بسیار مهم زیر را داریم.

قضیه ۲.۵.۲۸. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.*
(۱) *R حلقه نیمساده چپ است.*
(۲) *هر Rـ مدول چپ نیمساده است.*
(۳) *هر Rـ مدول چپ تصویری است.*
(۴) *هر Rـ مدول چپ تزریقی است.*

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. طبق قضیه ۲.۱.۳۳، M تصویر همریخت یک Rـ مدول چپ آزاد مانند F است. طبق قضیه ۲.۱.۲۹، $F \cong_R R^{(I)}$ که I اندیس گذاری مناسب است. چون R نیمساده است پس طبق قضیه ۲.۳.۱۶، $R^{(I)}$ نیمساده است (چرا؟). در نتیجه F نیمساده است. اما $M \cong_R F/K$ که K زیرمدولی از F است (چرا؟). حال طبق گزره ۲.۳.۱۰، M نیمساده است.
(۲) $\Leftarrow$ (۳). فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

از Rـ مدول‌ها را در نظر می‌گیریم. چون N نیمساده است پس $N = f(L) \oplus L'$ که $L' \leq N$. حال تعریف می‌کنیم

$$q : N \longrightarrow L, \;\; q(f(l) + l') = l.$$

واضح است که q یک Rـ همریختی خوشتعریف است و $qf = id_L$. پس طبق قضیه ۱.۵.۱۲، دنباله دقیق کوتاه شکافته می‌شود. اکنون طبق قضیه ۲.۴.۷، M تصویری است.
(۳) $\Leftarrow$ (۴). تمرین ۲.۵.۳۸، را ببینید.
(۴) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از R باشد. دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{g} R/I \longrightarrow 0$$

را در نظر می‌گیریم. حال چون I تزریقی است طبق قضیه ۲.۵.۲۷، دنباله شکافته می‌شود. پس طبق قضیه ۱.۵.۱۲، $q : R \longrightarrow I$ وجود دارد که $gi = id_I$. حال ادعا می‌کنیم که داریم $R = I \oplus Ker(q)$.
اگر $r \in R$ آنگاه $r = iq(r) - iq(r) + r$. واضح است که $r - iq(r)$ در $Ker(q)$ قرار دارد. پس $R = I + Ker(q)$. حال اگر $r \in I \cap Ker(q)$ آنگاه $q(r) = 0$. پس داریم که $r = id_I(r) = qi(r) = q(r) = 0$. بنابراین $R = I \oplus Ker(q)$. پس R نیمساده چپ است. □

در پایان این بخش مفهوم پوشش تزریقی را بیان می‌کنیم. البته هیچ قضیه‌ای در این زمینه بیان نمی‌کنیم و هدف ما صرفا آشنایی با این مفهوم است. مفهوم دقیق پوشش تزریقی و خواص بیشتر آن را در درس نظریه مدول خواهید دید. کار را با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۲.۵.۲۹. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد و $N \leq M$. گوییم N زیرمدول اساسی است هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر K از M داشته باشیم $K \cap N \neq 0$. این مفهوم را با $N \leq_e M$ نشان می‌دهیم. اگر $N \leq_e M$ آنگاه به M گسترش اساسی N گوییم.*

مثال ۲.۵.۳۰. $\mathbb{Z}$ یک زیرمدول اساسی $\mathbb{Q}$ است. فرض کنیم $0 \neq K \leq \mathbb{Q}$. پس عنصر ناصفر $\frac{u}{v} \in K$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $0 \neq vx \in K$ و در نتیجه $vx \in \mathbb{Z} \cap K$. این یعنی $\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$.

دو جبردان به نام‌های اکمن و شاف با کمک قضایایی بئر نشان دادند که هر Rــ مدول چپ M در یک Rــ مدول چپ E قرار می‌گیرد که E توسیع اساسی از M و E تزریقی است. سپس نشان دادند که E تحت یکریختی یکتا است. بنابراین تعریف زیر با معنی است.

تعریف ۲.۵.۳۱. *فرض کنیم M یک Rــ مدول چپ باشد. گوییم Rــ مدول چپ E پوشش تزریقی M است هرگاه E تزریقی باشد و $M \leq_e E$. پوشش تزریقی را با $E(M)$ نشان می‌دهیم.*

مثال ۲.۵.۳۲. در مثال قبل نشان دادیم که $\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$. در مثال‌های اولیه این بخش هم دیدیم که $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Q}$ تزریقی است. بنابراین $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

تمرین‌ها

تمرین ۲.۵.۳۳. *نشان دهید که موارد زیر معادل هستند.*

(۱) Rــ مدول چپ T تزریقی است.

(۲) برای هر Rــ همریختی یک به یک مانند $f : M \longrightarrow N$، $\mathbb{Z}$ــ همریختی

$$f^* : Hom_R(N,T) \longrightarrow Hom_R(M,T)$$

پوشا است.

(۳) $Hom_R(-,T)$ هم از چپ و هم از راست دقیق است.

تمرین ۲.۵.۳۴. *فرض کنیم $\{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rــ مدول‌های چپ باشد. در این صورت نشان دهید که اگر $\bigoplus_{i\in I} T_i$ تزریقی باشد آنگاه هر T_i تزریقی است.*

تمرین ۲.۵.۳۵. *اثبات گزاره ۲.۵.۱۵ را کامل کنید.*

تمرین ۲.۵.۳۶. *نشان دهید که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$ــ مدول بخش پذیر است.*

تمرین ۲.۵.۳۷. *فرض کنیم D حلقه تقسیم باشد. نشان دهید که هر Dــ مدول چپ هم تزریقی است و هم تصویری است.*

تمرین ۲.۵.۳۸. *نشان دهید که هر Rــ مدول چپ تزریقی است اگر و تنها اگر هر Rــ مدول چپ تصویری باشد.*

تمرین ۲.۵.۳۹. *نشان دهید که یک $\mathbb{Z}$ــ مدول متناهی بخش پذیر نیست.*

تمرین ۲.۵.۴۰. *پوشش تزریقی $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_p$ که p عددی اول است، را بیابید.*

۶.۲ مدول‌های یکدست

این بخش شاید کوتاه باشد اما مفهوم بسیار مهمی را در بر می‌گیرد که در جبر همولوژی و هندسه جبری به شدت مورد استفاده است. مدول یکدست یا مسطح اولین بار توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی ژان پی‌یر سر معرفی شد. جالب است که بدانید او اولین ریاضیدان جبردان بود که موفق به دریافت جایزه فیلدز (معتبرترین جایزه برای یک ریاضیدان) شد.

با تعریف زیر کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۲. *گوییم Rــ مدول راست M یکدست (مسطح) است هرگاه برای هر Rــ همریختی مدولی یک به یک مانند $f : N \longrightarrow K$، Rــ همریختی $id_M \otimes f : M \otimes N \longrightarrow M \otimes K$ یک به یک باشد.*

گزاره زیر دسته‌ای از مثال برای مدول یکدست فراهم می‌کند.

گزاره ۲.۶.۲. *هر حلقه R یک Rــ مدول راست (R_R) یکدست است.*

اثبات. فرض کنیم $f : N \longrightarrow K$ یک Rــ همریختی مدولی یک به یک باشد. با کمک قضیه ۷.۲.۲.۲، Rــ یکریختی‌های $\bar{f}_1$ و $\bar{f}_2$ وجود دارند که می‌توانیم نموداری به شکل زیر بسازییم.

$$\begin{tikzcd} R \otimes_R N \arrow[r, "id_R \otimes f"] \arrow[d, "\bar{f}_1"] & R \otimes_R K \arrow[d, "\bar{f}_2"] \\ N \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

نمودار بالا جابجایی است. زیرا با توجه به اثبات قضیه ۷.۲.۲.۲، ضابطه $\bar{f}_1$ و $\bar{f}_2$ معلوم است. پس با اثر روی مولدها (!) داریم.

$$f\bar{f}_1(r \otimes n) = f(rn) = rf(n) = f_2(r \otimes f(n)) = f_2(id_R \otimes f)(r \otimes n).$$

اما f و $\bar{f}_1$ یک به یک هستند. بنابراین $f\bar{f}_1$ یک به یک هستند در نتیجه $f_2(id_R \otimes f)$ یک به یک است. این ایجاب می‌کند که $id_R \otimes f$ یک به یک باشد و اثبات کامل است. □

مثال ۳.۶.۲. *$\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_2$ یکدست نیست. $\mathbb{Z}$ــ همریختی یک به یک $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ را با ضابطه $f(k) = 2k$ در نظر می‌گیریم. اما $id_{\mathbb{Z}_2} \otimes f : \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ و داریم*

$$(id_{\mathbb{Z}_2} \otimes f)(\bar{1} \otimes 1) = \bar{1} \otimes 2 = \bar{2} \otimes 1 = 0.$$

اما $\bar{1} \otimes 1 \neq 0$ (چرا؟) پس $Ker(id_{\mathbb{Z}_2} \otimes f) \neq 0$ یعنی $id_{\mathbb{Z}_2} \otimes f$ یک به یک نیست. دقت شود که طبق قضیه ۷.۲.۲.۲، $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ ناصفر است.

لم ۴.۶.۲. *هر عضو خانواده $\{f_i : N_i \longrightarrow K_i\}_{i\in I}$ از Rــ همریختی‌ها، یک به یک است اگر و تنها اگر Rــ همریختی $\sum_{i\in I} f_i : \bigoplus_{i\in I} N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} K_i$ با ضابطه*

$$\sum_{i\in I} f_i((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}$$

یک به یک باشد.

اثبات. بدیهی است. □

حال گزاره زیر را داریم که در ادامه مورد نیاز است.

گزاره ۲.۶.۵. *فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in i}$ خانواده ناتهی از Rــ مدول‌های راست باشد. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} M_i$ یکدست است اگر و تنها اگر هر M_i یکدست باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم $f : N \longrightarrow K$ یک Rــ همریختی یک به یک باشد. اکنون طبق قضیه ۲.۲.۲.۸، $\mathbb{Z}$ــ یکریختی‌های f_1 و f_2 وجود دارند که می‌توانیم نموداری جابجایی (چرا؟) به شکل زیر بسازییم.

$$\begin{array}{ccc}
(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N & \xrightarrow{id\otimes f} & (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R K \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\
\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N) & \xrightarrow{\sum_{i\in I}(id_{M_i}\otimes f)} & \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R K)
\end{array}$$

چون $\bigoplus_{i\in I} M_i$ یکدست است پس $id \otimes f$ یک به یک است و چون نمودار جابجایی است نتیجه می‌شود که $\sum_{i\in I}(id_{M_i} \otimes f)$ یک به یک است (چرا؟). حال طبق لم ۲.۶.۴، $id_{M_i} \otimes f$ یک به یک است و در نتیجه M_i یکدست است.

($\Rightarrow$). چون M_i ها یکدست هستند پس $id_{M_i} \otimes f$ ها Rــ همریختی‌های یک به یک هستند. حال طبق لم ۲.۶.۴، $\sum_{i\in I}(id_{M_i} \otimes f)$ یک به یک است. چون نمودار جابجایی است نتیجه می‌شود که $id \otimes f$ یک به یک است. در نتیجه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ یکدست است. □

تذکر ۲.۶.۶. *حاصل ضرب مستقیم خانواده‌ای از مدول‌های یکدست، ممکن است یکدست نباشد. البته شرط لازم و کافی برای اینکه این اتفاق رخ دهد توسط جبردانان پیدا شده است که خارج از برنامه این درس است. فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in i}$ خانواده ناتهی از Rــ مدول‌های راست باشد. اگر $\prod_{i\in I} M_i$ یکدست باشد آنگاه آیا هر M_i یکدست است؟*

نتیجه ۲.۶.۷. *هر Rــ مدول راست آزاد F یکدست است.*

اثبات. از قضیه ۲.۱.۲۶، گزاره ۲.۶.۲ و گزاره ۲.۶.۵ به دست می‌آید. □

نتیجه ۲.۶.۸. *هر Rــ مدول راست تصویری P یکدست است.*

اثبات. از قسمت (۳) قضیه ۲.۴.۷، نتیجه ۲.۶.۷ و گزاره ۲.۶.۵ به دست می‌آید. □

تذکر ۲.۶.۹. *عکس دو نتیجه آخر در حالت کلی صحیح نیست. اما روی حلقه‌های خاصی صحیح است که معرفی این حلقه‌ها خارج از برنامه این درس است.*

مثال زیر نشان می‌دهد که مدول‌های یکدست دسته‌ای متمایز از مدول‌های نیمساده است.

مثال ۲.۶.۱۰. *طبق قضیه ۲.۳.۱۶، $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ نیمساده است در حالی یکدست نیست (چرا؟). $\mathbb{Z}$ــ مدول $\mathbb{Z}$ یکدست است در حالی که نیمساده نیست (چرا؟).*

تمرین‌ها

تمرین ۱۱.۶.۲. *نشان دهید که موارد زیر معادل هستند.*
(۱) Rـ مدول راست M یکدست است.
(۲) فرض کنیم L، N و K سه Rـ مدول چپ و

$$\circ \longrightarrow L \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow \circ$$

دنباله دقیق کوتاه باشد. در این صورت

$$\circ \longrightarrow M \otimes_R L \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R N \xrightarrow{id_M \otimes g} M \otimes_R K \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق کوتاه از $\mathbb{Z}$ـ همریختی‌های مدولی است.

تمرین ۱۲.۶.۲. *Rـ مدول راست M یکدست است اگر و تنها اگر $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ به عنوان Rـ مدول چپ تزریقی باشد.*

۷.۲ تمرین‌های حل شده از کل مباحث فصل دوم

تمرین ۱.۷.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ آزاد با تولید متناهی باشد. نشان دهید که هر پایه M متناهی عضو دارد.*

حل. فرض کنیم M توسط y_1، ...، y_n تولید شود و $X = \{x_i\}_{i\in I}$ پایه برای M باشد. بنابراین $r_{ij} \in R$ چنان وجود دارد که

$$\begin{cases} y_1 = r_{11}x_{l_1 1} + r_{12}x_{l_1 2} + \dots + r_{1t_1}x_{l_1 t_1} \\ y_2 = r_{21}x_{l_2 1} + r_{22}x_{l_2 2} + \dots + r_{2t_2}x_{l_2 t_2} \\ \quad\vdots \\ y_n = r_{n1}x_{l_n 1} + r_{n2}x_{l_n 2} + \dots + r_{nt_n}x_{l_n t_n} \end{cases}$$

فرض کنیم X' مجموعه تمام x_{ij} های که در تساوی‌های بالا ظاهر شده‌اند، باشد. پس X'، M را تولید می‌کنند. زیرا مولدهای M را تولید می‌کند. اکنون اگر I نامتناهی باشد آنگاه دست کم یک عنصر مانند $x_i \in X \setminus X'$ وجود دارد که x_i توسط اعضای X' تولید می‌شود که این استقلال خطی مجموعه X را نقض می‌کند. پس I متناهی است و حل کامل است.

تمرین ۲.۷.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد که هر ایده‌آل ناصفر آن به عنوان Rـ مدول آزاد است. نشان دهید که R یک دامنه ایده‌آل اصلی است.*

فرض کنیم که $0 \neq x \in R$. پس (ایده‌آل) Rx یک Rـ مدول آزاد ناصفر است. می‌خواهیم نشان دهیم که R دامنه صحیح است. اگر برای عنصر $y \in R$ داشته باشیم $yx = 0$ آنگاه $y(Rx) = 0$ است یعنی $y \in Ann(Rx)$. اما طبق قضیه ۲۶.۱.۲ و تمرین ۱.۷.۲، عدد طبیعی n چنان وجود دارد که داریم $Rx \cong_R R^{(n)}$. پس $y \in Ann(R^{(n)})$ (چرا؟). این نشان می‌دهد که $y(1, 0, 0 \dots, 0) = (0, 0, 0, \dots, 0)$. بنابراین $y = 0$، یعنی R دامنه صحیح است. حال نشان می‌دهیم که هر ایده‌آل R اصلی است. فرض کنیم I ایده‌آل R باشد. طبق فرض I آزاد با پایه $X = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ است. اگر $|\Gamma| > 1$ باشد آنگاه عناصر متمایز x_α و x_β در X وجود دارند که $x_\alpha x_\beta - x_\beta x_\alpha = 0$. این تناقض با پایه بودن X است پس $|\Gamma| = 1$. این یعنی I دوری (اصلی) است. در نتیجه R دامنه ایده‌آل اصلی است.

تمرین ۳.۷.۲. *نشان دهید که $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ ـ مدول $\mathbb{Z}$ آزاد نیست.*

حل. ابتدا باید تذکر دهیم که حاصل ضرب شمارا نامتناهی از مجموعه‌های شمارا نامتناهی، مجموعه‌ای ناشمارا است (چرا؟). حال به برهان خلف، فرض کنیم $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ آزاد است. پس دارای پایه‌ای به صورت $X = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ است. پس طبق قضیه ۲۹.۱.۲، داریم $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \overset{\theta}{\cong} \mathbb{Z}^{(\Gamma)}$. از طرفی ادعا می‌کنیم $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ مجموعه‌ای شمارا است. زیرا اگر فرض کنیم $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ مجموعه اعداد اول باشد (که در این مجموعه p_k k امین عدد اول است) آنگاه رابطه

$$f : \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad f((x_1, x_2, \dots, x_t, 0, 0, \dots)) = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \dots \times p_t^{x_t}$$

یک تابع یک به یک است. پس $|\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}|\leq|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ و در نتیجه ادعا ما اثبات می‌شود. حال چون $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}\subseteq\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ و $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ شمارا است، می‌توانیم Γ را به دو مجموعه مجزای Γ_1 و Γ_2 تجزیه کنیم که $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ و Γ_1 شمارا است و به علاوه $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ را در مدول آزاد F که تولید شده توسط پایه شمارای $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_1}$ است، قرار دهیم. حال طبق قضیه ۲۹.۱.۲، داریم $F\cong\mathbb{Z}^{(\Gamma_1)}$ و چون Γ_1 شمارا است با استدلال مشابهی که در بالا دیدید $\mathbb{Z}^{(\Gamma_1)}$ شمارا است و در نتیجه F شمارا است. بنابراین $F\neq\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$. حال فرض کنیم $\beta\in\Gamma_2$ و

$$p_\beta:\mathbb{Z}^{(\Gamma)}\longrightarrow\mathbb{Z}$$

همان همریختی تصویر روی مولفه β باشد. واضح است که p_β ناصفر است. در نتیجه $f=p_\beta\theta$ همریختی ناصفر است. اما $f(\mathbb{Z}^{(\Gamma_1)})=0$ (چرا؟). این با تمرین ۱۲.۸.۱، در تناقض است.

تمرین ۴.۷.۲. *فرض کنیم F یک Rـ مدول چپ آزاد با پایه X، I یک ایده‌آل سره R، و به علاوه $\pi:F\longrightarrow F/IF$ همریختی طبیعی باشد. آنگاه F/IF یک (R/I)ـ مدول چپ آزاد با پایه $\pi(X)$ و $|X|=|\pi(X)|$.*

حل. فرض کنیم $x+IF\in F/IF$. چون $x\in F$ پس $x=\sum_{i=1}^{k}r_ix_i$ که x_iها در X قرار دارند. پس داریم

$$x+IF=(\sum_{i=1}^{k}r_ix_i)+IF=\sum_{i=1}^{k}(r_ix_i+IF)=$$
$$\sum_{i=1}^{k}(r_i+I)(x_i+IF)=\sum_{i=1}^{k}(r_i+I)\pi(x_i).$$

یعنی $\pi(X)$ مولد F/IF به عنوان (R/I)ـ مدول چپ است. از طرفی دیگر اگر فرض کنیم $\sum_{i=1}^{k}(r_i+I)\pi(x_i)=0$ آنگاه داریم

$$0=\sum_{i=1}^{k}(r_i+I)(x_i+IF)=(\sum_{i=1}^{k}r_ix_i)+IF\;\Rightarrow\;\sum_{i=1}^{k}r_ix_i\in IF.$$

پس $\sum_{i=1}^{k}r_ix_i=\sum_{i=1}^{t}s_if_i$ که $f_i\in F$ و $s_i\in I$. اما f_iها ترکیب خطی عنصرهای X است و I یک ایده‌آل است پس داریم

$$\sum_{i=1}^{k}r_ix_i=\sum_{i=1}^{t}s_if_i=\sum_{i=1}^{m}a_ix'_i$$

که $a_i\in I$ و $x'_i\in X$. چون دو طرف بر حسب عناصر پایه است، استقلال خطی پایه ایجاب می‌کند که $k=m$، $x_i=x'_i$ و $a_i=r_i$ (در صورت نیاز عبارت ۰ اضافه می‌کنیم). از این رو $r_i+I=0$ در حلقه R/I. پس $\pi(X)$ روی R/I مستقل خطی است و در نتیجه F/IF یک

(R/I) ـ مدول چپ آزاد با پایه $\pi(X)$ است.
اما نگاشت $\pi : X \longrightarrow \pi(X)$ یک تناظر است. زیرا اگر برای $x, x' \in X$ که $x \neq x'$ داشته باشیم $\pi(x) = \pi(x')$ در F/IF آنگاه

$$(1 + I)\pi(x) - (1 + I)\pi(x') = 0.$$

در نتیجه $x - x' \in IF$. پس $x - x' = \sum_{i=1}^{t} s_i f_i$ که $f_i \in F$ و $s_i \in I$. اگر روش بالا را تکرار کنیم به $1 \in I$ و در نتیجه تناقض $R = I$ دست خواهیم یافت. بنابراین π یک به یک است. واضح است که پوشا نیز می‌باشد. این یعنی $|\pi(X)| = |X|$.

تمرین ۵.۷.۲. *فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای ناصفر پوشا باشد. اگر F یک S ـ مدول آزاد چپ باشد که هر دو پایه آن عدد اصلی یکسان دارند آنگاه نشان دهید که هر F به عنوان R ـ مدول چپ نیز آزاد است و هر دو پایه آن عدد اصلی یکسان دارند.*

حل. طبق قضیه اول یکریختی حلقه‌ای، $S \cong R/Ker(f)$. چون f ناصفر است پس $Ker(f) \neq R$. قرار می‌دهیم $I = Ker(f)$. حال فرض کنیم X و X' دو پایه برای R ـ مدول آزاد F و $\pi : F \longrightarrow F/IF$ همریختی طبیعی باشد. طبق تمرین ۴.۷.۲، F/IF یک (R/I) ـ مدول چپ آزاد با پایه $\pi(X)$ و $\pi(X')$ است که $|\pi(X)| = |X|$ و $|\pi(X')| = |X'|$. اما طبق فرض برای $S \cong R/I$ داریم $|\pi(X)| = |\pi(X')|$. بنابراین $|X| = |X'|$.

تمرین ۶.۷.۲. *نشان دهید که $\mathbb{Z}$ ـ همریختی پوشا از $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ به $\mathbb{Q}$ وجود دارد.*

حل. می‌دانیم که $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ یک زیرگروه ($\mathbb{Z}$ ـ زیرمدول) است. حال $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Q}$ ـ فضای برداری است. از مجموعه $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی مانند $\{e_i\}_{i\in I}$ می‌سازیم (چگونه؟). حال $\{e_i\}_{i\in I}$ را به یک پایه X برای $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ گسترش می‌دهیم. دقت می‌کنیم $|I|$ نمی‌تواند متناهی باشد (چرا؟). پس دست کم $|I|$ شمارا نامتناهی است. فرض می‌کنیم $\{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots\}$ مجموعه اعداد گویا باشد. حال می‌توانیم یک تابع پوشای $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ را چنان تعریف کنیم که $f(e_i) = \frac{p_i}{q_i}$ (چگونه؟). حال طبق گزاره ۲۲.۱.۲، f قابل گسترش به یک $\mathbb{Q}$ ـ همریختی است یعنی $\mathbb{Q}$ ـ همریختی (پوشا) $F : \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ وجود دارد که $F|_{X'} = f$. حال تحدید F به $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$ ـ همریختی پوشا است (چرا؟) که همان مطلوب مسئله است.

تمرین ۷.۷.۲. *نشان دهید که* $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

حل. طبق لم ۱۸.۱.۲.۲، می‌دانیم که هر عنصر $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ به صورت $\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \otimes (y_i + \mathbb{Z})$ است که $k \geq 1$، $\bar{x}_i \in \mathbb{Z}_n$ و $y_i \in \mathbb{Q}$. پس اگر نشان دهیم عناصری به صورت $\bar{x} \otimes (y + \mathbb{Z})$ که $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ و $y \in \mathbb{Q}$ برابر صفر است کار تمام است. پس از گزاره ۱۷.۱.۲.۲، داریم

$$\bar{x} \otimes (y + \mathbb{Z}) = \bar{x} \otimes (\frac{n}{n}(y + \mathbb{Z})) = n\bar{x} \otimes (\frac{1}{n}(y + \mathbb{Z})) = 0 \otimes (\frac{1}{n}(y + \mathbb{Z})) = 0.$$

تمرین ۸.۷.۲. *مثالی از یک R ـ مدول راست L، یک R ـ مدول چپ M و $N \leq M$ ارائه کنید که* $L \otimes_R N \nleq L \otimes_R M$.

حل. قرار می‌دهیم $N = R = \mathbb{Z}$، $L = \mathbb{Z}_۲$ و $M = \mathbb{Q}$. می‌دانیم که $\mathbb{Z}_۲ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = ۰$ (چرا؟). در حالی که طبق قضیه ۷.۲.۲.۲، داریم $\mathbb{Z}_۲ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_۲$.

تمرین ۹.۷.۲. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و Q میدان کسرهای R باشد. نشان دهید که $Q \otimes_R Q \cong_R Q$. سپس نتیجه بگیرید که اگر M یک Qـ مدول باشد آنگاه $Q \otimes_R M \cong_R M$.*

حل. بسیار واضح است که

$$f : Q \times Q \longrightarrow Q, \quad f((u,v)) = uv$$

یک نگاشت خطی میانی خوشتعریف است. حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ Q \otimes_R Q & Q \end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $Q \otimes_R Q$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک Rـ همریختی مانند g موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ Q \otimes_R Q \arrow[r, dashed, "g"] & Q \end{tikzcd} \qquad (f = g\lambda)$$

اما ضابطه g قابل محاسبه است. زیرا داریم

$$g(x \otimes y) = g\lambda((x,y)) = f((x,y)) = xy.$$

g پوشا است. زیرا برای هر $u \in Q$ داریم

$$g(۱ \otimes u) = ۱ \times u = u.$$

g یک به یک است. زیرا اگر فرض کنیم $x \in Ker(g)$ آنگاه $x = \sum_{i=۱}^{k} u_i \otimes v_i$ است که $k \geq ۱$ و $u_i, v_i \in Q$. اما داریم

$$g(x) = ۰ \ \Rightarrow \ g(\sum_{i=۱}^{k} u_i \otimes v_i) = ۰ \ \Rightarrow \ \sum_{i=۱}^{k} g(u_i \otimes v_i) = ۰ \ \Rightarrow \ \sum_{i=۱}^{k} u_i v_i = ۰.$$

با فرض $u_i = \frac{a_i}{b_i}$ و $v_i = \frac{a'_i}{b'_i}$ داریم $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i a'_i}{b_i b'_i} = 0$. از طرفی داریم

$$x = \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{k} (\frac{a_i}{b_i}) \otimes (\frac{a'_i}{b'_i}) = \sum_{i=1}^{k} (\frac{a_i b'_i}{b_i b'_i}) \otimes (\frac{a'_i}{b'_i}) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} (\frac{a_i}{b_i b'_i}) \otimes (\frac{a'_i b'_i}{b'_i}) = \sum_{i=1}^{k} (\frac{a_i}{b_i b'_i}) \otimes a'_i = \sum_{i=1}^{k} (\frac{a_i a'_i}{b_i b'_i}) \otimes 1 =$$
$$0 \otimes 1 = 0$$

پس $ker(g) = 0$ و طبق لم ١٨.٣.١، g یک به یک است و قسمت اول مسئله حل است.
برای قسمت دوم، چون M یک Qـ فضای برداری است پس آزاد است و طبق قضیه ٢۶.١.٢، داریم $M \cong_Q Q^{(I)}$. در نتیجه $M \cong_R Q^{(I)}$ (چرا؟). پس طبق قسمت اول مسئله و قضیه ٧.٢.٢.٢ و قضیه ٨.٢.٢.٢، داریم

$$Q \otimes_R M \cong_R Q \otimes Q^{(I)} \cong_R (Q \otimes_R Q)^{(I)} \cong_R Q^{(I)} \cong_R M$$

و اثبات کامل است.

تمرین ١٠.٧.٢. *فرض کنیم $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ و M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول باشد. قرار می‌دهیم*

$$M_S = \{\frac{m}{s} \mid m \in M,\ s \in S\}.$$

همچنین فرض می‌کنیم دو عنصر $\frac{m'}{s'}$ و $\frac{m}{s}$ مساوی هستند هرگاه $t \in S$ چنان موجود باشد که $t(sm' - s'm) = 0$. در این صورت اولاً با جمع و ضرب زیر M_S یک $\mathbb{Q}$ـ مدول است

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} \qquad\qquad \frac{u}{v}.\frac{m}{s} = \frac{um}{vs}$$

و ثانیاً $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong_{\mathbb{Z}} M_S$.

حل. قسمت اولا یک بررسی سر راست است. فقط دقت شود که صفر M_S به صورت $\frac{0}{s}$ است. اما قسمت دوم، بسیار واضح است که

$$f : \mathbb{Q} \times M \longrightarrow M_S,\ \ f((\frac{u}{v}, m)) = \frac{um}{v}$$

یک نگاشت خطی میانی خوشتعریف است. حال نمودار زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \times M \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M & M_S
\end{tikzcd}$$

حال طبق گزاره ۱۵.۱.۲.۲، $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$ حاصل ضرب تنسوری است پس طبق تعریف تنسور، یک و دقیقا یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مانند g موجود است که نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}\times M \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M \arrow[r, dashed, "g"] & M_S \end{tikzcd} \qquad (f=g\lambda)$$

اما ضابطه g قابل محاسبه است. زیرا داریم

$$g(\frac{u}{v}\otimes m)=g\lambda((\frac{u}{v},m))=f((\frac{u}{v},m))=\frac{um}{v}.$$

g پوشا است. زیرا برای هر $\frac{m}{s}\in M_S$ داریم

$$g(\frac{۱}{s}\otimes m)=\frac{۱m}{s}=\frac{m}{s}.$$

g یک به یک است. برای نشان دادن این مطلب اول ثابت می‌کنیم که هر عنصر $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$ یک نمایش به صورت $\frac{۱}{v}\otimes m$ دارد. فرض کنیم $\sum_{i=۱}^{k}[\frac{a_i}{b_i}\otimes m_i]\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$. قرار می‌دهیم $v=\prod_{i=۱}^{k} b_i$ و $u_i=\prod_{j\neq i} b_i$. داریم

$$\begin{aligned}&\sum_{i=۱}^{k}[\frac{a_i}{b_i}\otimes m_i]=\sum_{i=۱}^{k}[\frac{a_iu_i}{v}\otimes m_i]=\\&\sum_{i=۱}^{k}[\frac{۱}{s}\otimes a_iu_im_i]=\frac{۱}{s}\otimes[\sum_{i=۱}^{k}a_iu_im_i]=\frac{۱}{s}\otimes m\end{aligned}$$

. حال اگر فرض کنیم $x\in Ker(g)$ آنگاه $x=\frac{۱}{s}\otimes m$ و داریم

$$g(x)=\circ\ \Rightarrow\ g(\frac{۱}{s}\otimes m)=\circ\ \Rightarrow\ \frac{m}{s}=\circ=\frac{\circ}{s'}.$$

پس $t\in S$ چنان وجود دارد که $ts'm=\circ$. واضح است که $ts'\neq\circ$ (چرا؟). حال داریم

$$x=\frac{۱}{s}\otimes m=\frac{ts'}{sts'}\otimes m=\frac{۱}{sts'}\otimes ts'm=\frac{۱}{sts'}\otimes\circ=\circ.$$

پس $ker(g)=\circ$ و طبق لم ۱۸.۳.۱، g یک به یک است و قسمت دوم مسئله حل است.

تمرین ۱۱.۷.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و I یک ایده‌آل R باشد. نشان دهید که اگر M یک Rـ مدول آزاد باشد آنگاه $Ann_R(M/IM)=I$.*

حل. طبق قضیه ۲۶.۱.۲، داریم که $R^{(J)} \cong_R M$. اکنون طبق قضیه ۵.۲.۲.۲، قضیه ۸.۲.۲.۲ و قضیه ۷.۲.۲.۲ داریم

$$M/IM \cong_R (R/I) \otimes_R M \cong_R (R/I) \otimes_R R^{(J)} \cong_R (R/I)^{(J)}.$$

اما $Ann_R(R/I) = I$ (چرا؟). بنابراین داریم $Ann_R((R/I)^{(J)}) = I$ (چرا؟) و در نتیجه $Ann_R(M/IM) = I$ (چرا؟).

تمرین ۱۲.۷.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $R^{(m)} \cong_R R^{(n)}$. نشان دهید که $m = n$.*

حل. طبق نتیجه ۴۰.۲.۱، R دارای ایده‌آل ماکسیمال مانند $\mathcal{M}$ است. حال طبق قضیه ۸.۲.۲.۲، قضیه ۷.۲.۲.۲، داریم

$$\bigoplus_{i=1}^{m} R/\mathcal{M} \cong_R \bigoplus_{i=1}^{m}(R \otimes_R (R/\mathcal{M})) \cong_R (\bigoplus_{i=1}^{m} R) \otimes_R (R/\mathcal{M}) \cong_R$$
$$R^{(m)} \otimes_R (R/\mathcal{M}) \cong_R R^{(n)} \otimes_R (R/\mathcal{M}) \cong_R (\bigoplus_{i=1}^{n} R) \otimes_R (R/\mathcal{M}) \cong_R$$
$$\bigoplus_{i=1}^{n}(R \otimes_R (R/\mathcal{M})) \cong_R \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathcal{M}$$

یکریختی بالا، یکریختی $\bigoplus_{i=1}^{m} R/\mathcal{M} \cong_{R/\mathcal{M}} \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathcal{M}$ را نتیجه می‌دهد (چرا؟). اما $R/\mathcal{M}$ یک میدان است و طبق این خاصیت مقدماتی از فضای برداری که هر دو پایه تعداد مساوی عضو دارند، باید $m = n$ باشد.

تمرین ۱۳.۷.۲. *نشان دهید که اگر ایده‌آل چپ I از حلقه R که به عنوان Rـ مدول چپ ساده باشد به طوری که $I^2 \neq 0$ آنگاه I با یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.*

حل. چون $I^2 \neq 0$ پس $x \in I$ چنان وجود دارد که $Ix \neq 0$. چون I ساده است پس $Ix = I$. در نتیجه عنصر $e \in I$ چنان وجود دارد که $ex = x$. با ضرب طرفین از چپ در e داریم $(e^2 - e)x = 0$. این یعنی این که $e^2 - e \in l.Ann_R(x)$. بنابراین $e^2 - e \in l.Ann_R(x) \cap I$. حال واضح است که $l.Ann_R(x) \cap I$ یک ایده‌آل چپ R است که در I قرار دارد. چون I ساده است پس $l.Ann_R(x) \cap I$ برابر صفر یا I است. اگر $l.Ann_R(x) \cap I$ برابر I باشد آنگاه $I \subseteq l.Ann_R(x)$. پس $Ix = 0$ که تناقض است. پس $l.Ann_R(x) \cap I$ برابر صفر است و در نتیجه $e^2 - e = 0$ یا معادلاً $e^2 = e$. عضو خودتوان مورد نظر همین e می‌باشد. حال کافی است نشان دهیم $Re = I$. واضح است که $Re \subseteq I$. اگر نشان دهیم $Re \neq 0$ از ساده بودن I نتیجه می‌شود که $I = Re$ و کار تمام است. اگر $Re = 0$ آنگاه $e = 0$ و در نتیجه $x = 0$ (چرا؟). این تناقض است و اثبات کامل است.

تمرین ۱۴.۷.۲. *فرض کنیم R نیمساده چپ باشد. آنگاه نشان دهید که هر Rـ مدول چپ ساده با یک زیرمدول ساده R یکریخت است.*

حل. فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ ساده باشد. در این صورت بر طبق نتیجه ۳۳.۳.۱، $R/J\cong_R M$ که J ایده‌آل چپ ماکسیمال R است. طبق فرض ایده‌آل چپ L چنان وجود دارد $R=J\oplus L$. حال داریم $L\cong_R R/J\cong_R M$ (چرا؟). اثبات کامل است.

تمرین ۱۵.۷.۲. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ نیمساده باشد. نشان دهید اشتراک زیرمدول‌های ماکسیمال M برابر صفر است.*

حل. چون M نیمساده است پس طبق قضیه ۱۶.۳.۲، $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$ که M_i ها زیرمدول‌های ساده M هستند. حال فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک زیرمدول ماکسیمال باشد. در این صورت برای هر $i\in I$، $M_i\cap\mathcal{M}$ برابر ۰ یا M_i است. اگر $\mathcal{M}$ با بیش از دوتا از M_i ها اشتراک صفر داشته باشد دیگر نمی‌تواند ماکسیمال باشد (چرا؟). پس $\mathcal{M}$ همه M_i ها را در خود دارد جز یکی! بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $\mathcal{M}$ زیرمدول ساده M_j را در بر ندارد یعنی

$$\bigoplus_{j\neq i\in I}M_i\subseteq\mathcal{M}\subsetneq M.$$

حال اگر $x\in\mathcal{M}\setminus\bigoplus_{j\neq i\in I}M_i$ آنگاه $x\in M_j$. چون M_j ساده است پس $Rx=M_j$. ای یعنی $M_j\subseteq\mathcal{M}$. پس $M=\mathcal{M}$ که تناقض است. بنابراین باید $\mathcal{M}=\bigoplus_{j\neq i\in I}M_i$.
پس می‌توانیم هر زیرمدول ماکسیمال را به صورت $\mathcal{M}_i=\bigoplus_{j\neq i\in I}M_i$ در نظر بگیریم. اکنون واضح است که $\bigcap i\in I\mathcal{M}_i=0$ (چرا؟).

تمرین ۱۶.۷.۲. *فرض کنیم R حلقه جابجایی و P یک Rـ مدول تصویری متناهی مولد باشد. نشان دهید که $Hom_R(P,R)$ یک Rـ مدول متناهی مولد تصویری است.*

حل. چون P یک R مدول چپ تولید متناهی است، طبق تمرین ۳۹.۱.۲ و قضیه ۲۶.۱.۲، دنباله‌ای دقیق به صورت زیر داریم

$$R^{(n)}\xrightarrow{\ f\ }P\longrightarrow 0$$

که $n\in\mathbb{N}$. اکنون می‌توانیم دنباله دقیق کوتاه زیر را بسازیم

$$0\longrightarrow Ker(f)\xrightarrow{\ i\ }R^{(n)}\xrightarrow{\ f\ }P\longrightarrow 0$$

حال چون P، Rـ مدول تصویری است، طبق قضیه ۷.۴.۲، دنباله شکافته می‌شود. پس طبق قضیه ۱۲.۵.۱، داریم $R^{(n)}\cong Ker(f)\oplus P$. اکنون طبق قضیه ۸.۶.۱ و قضیه ۱۲.۶.۱ داریم

$$\begin{aligned}&R^{(n)}\cong(Hom_R(R,R))^{(n)}\cong Hom_R(R^{(n)},R)\cong\\&Hom_R(Ker(f)\oplus P,R)\cong Hom_R(Ker(f),R)\oplus Hom_R(P,R)\end{aligned}$$

اما $R^{(n)}$ یک Rـ مدول آزاد است (چرا؟). پس طبق قضیه ۵.۴.۲، $R^{(n)}$ یک Rـ مدول تصویری است. پس طبق نتیجه ۸.۴.۲، $Hom_R(P,R)$ تصویری است. اما $Hom_R(P,R)$ با یک جمعوند مانند N از $R^{(n)}$ یکریخت است (چرا؟). اما N تولید متناهی است (چرا؟)، پس $Hom_R(P,R)$ تولید متناهی است.

تمرین ۱۷.۷.۲. (کاپلانسکی) *روی یک حلقه جابجایی و موضعی R نشان دهید که هر مدول تولید متناهی تصویری P، آزاد است*[۱].

حل. فرض کنیم $\{p_۱, ..., p_t\}$ مجموعه مولد P از کمترین تعداد باشد (چرا چنین فرضی معتبر است؟) معادلا P با کمتر از t عضو تولید نشود. فرض کنیم F یک مدول آزاد با پایه $x_۱$،...، x_t باشد (چرا چنین F ی وجود دارد؟). تعریف می‌کنیم

$$f : F \longrightarrow P, \;\; f(x_i) = p_i.$$

به وضوح f یک Rـ همریختی پوشا است (چرا؟). فرض کنیم $K = Ker(f)$ و J تنها ایده‌آل ماکسیمال R باشد. نشان می‌دهیم $K \subseteq JF$. فرض کنیم $x = \sum_{i=۱}^{t} r_i x_i \in K \subseteq F$ ولی $x \notin JF$. پس دست کم یک r_j وجود دارد که در J نیست (چرا؟). چون R موضعی است r_j یکال است (چرا؟). اما $f(x) = ۰$ (چرا؟) پس $\sum_{i=۱}^{t} r_i f(x_i) = \sum_{i=۱}^{t} r_i p_i = ۰$. در نتیجه داریم $p_j = r^{-۱} \sum_{j\neq i=۱}^{t} r_i b_i$. این نشان می‌دهد که P با تعداد کمتر از t عنصر هم تولید می‌شود (چرا؟) و این تناقض است. اکنون می‌توانیم دنباله دقیق کوتاه زیر را بسازییم

$$۰ \longrightarrow K \xrightarrow{\;i\;} F \xrightarrow{\;f\;} P \longrightarrow ۰$$

حال چون P، Rـ مدول تصویری است، طبق قضیه ۷.۴.۲، دنباله شکافته می‌شود. پس طبق قضیه ۱۲.۵.۱، می‌توانیم فرض کنیم $F = K \oplus P'$ که $P \cong P'$ (چرا K جمعوند می‌شود؟ اثبات قضیه ۲۸.۵.۲، قسمت (۴) به (۱) را ببینید). در نتیجه $JF = JK \oplus JP'$. اما $JK \subseteq K \subseteq JF$ پس طبق قانون مدولار، داریم $K = JK \oplus (K \cap JP')$. از طرفی $K \cap JP' \subseteq K \cap P' = ۰$ در نتیجه $K = JK$. ادعا می‌کنیم $K = ۰$ [۲]. به برهان خلف، فرض کنیم K ناصفر باشد. چون K جمعوند F است پس تولید متناهی است. فرض کنیم $\{k_۱, ..., k_t\}$ مجموعه مولد K از کمترین تعداد باشد معادلا K با کمتر از t عضو تولید نشود. چون $JK = K$ پس $k_۱ = \sum_{i=۱}^{t} r_i k_i$ که $r_i \in J$. بنابراین $(۱ - r_۱)k_۱ = \sum_{i=۲}^{t} r_i k_i$. اما $۱ - r_۱$ وارون دارد (چرا؟) و در نتیجه تعداد مولدها از t کمتر می‌شود که تناقض است. پس $K = ۰$ و در نتیجه $P \cong P' = F$. بنابراین P آزاد است.

تمرین ۱۸.۷.۲. (کاپلانسکی) *فرض کنیم R یک دامنه ایده‌آل اصلی باشد. نشان دهید که زیرمدول هر Rـ مدول آزاد F یک Rـ مدول آزاد است. در نتیجه روی یک دامنه ایده‌آل اصلی نشان دهید که هر مدول تصویری، آزاد است.*

حل. فرض کنیم P زیرمدول F باشد. چون F آزاد است دارای پایه‌ای مانند $\{e_i\}_{i\in I}$ است. طبق اصل خوشترتیبی می‌توانیم فرض کنیم I خوشترتیب با رابطه "$\preceq$" است. فرض کنیم $i \in I$. زیر مدول تولید شده توسط e_j ها که $j \preceq i$ را با F_i نشان می‌دهیم. همچنین زیرمدول تولید شده توسط

[۱] این قضیه یکی از مهمترین قضیه‌های جبر است که توسط جبردان بزرگ کاپلانسکی به دست آمده است. شرط تولید متناهی قابل حذف است و صورت اصلی این قضیه که توسط خود کاپلانسکی اثبات شده است را در تمرین ۱۹.۸.۲ ببینید.

[۲] اثباتی که در اینجا آمده است همان اثبات لم ناکایاما است. این لم را در درس نظریه حلقه خواهید دید.

e_j ها که $i \prec j$ را با G_i نشان می‌دهیم. اگر $x \in P \cap F_i$ باشد آنگاه به وضوح داریم $x = g + re_i$ که $g \in G_i$. اکنون تعریف می‌کنیم

$$f_i : P \cap F_i \longrightarrow R, f_i(g + re_i) = r.$$

واضح است که f_i یک Rــ همریختی خوشتعریف است. اما $Im(f_i)$ یک ایده‌آل R و در نتیجه دوری است. اگر $Im(f_i) = Ry$ آنگاه $R \cong Ry$ (چرا؟). چون R یک Rــ مدول آزاد (تصویری) است، $Im(f_i)$ آزاد (تصویری) است. پس طبق طبق قضیه ۷.۴.۲، دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow P \cap G_i \xrightarrow{\ i\ } P \cap F_i \xrightarrow{\ f\ } Im(f_i) \longrightarrow \circ$$

شکافته می‌شود. پس طبق قضیه ۱۲.۵.۱، می‌توانیم فرض کنیم $P \cap F_i = (P \cap G_i) \oplus P'_i$ که $P'_i \cong Im(f_i)$ (چرا $P \cap G_i$ جمعوند می‌شود؟ اثبات قضیه ۲۸.۵.۲، قسمت (۴) به (۱) را ببینید). ادعا می‌کنیم $P = \bigoplus_{i \in I} P'_i$. فرض کنیم $p'_1 + \ldots + p'_t = \circ$ که $p'_j \in P'_{i_j}$. می‌توانیم فرض کنیم $i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_t$ (چرا؟). در نتیجه p'_1، p'_2، ...، p'_{t-1} در G_{i_t} قرار دارند. پس $p'_t \in P'_{i_t}$. از طرفی $P'_{i_t} \cap G_{i_t} = \circ$. در نتیجه $p'_t = \circ$. حال استقرایی بقیه p'_j ها صفر می‌شوند. حال طبق قضیه ۱۳.۲.۱، P'_i ها مستقل هستند و $\bigoplus_{i \in I} P'_i$ با معنی است. چون $P'_i \subseteq P \cap F_i \subseteq P$ پس $\bigoplus_{i \in I} P'_i \subseteq P$. فرض کنیم $x \in P \subseteq F$. پس اندیس j وجود دارد که $x \in F_j$ (چرا؟) و بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم j کوچکترین اندیس باشد که $x \in F_j$. پس $x \in P \cap F_j$. در نتیجه $x = g + p'$ که $g \in P \cap G_j$ و $p' \in P'_j$. اما $g \in P \cap F_l$ که $l \prec j$ (چرا؟). چون j کمترین بود باید $g \in \bigoplus_{i \in I} P'_i$ در نتیجه $x \in \bigoplus_{i \in I} P'_i$. اثبات ادعا کامل می‌شود. اما $P'_i \cong Im(f_i) \cong R$ در نتیجه $P = \bigoplus_{i \in I} R$. یعنی P آزاد است.

برای قسمت دوم، فرض کنیم P یک Rــ مدول تصویری باشد. طبق قضیه ۷.۴.۲، R مدول آزاد F وجود دارد که $F \cong P \oplus K$. پس P با یک زیرمدول F یکریخت است. اکنون قسمت اول، کار را تمام می‌کند.

تمرین ۱۹.۷.۲. *فرض کنیم R دامنه ایده‌آل اصلی باشد. اگر M یک Rــ مدول متناهی مولد آنگاه نشان دهید که دنباله دقیق کوتاهی به صورت*

$$\circ \longrightarrow F' \xrightarrow{\ f\ } F \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow \circ$$

وجود دارد که F و F' آزاد هستند.

حل. چون M یک R مدول چپ تولید متناهی است، طبق تمرین ۳۹.۱.۲، دنباله‌ای دقیق به صورت زیر داریم

$$F \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow \circ$$

که F یک Rــ مدول آزاد تولید متناهی است. دنباله بالا را به دنباله دقیق کوتاه زیر گسترش می‌دهیم.

$$\circ \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{\ i\ } F \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow \circ$$

i را همان f مسئله قرار می‌دهیم. طبق تمرین ۱۸.۷.۲، $F' = Ker(f)$، Rــ مدول آزاد است و کار تمام است.

تمرین ۲۰.۷.۲. *فرض کنیم P یک Rــ مدول چپ باشد که R جمعوند آن است. نشان دهید که اگر $R^{(n)} \cong_R P \oplus R^{(m)}$ که $m < n$ آنگاه $P^{(m+1)}$ یک Rــ مدول آزاد است.*

حل. طبق فرض $P = R \oplus K$ که $K \leq P$. داریم

$$P^{(m+1)} \cong P \oplus P^{(m)} \cong P \oplus R^{(m)} \oplus K^{(m)} \cong R^{(n)} \oplus K^{(m)}.$$

بنابراین برای اینکه نشان دهیم $P^{(m+1)}$ مدول آزاد است، کافی است که نشان دهیم $R^{(n)} \oplus K^{(m)}$ مدول آزاد است. این تذکر برای ادامه لازم است که $n \geq m + 1$.
از سوی دیگر داریم

$$R^{(m+1)} \oplus K \cong R^{(m)} \oplus R \oplus K \cong R^{(m)} \oplus P \cong R^{(n)}.$$

پس $R^{(m+1)} \oplus K$ آزاد است. حال طرفین را با K جمع مستقیم می‌کنیم و داریم

$$R^{(n)} \oplus K \cong R^{(n-m-1)} \oplus R^{(m+1)} \oplus K \cong R^{(n-m-1)} \oplus R^{(n)} \cong R^{(2n-m-1)}.$$

پس $R^{(n)} \oplus K$ آزاد است. دوباره طرفین را با K جمع مستقیم می‌کنیم و داریم

$$R^{(n)} \oplus K^{(2)} \cong R^{(2n-m-1)} \oplus K \cong R^{(2n-2m-2)} \oplus R^{(m+1)} \oplus K \cong R^{(2n-2m-2)} \oplus R^{(n)} \cong R^{(3n-2m-2)}$$

پس $R^{(n)} \oplus K^{(2)}$ آزاد است. روند را استقرایی تکرار می‌کنیم تا به مدول آزاد $R^{(n)} \oplus K^{(m)}$ برسیم و این مطلوب ما است.

تمرین ۲۱.۷.۲. *برای هر عنصر خودتوان $e = e^2$ در حلقه R نشان دهید که ایده‌آل چپ Re یک Rــ مدول تصویری است.*

حل. نشان می‌دهیم که $R = Re \oplus R(1 - e)$. فرض کنیم $r \in R$. اما

$$r = re + r - re = re + r(1 - e)$$

در نتیجه $re \in Re$ و $r(1 - e) \in R(1 - e)$. پس $R = Re + R(1 - e)$. حال اگر $a \in Re \cap R(1 - e)$ باشد آنگاه $a = re = s(1 - e)$ که $r, s \in R$. حال داریم

$$ae = re^2 = re = a = r(1 - e)e = r(e - e^2) = r(e - e) = 0.$$

پس $a = 0$ و در نتیجه $Re \cap R(1 - e) = 0$. بنابراین $R = Re \oplus R(1 - e)$. حال چون R یک Rــ مدول چپ آزاد است، طبق قضیه ۵.۴.۲، R تصویری است. طبق نتیجه ۸.۴.۲، Re تصویری است.

تمرین ۲۲.۷.۲. *فرض کنیم R یک Rــ مدول راست تزریقی باشد. برای هر دو ایده‌آل I و J از R نشان دهید که $Ann_R(I) + Ann_R(J) = Ann_R(I \cap J)$.*

حل. چون $I\cap J$ زیرمجموعه (زیرمدول) I و J ست پس داریم که $Ann_R(I) \subseteq Ann_R(I\cap J)$ و $Ann_R(J) \subseteq Ann_R(I\cap J)$. بنابراین $Ann_R(I) + Ann_R(J) \subseteq Ann_R(I\cap J)$. اکنون فرض کنیم $r \in Ann_R(I\cap J)$. حال تعریف می‌کنیم

$$f : I + J \longrightarrow R, \ \ f(x + y) = x + (۱ + r)y.$$

f خوشتعریف است. زیرا اگر $x+y = x'+y'$ آنگاه $x-x' = y'-y$ و در نتیجه $y'-y \in I\cap J$. پس $r(y' - y) = ۰$ یا معادلا $ry = ry'$. بنابراین $x + (۱ + r)y = x' + (۱ + r)y'$. این نشان می‌دهد که $f(x + y) = f(x' + y')$. واضح است که f یک Rـ همریختی است

$$f((x + y)s) = f(xs + ys) = xs + (۱ + r)ys = f(x + y)s.$$

چون R یک Rـ مدول راست تزریقی است، طبق محک بئر، قضیه ۷.۵.۲، f قابل گسترش است یعنی $\bar{f} : R \longrightarrow R$ که $\bar{f}|_{I+J}= f$. فرض می‌کنیم $\bar{f}(۱) = t$. برای هر $s \in I + J$ داریم $f(s) = \bar{f}(s) = \bar{f}(۱)s = ts$. با فرض $s = x + y$ که $x \in I$ و $y \in J$ رابطه

$$f(s) = ts \ \Rightarrow \ x + (۱ + r)y = tx + ty \ \Rightarrow \ (۱ + r - t)y = (t - ۱)x \qquad (*)$$

را داریم. اما $r = (۱ + r - t) + (t - ۱)$ پس کافی است نشان دهیم که $t - ۱$ در $Ann_R(I)$ و $۱ + r - t$ در $Ann_R(J)$ قرار دارند. فرض کنیم $x \in I$. در این صورت $x + ۰ \in I + J$ و در نتیجه از رابطه $(*)$ داریم $(t - ۱)x = (۱ + r - t)۰ = ۰$. پس $t - ۱ \in Ann_R(I)$. با روش مشابه $۱ + r - t \in Ann_R(J)$. پس $r \in Ann_R(I) + Ann_R(J)$ و اثبات کامل است.

تمرین ۲۳.۷.۲. *فرض کنیم R یک دامنه (نه لزوما جابجایی) باشد که حلقه تقسیم نیست. اگر Rـ مدول چپ M هم تزریقی و هم تصویری باشد آنگاه نشان دهید که $M = ۰$.*

حل. بدون کم شدن از کلیت می‌توانیم با کمک قضیه ۷.۴.۲، فرض کنیم M زیرمدول یک Rـ مدول چپ آزاد مانند F با پایه $\{e_i\}_{i\in I}$ است (چرا؟). به برهان خلف، فرض کنیم $۰ \neq m \in M$. در این صورت $m = \sum_{i=۱}^{k} r_ie_i$. بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم $r_۱$ ناصفر است. اکنون فرض کنیم $r \in R$ عنصری ناصفر باشد. چون R دامنه است پس $r_۱r \neq ۰$. اما M تزریقی است پس طبق قضیه ۱۶.۵.۲، بخش پذیر است و $r_۱rM = M$ (چرا؟). در نتیجه داریم $m \in r_۱rM \subseteq r_۱rF$. بنابراین $\sum_{i=۱}^{k} r_ie_i = m = \sum_{i=۱}^{t} r_۱rs_ie'_i$. چون دو طرف بر حسب عناصر پایه است، استقلال خطی پایه ایجاب می‌کند که $k = t$، $e_i = e'_i$ و $r_i = r_۱rs_i$. از جمله داریم $r_۱ = r_rs_۱$. پس $r_۱(۱ - rs) = ۰$. بنابراین $rs = ۱$ (چرا؟). پس هر عنصر ناصفر R یکال است. یعنی R حلقه تقسیم است. این تناقض است. پس $M = ۰$.

تمرین ۲۴.۷.۲. *فرض کنیم M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول باشد که زیرمدول ماکسیمال ندارد. در این صورت M تزریقی است.*

حل. برای این که نشان دهیم M تزریقی است، از قضیه ۱۸.۵.۲، کافی است بگوییم M بخش پذیر است یا معادلا بگوییم برای هر عدد ناصفر n داریم $nM = M$ (چرا؟). به برهان خلف، فرض کنیم عدد ناصفر n موجود باشد که $nM \lneq M$. پس در تجزیه n به اعداد اول، عدد اول

p چنان هست که $pM \lneq M$. حال $\mathbb{Z}$ـ مدول M/pM را در نظر می‌گیریم. واضح است که $Ann(M/pM) = p\mathbb{Z}$. پس طبق لم ۱۱.۴.۱، M/pM یک $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ـ مدول است یا معادلاً یک فضای برداری است. اما هر فضای برداری دارای زیرمدول ماکسیمال است (چرا؟). این ایجاب می‌کند که M نیز زیرمدول ماکسیمال داشته باشد. این تناقض است.

فرض کنیم M زیرمدول ماکسیمال N دارد.

تمرین ۲۵.۷.۲. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و T یک Rـ مدول تزریقی باشد. اگر R میدان نباشد آنگاه نشان دهید که T زیرمدول ماکسیمال ندارد.*

حل. چون R دامنه است پس هر عضو ناصفر R مقسوم علیه صفر راست نیست. طبق قضیه ۱۶.۵.۲، T بخش پذیر است. پس برای هر $x \in T$ و هر $r \in R$ که مقسوم علیه صفر راست نیست، عضو y در T چنان وجود دارد که $x = ry$. این مطلب معادل با این است که برای هر $R \ni r \neq \circ$ داریم $rT = T$. حال به برهان خلف، فرض کنیم T زیرمدول ماکسیمال مانند U دارد. پس T/U یک Rـ مدول ساده است. پس طبق تمرین ۱۵.۸.۱، $Ann_R(T/U) = P$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R است. از طرفی داریم $T/U \cong_R R/P$. چون R میدان نیست پس $P \neq \circ$ (چرا؟). حال فرض می‌کنیم $P \ni x \neq \circ$. پس $x(T/U) = \circ$ (چرا؟) و این یعنی $xT \subseteq U$. اما $xT = T$ پس $T \subseteq U$. در نتیجه $U = T$. این یک تناقض آشکار است.

تمرین ۲۶.۷.۲. *یک مدول چنان مثال بزنید که بخش پذیر باشد اما تزریقی نباشد.*

حل. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}[x]$. می‌دانیم میدان کسرهای R، $\mathbb{Q}(x)$ است. حال قرار می‌دهیم $M = \mathbb{Q}(x)/\mathbb{Z}[x]$. بررسی این که M یک Rـ مدول بخش پذیر است، سر راست است (چرا؟). اما M یک Rـ مدول تزریقی نیست. به برهان خلف، فرض کنیم M یک Rـ مدول تزریقی است. ایده‌آل $<۲, x>$ را در R و همریختی زیر را در نظر می‌گیریم

$$f : <۲, x> \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

که $f(۲) = \circ$ و $f(x) = \frac{۱}{۲} + \mathbb{Z}$. حال نمودار زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] & <۲, x> \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & R \\
& M &
\end{tikzcd}$$

چون M تزریقی است پس نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] & <۲, x> \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & R \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd} \qquad (f = hi)$$

حال فرض کنیم $h(۱) = \frac{p(x)}{q(x)} \in M$. داریم

$$۰ = f(۲) = hi(۲) = h(۲) = ۲h(۱) = \frac{۲p(x)}{q(x)}.$$

پس $\frac{۲p(x)}{q(x)} \in R = \mathbb{Z}[x]$ یا معادلا $q(x)|۲p(x)$. از سوی دیگر داریم

$$\frac{۱}{۲} + \mathbb{Z}[x] = f(x) = hi(x) = h(x) = xh(۱) = \frac{xp(x)}{q(x)}.$$

پس $\frac{xp(x)}{q(x)} - \frac{۱}{۲} \in R = \mathbb{Z}[x]$ یا معادلا $۲q(x)|۲xp(x) - q(x)$. چنین چیزی تناقض است (چرا؟).

تمرین ۲۷.۷.۲. *فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد و $۰ \neq g \in G$. نشان دهید که $\mathbb{Z}$ـ همریختی $h : G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ به طوری که $h(g) \neq ۰$.*

حل. ابتدا دقت می‌کنیم که در $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ همه عناصر مرتبه متناهی هستند و برای هر عدد طبیعی n یک عنصر از مرتبه n در $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ وجود دارد. حال فرض کنیم $H =< g >$. در این صورت H یا با $\mathbb{Z}$ یکریخت است یا با $\mathbb{Z}_n$ که $n \in \mathbb{N}$ (چرا؟). اگر H با $\mathbb{Z}$ یکریخت باشد آنگاه یک $\frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ را در $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \ \ f(k) = \frac{ka}{b} + \mathbb{Z}.$$

واضح است که f یک همریختی ناصفر است. اگر H با $\mathbb{Z}_n$ یکریخت باشد آنگاه یک $\frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ را در $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ چنان در نظر می‌گیریم که مرتبه آن n باشد و قرار می‌دهیم

$$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \ \ f(\bar{k}) = \frac{ka}{b} + \mathbb{Z}.$$

واضح است که f خوشتعریف و همریختی است و همچنین ناصفر است. این نشان می‌دهد که همواره یک همریختی ناصفر مانند f از H به $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ وجود دارد. حال نمودار

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & G \\
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

را در نظر می‌گیریم. چون $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ تزریقی است (چرا؟) پس نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & G \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd} \qquad (f = hi)$$

h همان مطلوب مسئله است و $h(g) \neq ۰$.

تمرین ۲.۷.۲۸. *فرض کنیم a و b دو عنصر در حلقه R باشند که $ab = 1$ و bR در مدول R_R اساسی باشد. در این صورت $ba = 1$.*

حل. فرض کنیم $t \in bR \cap r.Ann_R(a)$. پس $t = bs$ که $s \in R$ و $at = 0$. در نتیجه $s = abs = at = 0$. بنابراین $t = 0$ یا معادلا $bR \cap r.Ann_R(a) = 0$. چون bR در R_R اساسی است باید $r.Ann_R(a) = 0$. اما $a(ba - 1) = aba - a = a - a = 0$. پس $ba - 1 \in r.Ann_R(a) = 0$. در نتیجه $ba - 1 = 0$ یا معادلا $ba = 1$.

تمرین ۲.۷.۲۹. *فرض کنیم R حلقه جابجایی و I ایده‌آل سره R باشد. اگر عضوی مانند $r \in R$ و عضوی ناصفر از $E(R/I)$ مانند x چنان موجود باشند که $rx = 0$ آنگاه نشان دهید که عضوی ناصفر از R/I مانند y وجود دارد که $ry = 0$.*

حل. به برهان خلف، فرض کنیم برای هر $0 \neq y \in R/I$ داشته باشیم $ry \neq 0$. می‌دانیم که $R/I \subseteq E(R/I)$ است و چون $rx = 0$ پس $x \notin R/I$. فرض کنیم $K = Rx$. واضح است که $K \leq E(R/I)$. چون R/I در $E(R/I)$ اساسی است پس $K \cap (R/I) \neq 0$. در نتیجه عضو ناصفری مانند y در $K \cap (R/I)$ وجود دارد. از طرفی $y = tx$ که $t \in R$. واضح است که $ry = 0$ (چرا؟) این تناقض است.

تمرین ۲.۷.۳۰. *نشان دهید که Rـ مدول چپ M نیمساده است اگر و تنها اگر هر زیرمدول سره N اساسی نباشد.*

حل. فرض کنیم M نیمساده باشد. اگر N زیرمدول سره از M باشد آنگاه $M = N \oplus L$ که $L \leq M$. چون N سره است پس L ناصفر است و در نتیجه $N \cap L = 0$. پس N نمی‌تواند اساسی باشد.
فرض کنیم N زیرمدول سره M باشد و N اساسی نباشد. پس زیرمدول K چنان وجود دارد که $K \cap N = 0$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{T \leq M \mid T \cap N = 0\}.$$

چون $K \in \mathcal{A}$ پس $\mathcal{A}$ ناتهی است و با رابطه شمول یه مجموعه جزئا مرتب است. حال طبق لم زرن $\mathcal{A}$ دارای عضو ماکسیمال مانند W است (چرا؟). پس $W \oplus N$ با معنی است. حال $W \oplus N$ زیرمدول اساسی است. چون اگر $W \oplus N$ اساسی نباشد آنگاه $(W \oplus N) \cap U = 0$. پس $U \cap W = 0$ و در نتیجه $N \cap (W \oplus U) = 0$ که این ماکسیمال بودن W در $\mathcal{A}$ را نقض می‌کند. پس $W \oplus N$ زیرمدول اساسی است . اما طبق فرض تنها زیرمدول اساسی خود M است. بنابراین $M = W \oplus T$ و اثبات کامل است.

تمرین ۲.۷.۳۱. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و $S = R \setminus \{0\}$ باشد.*
(۱) اگر دنباله زیر از Rـ مدول‌ها

$$M \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} N$$

دقیق باشد آنگاه دنباله

$$M_S \xrightarrow{f_S(\frac{m}{s})=\frac{f(m)}{s}} K_S \xrightarrow{g_S(\frac{k}{s})=\frac{g(k)}{s}} N_S$$

دقیق است.
(۲) نشان دهید که $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$ـ مدول یکدست است (در حالی که نه آزاد است و نه تصویری).

حل. (۱) تحقیق این مطلب آسان است که $Im(f_S)=(Im(f))_S$ و $Ker(g_S)=(Ker(g))_S$. فرض کنیم $\frac{k}{s}\in Im(f_S)$. پس $\frac{f(m)}{t}=\frac{k}{s}$ که $m\in M$ و $t\in S$. اما $Im(f)=Ker(g)$ پس $\frac{k}{s}\in (Ker(g))_S$. در نتیجه $Im(f_S)\subseteq Ker(g_S)$. حال فرض کنیم $\frac{k}{s}\in Ker(g_S)$. پس $\frac{\circ}{s'}=\circ=\frac{g(k)}{s}=g_S(\frac{k}{s})$. پس $t\in S$ وجود دارد که $ts'g(k)=\circ$ یا معادلا $g(ts'k)=\circ$. پس $ts'k\in Ker(g)$. اما $ts'\neq\circ$ (چرا؟) و داریم

$$\frac{k}{s}=\frac{ts'k}{ts's}\in (Ker(g))_S.$$

پس $Ker(g_S)\subseteq Im(f_S)$. اثبات (۱) کامل است.
(۲) فرض کنیم $f:N\longrightarrow K$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی یک به یک باشد. در این صورت طبق قسمت (۱)، $f_S:N_S\longrightarrow K_S$ یک $\mathbb{Z}$ـ همریختی مدولی یک به یک است. با کمک تمرین ۱۰.۷.۲، $\mathbb{Z}$ـ یکریختی‌های $\bar{f}_۱$ و $\bar{f}_۲$ وجود دارند که می‌توانیم نموداری به شکل زیر بسازییم.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[r, "id\otimes f"] \arrow[d, "\bar{f}_۱"] & \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} K \arrow[d, "\bar{f}_۲"] \\
N_S \arrow[r, "f_S"] & K_S
\end{tikzcd}$$

نمودار بالا جابجایی است. با توجه به اثبات تمرین ۱۰.۷.۲، ضابطه $\bar{f}_۱$ و $\bar{f}_۲$ معلوم است. پس با اثر روی مولدها (!) داریم.

$$\begin{aligned}
&f_S\bar{f}_۱(\frac{u}{v}\otimes n)=f_S(\frac{un}{v})=\\
&\frac{f(un)}{v}=\frac{uf(n)}{v}=f_۲(\frac{u}{v}\otimes f(n))=f_۲(id\otimes f)(\frac{u}{v}\otimes n)
\end{aligned}$$

. اما f_S و $\bar{f}_۱$ یک به یک هستند. بنابراین $f_S\bar{f}_۱$ یک به یک هستند در نتیجه $f_۲(id_R\otimes f)$ یک به یک است. این ایجاب می‌کند که $id\otimes f$ یک به یک باشد و اثبات کامل است.

تمرین ۳۲.۷.۲. *با یک مثال نشان دهید که قضیه ۸.۲.۲.۲ برای حاصل ضرب مستقیم صحیح نیست.*

حل. فرض کنیم $R=\mathbb{Z}$، $M=\mathbb{Q}$، $I=\mathbb{N}$ و $N_i=\mathbb{Z}_{p^i}$ که p عددی اول است. حال چون برای هر i داریم $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{p^i}=\circ$ (چرا؟) پس واضح است که $\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{p^i})=\circ$. این در حالی است که $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^i}\neq\circ$. برای نشان دادن ادعای آخر، فرض کنیم $x=(\bar{۱},\bar{۱},\bar{۱},\ldots)$ باشد. واضح است که $<x>\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. پس طبق قضیه ۷.۲.۲.۲ داریم

$$<x>\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

پس $Q \otimes_{\mathbb{Z}} < x >$ ناصفر است حال همریختی شمول $i :< x > \longrightarrow \mathbb{Z} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i}$ یک به یک است و $\mathbb{Q}$ یکدست است (چرا؟) پس

$$id_{\mathbb{Q}} \otimes i : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} < x > \;\; \longrightarrow \;\; \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i}$$

یک به یک است. در نتیجه $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i} \neq 0$.

۸.۲ تمرین‌های مروری فصل دوم

تمرین ۱.۸.۲. اگر F و F' دو Rـ مدول آزاد باشند آنگاه نشان دهید که $F \otimes_R F'$ یک Rـ مدول آزاد است. سپس نتیجه بگیرید که اگر R دامنه باشد و x و y دو عنصر ناصفر به ترتیب در F و F' باشند آنگاه $x \otimes x'$ عنصری ناصفر است.

تمرین ۲.۸.۲. فرض کنیم R جابجایی و e عنصر خودتوان متمایز از ۰ و ۱ باشد. نشان دهید که Re نمی‌تواند Rـ مدول آزاد باشد.

تمرین ۳.۸.۲. فرض کنیم p عددی اول باشد و

$$\mathbb{Q}_p = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{k}{p^k},\ k \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

نشان دهید که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Q}_p$ آزاد نیست.

تمرین ۴.۸.۲. اگر R دامنه باشد آنگاه نشان دهید که برای هر Rـ مدول چپ M که آزاد باشد داریم $Ann_R(M) = 0$.

تمرین ۵.۸.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. آیا در $R^{(n)}$ می‌توان $n+1$ عنصر مستقل خطی یافت؟

تمرین ۶.۸.۲. نشان دهید که $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

تمرین ۷.۸.۲. فرض کنیم M یک R مدول راست، N یک Rـ مدول چپ و I ایده‌آل حلقه R باشد. اگر $MI = 0$ و $IN = 0$ آنگاه نشان دهید که $M \otimes_R N \cong_{\mathbb{Z}} M \otimes_{R/I} N$.

تمرین ۸.۸.۲. فرض کنیم R دامنه ایده‌آل اصلی و Q میدان کسرهای R باشد. نشان دهید که $Q \otimes_R Q \cong_R Q$.

تمرین ۹.۸.۲. فرض کنیم E گسترش میدانی، میدان F باشد. نشان دهید که

$$F[x] \otimes_F E \cong_F E[x].$$

تمرین ۱۰.۸.۲. فرض کنیم R دامنه صحیح، $S = R \setminus \{0\}$ و M یک Rـ مدول باشد. قرار می‌دهیم

$$M_S = \{\frac{m}{s} \mid m \in M,\ s \in S\}.$$

همچنین فرض می‌کنیم دو عنصر $\frac{m'}{s'}$ و $\frac{m}{s}$ مساوی هستند هرگاه $t \in S$ چنان موجود باشد که $t(sm' - s'm) = 0$. در این صورت اگر Q میدان کسرهای R باشد آنگاه اولا با جمع و ضرب زیر M_S یک Qـ مدول است.

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} \qquad\qquad \frac{u}{v}.\frac{m}{s} = \frac{um}{vs}$$

ثانیا $Q \otimes_R M \cong_R M_S$.

تمرین ۱۱.۸.۲. فرض کنیم V یک Fـ فضای برداری است و $S = End_F(V)$. نشان دهید که V یک Sـ مدول چپ ساده است.

تمرین ۱۲.۸.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای باشد که برای هر $x \in R$ داشته باشیم $x^۲ = x$. نشان دهید که R نیمساده چپ است اگر و تنها اگر R متناهی باشد.

تمرین ۱۳.۸.۲. فرض کنیم R حلقه نیمساده چپ و I ایده‌آل R باشد. در این صورت نشان دهید که اگر $I^۲ = ۰$ باشد آنگاه $I = ۰$.

تمرین ۱۴.۸.۲. فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ نیمساده باشد. اگر L و K دو زیرمدول M باشند و $f : L \longrightarrow K$ یک Rـ همریختی باشد آنگاه f قابل توسیعی به Rـ همریختی $F : M \longrightarrow M$ است.

تمرین ۱۵.۸.۲. فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد و $m|n$. یک دنباله دقیق کوتاه به صورت

$$۰ \longrightarrow \frac{n}{m}\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow m\mathbb{Z}_n \longrightarrow ۰$$

بسازید و سپس نشان دهید که موارد زیر معادل هستند.
(۱) دنباله بالا شکافته می‌شود.
(۲) $(m, n) = ۱$.
(۳) $\mathbb{Z}_n$ـ مدول $m\mathbb{Z}_n$ تصویری است.

تمرین ۱۶.۸.۲. فرض کنیم P یک Rـ مدول چپ تصویری باشد و نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \\ K & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

با سطر دقیق باشد. اگر $gh = ۰$ آنگاه نشان دهید که یک Rـ همریختی مانند $\alpha : P \longrightarrow K$ وجود دارد که $f\alpha = h$.

تمرین ۱۷.۸.۲. تمام $\mathbb{Z}$ـ مدول‌های متناهی تولید تصویری را شناسایی کنید.

تمرین ۱۸.۸.۲. نشان دهید که ایده‌آل اصلی چپ Rx در حلقه R یک Rـ مدول تصویری است اگر و تنها اگر $l.Ann_R(x)$ با یک خودتوان تولید شود.

تمرین ۱۹.۸.۲. (کاپلانسکی) روی یک حلقه جابجایی و موضعی نشان دهید که هر مدول تصویری، آزاد است.

تمرین ۲۰.۸.۲. فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد که I ایده‌آل R است. اگر T یک Rـ مدول تزریقی باشد آنگاه نشان دهید که $Ann_T(I)$ یک (R/I)ـ مدول تزریقی است.

تمرین ۲.۸.۲۱. یک مدول R ـ مدول چپ ساده تصویری چنان بسازید که تزریقی نباشد. (راهنمایی: حلقه R را به صورت
$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$$
که F یک میدان است در نظر بگیرید).

تمرین ۲.۸.۲۲. فرض کنیم R یک دامنه ایده‌آل اصلی چپ باشد. اگر M یک R ـ مدول چپ تزریقی باشد آنگاه برای هر $K \leq M$، M/K یک R ـ مدول چپ تزریقی است.

تمرین ۲.۸.۲۳. فرض کنیم $R = S \times T$ باشد که $S = R(1, 0)$. موارد زیر را نشان دهید.
(۱) S یک حلقه است.
(۲) اگر M یک R ـ مدول چپ باشد آنگاه M یک S ـ مدول چپ است. برعکس، اگر M یک S ـ مدول چپ باشد آنگاه یک R ـ مدول چپ است.
(۳) R ـ مدول چپ M تزریقی است اگر و تنها اگر S ـ مدول چپ M تزریقی باشد.

تمرین ۲.۸.۲۴. اگر $R[x]$ یک R ـ مدول چپ تزریقی باشد آنگاه نشان دهید که R تزریقی است.

تمرین ۲.۸.۲۵. نشان دهید که $\mathbb{Q}[[x]]$ یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول تزریقی است.

تمرین ۲.۸.۲۶. فرض کنیم M یک R ـ مدول چپ و T یک R ـ مدول چپ تزریقی باشد. نشان دهید
$$Ann_R(x_1) \cap ... \cap Ann_R(x_n) \subseteq Ann_R(y)$$
که x_iها در M و $y \in T$ اگر و تنها اگر f_1، ...، f_n در $Hom_R(M, T)$ چنان موجود باشند که $y = f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)$.

تمرین ۲.۸.۲۷. فرض کنیم R یک دامنه صحیح اصلی و I یک ایده‌آل سره ناصفر R باشد. نشان دهید R/I یک (R/I) ـ مدول تزریقی است.

تمرین ۲.۸.۲۸. فرض کنیم R دامنه (نه لزوما جابجایی) باشد. در این صورت اگر ${}_RR$ تزریقی باشد آنگاه R حلقه تقسیم است.

تمرین ۲.۸.۲۹. اگر R حلقه جابجایی باشد نشان دهید که $R[x]$ یک R ـ مدول یکدست است.

تمرین ۲.۸.۳۰. فرض کنیم M و N دو R ـ مدول یکدست روی حلقه جابجایی R باشند. آنگاه $M \otimes_R N$ یک R ـ مدول یکدست است.

تمرین ۲.۸.۳۱. فرض کنیم R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای Q باشد. در این صورت Q یک R ـ مدول یکدست است.

فصل ۳

شرط‌های زنجیری

در این فصل دسته دیگر از مدول‌ها را معرفی خواهیم کرد که جایگاه ویژه در نظریه‌ی حلقه و مدول دارد. این بخش در سایر شاخه‌های جبر مانند نظریه جبری اعداد و هندسه جبری کاربرد وسیع دارد. این دسته از مدول‌ها ابتدا در کارهای ریاضیدان معروف، دیوید هیلبرت، ظاهر شدند و سپس در کارهای تاثیرگذارترین ریاضیدان زن، امی نوتر، زیر ذره‌بین قرار گرفتند. به پاس خدمات وسیع نوتر برای ریاضی، این دسته از مدول‌ها، توسط ریاضیدانان با نام مدول‌های نوتری اسم گذاری شدند. اما برای درک بهتر این فصل از دید تاریخی وارد مفهوم مدول نوتری نمی‌شویم و ابتدا مدول‌های آرتینی را معرفی می‌کنیم که بعد از حدودا ۲۵ سال از اولین کارهای نوتر، وارد جبر شد. جالب است که بدانید ایمل آرتین نیر یک جبردان بسیار قهار بود که مدول‌هایی را با ایده گرفتن از کارهای نوتر معرفی کرد که بعدها ریاضیدانان به پاس خدمات آرتین، بر این مدول‌ها نام مدول آرتینی نهادنند. مانند سایر بخش‌ها ایده تعریف را از فضای برداری وام می‌گیریم تا خواننده ارتباط بهتری برقرار کند.

۱.۳ مدول‌ها و حلقه‌های آرتینی

فرض کنیم V یک Fـ فضای برداری با بعد متناهی n باشد. فرض کنیم که می‌خواهیم زیرفضاهای برداری را با رابطه شامل بودن، $\supseteq$، به شکل زنجیر وار از بالا به پایین مرتب کنیم. مسلما در راس این زنجیر باید خود V را قرار دهیم. در مرحله بعد باید یک زیرفضای سره از V مانند W را قرار دهیم. مسلما تعداد عناصر پایه‌ای که در W ظاهر می‌شوند از n کمتر است. اگر این روند را ادامه دهیم حداکثر بعد از n مرحله، در انتها به زیرفضای صفر خواهیم رسید. این مطلب ما را به سمت تعریف زیر سوق می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. گوییم M مدول آرتینی است هرگاه هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند*

$$N_۱ \supseteq N_۲ \supseteq N_۳ \ldots$$

سرانجام متوقف شود. به عبارتی دیگر، عدد طبیعی n موجود باشد که

$$N_n = N_{n+۱} = N_{n+۲} = \cdots .$$

مثال ۲.۱.۳. *هر فضای برداری متناهی البعد، یک مدول آرتینی است.*

مثال ۳.۱.۳. *هر $\mathbb{Z}$ـ مدول متناهی (مانند $\mathbb{Z}_n$) یک مدول آرتینی است.*

مثال ۴.۱.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول آرتینی است (تمرین ۴۶.۲.۱ را ببینید).*

مثال ۵.۱.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ آرتینی نیست. زیرا $\cdots \supseteq ۴\mathbb{Z} \supseteq ۲\mathbb{Z}$ متوقف نمی‌شود.*

مثال ۶.۱.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. در این صورت $\prod_{i=۱}^{\infty} M$ به عنوان Rـ مدول چپ آرتینی نیست. به طور کلی جمع مستقیم و حاصل ضرب مستقیم تعداد نامتناهی مدول چپ، نمی‌تواند آرتینی باشد.*

تذکر ۷.۱.۳. *آرتین به جای آرتینی از "شرط زنجیر کاهشی" در مقالات خود استفاده می‌کرد.*

در ادامه قضیه‌های را خواهیم آورد که ساختن مثال‌های متنوع آرتینی را برای ما راحتر می‌کند.

قضیه ۸.۱.۳. *فرض کنیم M، N و T سه Rـ مدول چپ و دنباله*

$$۰ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow ۰$$

دقیق کوتاه باشد. در این صورت T آرتینی است اگر و تنها اگر M و N آرتینی باشند.

اثبات. $(\Leftarrow)$. فرض کنیم

$$M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq M_۳ ...$$

یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M باشد. پس

$$f(M_۱) \supseteq f(M_۲) \supseteq f(M_۳) ...$$

یک زنحیر نزولی از زیرمدول‌های T است. پس طبق فرض عدد طبیعی n چنان وجود دارد که

$$f(M_n) = f(M_{n+۱}) = f(M_{n+۲}) = \cdots.$$

اما f یک‌به‌یک است پس $M_n = M_{n+۱} = \cdots$. یعنی M آرتینی است. حال فرض کنیم

$$N_۱ \supseteq N_۲ \supseteq N_۳ ...$$

یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های N باشد. پس

$$g^{-۱}(N_۱) \supseteq g^{-۱}(N_۲) \supseteq g^{-۱}(N_۳) ...$$

یک زنحیر نزولی از زیرمدول‌های T است. پس طبق فرض عدد طبیعی n چنان وجود دارد که

$$g^{-۱}(N_n) = g^{-۱}(N_{n+۱}) = g^{-۱}(M_{n+۲}) = \cdots.$$

اما g پوشا است پس $N_n = N_{n+۱} = \cdots$ (چرا؟). یعنی N آرتینی است.
$(\Rightarrow)$. فرض کنیم
$$T_۱ \supseteq T_۲ \supseteq T_۳ ...$$
یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های T باشد. قرار می‌دهیم

$$M_i = f^{-۱}(T_i), \ \ N_i = g(T_i), \ \ f_i = f|_{M_i}, \ \ g_i = g|_{T_i}.$$

با توجه به فرض عدد n و m چنان وجود دارند که زنجیر نزولی ساخته شده توسط N_iها و زنجیر نزولی ساخته شده توسط M_iها به ترتیب از مرحله n و m متوقف خواهند شد. حال قرار می‌دهیم $k = max\{m, n\}$. اکنون نمودار جابجایی زیر را داریم.

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & M_{k+۱} \arrow[r, "f_{k+۱}"] \arrow[d, "id"'] & T_{k+۱} \arrow[r, "g_{k+۱}"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+۱} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & ۰ \\
۰ \arrow[r] & M_k \arrow[r, "f_k"] & T_k \arrow[r, "g_k"] & N_k \arrow[r] & ۰
\end{tikzcd}$$

حال چون i همریختی شمول است، طبق لم ۱۱.۵.۱، i پوشا است. بنابراین $T_k = T_{K+۱}$ (چرا؟).
به روش مشابه $T_k = T_{k+۲}$ و الی آخر. یعنی T آرتینی است. $\square$

نتیجه زیر ارتباط بین آرتینی بودن را با زیر مدول و مدول خارج قسمتی بیان می‌کند.

نتیجه ۹.۱.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و N زیرمدول M باشد. در این صورت M آرتینی است اگر و تنها اگر N و M/N آرتینی باشد.*

اثبات. برای اثبات فقط به دنباله دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow ۰$$

و قضیه ۸.۱.۳، دقت کنید. $\square$

نتیجه ۱۰.۱.۳. *فرض کنیم $M_۱$، ...، M_t تعداد متناهی از Rـ مدول‌های چپ باشند. در این صورت $\bigoplus_{i=۱}^{t} M_i$ آرتینی است اگر و تنها اگر هر M_i آرتینی باشد.*

اثبات. برای اثبات فقط به استقرا روی t، دنباله دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow M_۱ \xrightarrow{\lambda_۱} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{p_۲} M_۲ \longrightarrow ۰$$

و قضیه ۸.۱.۳، دقت کنید. $\square$

قضیه زیر یک مشخصه‌سازی دیگر برای مدول‌های آرتینی ارائه می‌کند.

قضیه ۳.۱.۱۱. *Rـ مدول چپ M آرتینی است اگر و تنها اگر هر خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M عضو مینیمال (نسبت به رابطه جزیی مرتب شامل بودن، $\supseteq$) داشته باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. به برهان خلف، فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ عضو مینیمال ندارد. حال عنصر N_1 را در $\mathcal{A}$ انتخاب می‌کنیم. چون N_1 مینیمال نیست پس عنصر N_2 در $\mathcal{A}$ چنان وجود دارد که $N_1 \supsetneq N_2$. این روند را تکرار می‌کنیم. پس به زنجیر نزولی دست می‌یابیم که متوقف نمی‌شود. این تناقض با آرتینی بودن M است.
($\Rightarrow$). فرض کنیم

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \ldots$$

یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M باشد. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = \{N_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. واضح است که $\mathcal{A}$ ناتهی است پس طبق فرض عنصر مینیمال مانند N_k دارد. این نشان می‌دهد که برای هر $i \geq k$ باید داشته باشیم $N_k = N_i$. یعنی M آرتینی است. $\square$

حال وقت آن است که مفهوم آرتینی را برای حلقه‌ها تعریف کنیم.

تعریف ۳.۱.۱۲. *گوییم حلقه R آرتینی چپ (راست) است هرگاه مدول ${}_RR$ (R_R) آرتینی باشد. اگر حلقه R هم آرتینی چپ و هم راست باشد آنگاه گوییم R آرتینی است.*

مثال ۳.۱.۱۳. *هر حلقه تقسیم آرتینی است.*

مثال ۳.۱.۱۴. *هر حلقه متناهی مانند $\mathbb{Z}_n$ آرتینی است.*

مثال ۳.۱.۱۵. *حلقه $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}[x]$ آرتینی نیستند.*

مثال ۳.۱.۱۶. *حلقه*

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

یک حلقه آرتینی راست است که آرتینی چپ نیست (تمرین ۳.۱.۲۴ را ببینید).

مثال ۳.۱.۱۷.

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

یک حلقه آرتینی چپ است که آرتینی راست نیست (تمرین ۳.۱.۲۴ را ببینید).

تذکر ۳.۱.۱۸. *اگر R یک حلقه آرتینی باشد آنگاه هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های R متوقف می‌شود. زیرا هر ایده‌آل یک ایده‌آل چپ است. اما اگر هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های R متوقف شود لزومی ندارد هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های چپ R هم متوقف شود. برای مثال حلقه معرفی شده در مثال ۳.۱.۱۶ در نظر بگیرید. چون این حلقه آرتینی راست است پس هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های متوقف می‌شود. زیرا هر ایده‌آل یک ایده‌آل راست است. اما این حلقه آرتینی چپ نیست و در نتیجه آرتینی نیست.*

قضیه زیر مشخص می‌کند که یک مدول متناهی مولد روی یک حلقه آرتینی، آرتینی است.

قضیه ۱۹.۱.۳. *حلقه R آرتینی چپ است اگر و تنها اگر هر Rـ مدول چپ M که متناهی مولد است آرتینی باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ متناهی تولید باشد. بر طبق قضیه ۳۳.۱.۲، Rـ مدول آزاد چپ تولید متناهی F و زیر مدول K از F چنان وجود دارند که $F/K \cong_R M$. حال طبق تمرین ۱.۷.۲ و نتیجه ۲۹.۱.۲ داریم که $F \cong_R \bigoplus_{i=1}^{t} R$. چون R آرتینی چپ است پس طبق نتیجه ۱۰.۱.۳، F آرتینی است. اکنون طبق نتیجه ۹.۱.۳، F/K آرتینی است. این نشان می‌دهد که M آرتینی است.
($\Rightarrow$). واضح است که R یک Rـ مدول چپ متناهی مولد است. پس طبق فرض $_RR$ آرتینی است. $\square$

تمرین‌ها

تمرین ۲۰.۱.۳. *مدولی چنان مثال بزنید که زیرمدولی آرتینی داشته باشد اما خودش آرتینی نباشد. مدولی چنان مثال بزنید که مدول خارج قسمتی آرتینی داشته باشد اما خودش آرتینی نباشد. اگر هر زیرمدول سره از یک مدول، آرتینی باشد آیا خود مدول آرتینی است؟*

تمرین ۲۱.۱.۳. *اگر M یک Rـ مدول چپ باشد که برای ایده‌آل I از R داشته باشیم $IM = 0$ آنگاه نشان دهید که M یک Rـ مدول چپ آرتینی است اگر و تنها اگر M یک (R/I)ـ مدول چپ آرتینی باشد.*

تمرین ۲۲.۱.۳. *یک مدول نیمساده در چه زمانی آرتینی است؟*

تمرین ۲۳.۱.۳. *نشان دهید که اگر R دامنه ایده‌آل اصلی باشد و I یک ایده‌آل R آنگاه R/I آرتینی است.*

تمرین ۲۴.۱.۳. *ادعاهای مثال‌های ۱۷.۱.۳ و ۱۶.۱.۳ را اثبات کنید.*

تمرین ۲۵.۱.۳. *نشان دهید که هر دامنه صحیح آرتینی یک میدان است.*

۲.۳ مدول‌ها و حلقه‌های نوتری

فرض کنیم V یک Fـ فضای برداری با بعد متناهی n باشد. فرض کنیم که می‌خواهیم زیرفضاهای برداری را با رابطه شمول، $\subseteq$، به شکل زنجیر وار از پایین به بالا مرتب کنیم. مسلما در ابتدای این زنجیر باید زیرفضای 0 را قرار دهیم. در مرحله بعد باید یک زیرفضای ناصفر از V مانند W را قرار دهیم. مسلما تعداد عناصر پایه‌ای که در W ظاهر می‌شوند از n کمتر است. اگر این روند را ادامه دهیم حداکثر بعد از n مرحله، در انتها به زیرفضای V خواهیم رسید. این مطلب ما را به سمت تعریف زیر سوق می‌دهد.

تعریف ۱.۲.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. گوییم M مدول نوتری است هرگاه هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند*

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 ...$$

سرانجام متوقف شود. به عبارتی دیگر، عدد طبیعی n موجود باشد که

$$N_n = N_{n+1} = N_{n+2} = \cdots .$$

مثال ۲.۲.۳. *هر فضای برداری متناهی البعد، یک مدول نوتری و آرتینی است.*

مثال ۳.۲.۳. *هر $\mathbb{Z}$ـ مدول متناهی (مانند $\mathbb{Z}_n$) یک مدول نوتری و آرتینی است.*

مثال ۴.۲.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول آرتینی است که نوتری نیست (تمرین ۱.۲.۴۶ را ببینید).*

مثال ۵.۲.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ آرتینی نیست در حالی که نوتری است. زیرا با توجه به شکل زیرمدول‌های $\mathbb{Z}$ و این مطلب که تعداد مقسوم علیه‌های یک عدد صحیح متناهی است، همه زنجیرهای صعودی در $\mathbb{Z}$ ایستا می‌شوند.*

مثال ۶.۲.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. در این صورت $\prod_{i=1}^{\infty} M$ به عنوان Rـ مدول چپ نوتری نیست. به طور کلی جمع مستقیم و حاصل ضرب مستقیم تعداد نامتناهی مدول چپ، نمی‌تواند نوتری باشد.*

مثال ۷.۲.۳. *فرض کنیم M مجموعه تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با جمع معمولی توابع باشد. واضح است که M یک $\mathbb{R}$ـ فضای برداری است. برای هر عدد حقیقی r قرار می‌دهیم*

$$N_r = \{f \in M \mid f(x) = 0,\ |x| \leq r\}.$$

این فضای برداری نه نوتری است و نه آرتینی! (چرا؟).

تذکر ۸.۲.۳. *نوتر به جای نوتری از "شرط زنجیر افزایشی" در مقالات خود استفاده می‌کرد.*

در ادامه قضیه‌های را خواهیم آورد که ساختن مثال‌های متنوع نوتری را برای ما راحتر می‌کند.

قضیه ۹.۲.۳. *فرض کنیم M، N و T سه Rـ مدول چپ و دنباله*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دقیق کوتاه باشد. در این صورت T نوتری است اگر و تنها اگر M و N نوتری باشند.

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم
$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 ...$$
یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M باشد. پس
$$f(M_1) \subseteq f(M_2) \subseteq f(M_3) ...$$
یک زنحیر صعودی از زیرمدول‌های T است. پس طبق فرض عدد طبیعی n چنان وجود دارد که
$$f(M_n) = f(M_{n+1}) = f(M_{n+2}) = \cdots .$$
اما f یک‌به‌یک است پس $M_n = M_{n+1} = \cdots$. یعنی M نوتری است. حال فرض کنیم
$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 ...$$
یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های N باشد. پس
$$g^{-1}(N_1) \subseteq g^{-1}(N_2) \subseteq g^{-1}(N_3) ...$$
یک زنحیر صعودی از زیرمدول‌های T است. پس طبق فرض عدد طبیعی n چنان وجود دارد که
$$g^{-1}(N_n) = g^{-1}(N_{n+1}) = g^{-1}(M_{n+2}) = \cdots .$$
اما g پوشا است پس $N_n = N_{n+1} = \cdots$ (چرا؟). یعنی N نوتری است.
($\Rightarrow$). فرض کنیم
$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 ...$$
یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های T باشد. قرار می‌دهیم
$$M_i = f^{-1}(T_i), \quad N_i = g(T_i), \quad f_i = f|_{M_i}, \quad g_i = g|_{T_i}.$$
با توجه به فرض عدد n و m چنان وجود دارند که زنجیر صعودی ساخته شده توسط N_iها و زنجیر صعودی ساخته شده توسط M_iها به ترتیب از مرحله n و m متوقف خواهند شد. حال قرار می‌دهیم $k = max\{m, n\}$. اکنون نمودار جابجایی زیر را داریم.
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "id"'] & T_k \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "i"'] & N_k \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{k+1} \arrow[r, "f_{k+1}"] & T_{k+1} \arrow[r, "g_{k+1}"] & N_{k+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
حال چون i همریختی شمول است، طبق لم ۱۱.۵.۱، i پوشا است. بنابراین $T_k = T_{K+1}$ (چرا؟). به روش مشابه $T_k = T_{k+2}$ و الی آخر. یعنی T نوتری است. $\square$

نتیجه زیر ارتباط بین نوتری بودن را با زیر مدول و مدول خارج قسمتی بیان می‌کند.

نتیجه ۱۰.۲.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ و N زیرمدول M باشد. در این صورت M نوتری است اگر و تنها اگر N و M/N نوتری باشد.*

اثبات. برای اثبات فقط به دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

و قضیه ۹.۲.۳، دقت کنید. □

نتیجه ۱۱.۲.۳. *فرض کنیم M_1 ، ...، M_t تعداد متناهی از Rـ مدول‌های چپ باشند. در این صورت $\bigoplus_{i=1}^{t} M_i$ نوتری است اگر و تنها اگر هر M_i نوتری باشد.*

اثبات. برای اثبات فقط به استقرا روی t، دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\lambda_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

و قضیه ۹.۲.۳، دقت کنید. □

قضیه زیر یک مشخصه‌سازی دیگر برای مدول‌های نوتری ارائه می‌کند.

قضیه ۱۲.۲.۳. *Rـ مدول چپ M نوتری است اگر و تنها اگر هر خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M عضو ماکسیمال (نسبت به رابطه جزیی مرتب شمول، $\subseteq$) داشته باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. به برهان خلف، فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ عضو ماکسیمال ندارد. حال عنصر N_1 را در $\mathcal{A}$ انتخاب می‌کنیم. چون N_1 ماکسیمال نیست پس عنصر N_2 در $\mathcal{A}$ چنان وجود دارد که $N_1 \subsetneq N_2$. این روند را تکرار می‌کنیم. پس به زنجیر صعودی دست می‌یابیم که متوقف نمی‌شود. این تناقض با نوتری بودن M است.
($\Rightarrow$). فرض کنیم

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \ldots$$

یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M باشد. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = \{N_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. واضح است که $\mathcal{A}$ ناتهی است پس طبق فرض عنصر ماکسیمال مانند N_k دارد. این نشان می‌دهد که برای هر $i \geq k$ باید داشته باشیم $N_k = N_i$. یعنی M نوتری است. □

قضیه‌ها و نتایج بالا با تغییر در صفت آرتینی به صفت نوتری باز هم صحیح بودن. اکنون قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که فقط برای مدول نوتری صحیح است و برای آرتینی صحیح نیست.

قضیه ۱۳.۲.۳. *Rـ مدول چپ M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول M متناهی تولید باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). به برهان خلف، فرض کنیم M زیرمدولی مانند N دارد که متناهی تولید نیست. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{K \leq M \mid K \text{ متناهی تولید است}\}.$$

واضح است که 0 در $\mathcal{A}$ قرار دارد. پس طبق قضیه ۱۲.۲.۳، $\mathcal{A}$ دارای عنصر ماکسیمال مانند L است. از طرفی $L \subsetneq N$ (چرا؟). پس برای $n \in N \setminus L$ زیرمدول $L' = L + Rn$ تولید متناهی است و $L' \in \mathcal{A}$. واضح است که L' ماکسیمال بودن L را در $\mathcal{A}$ نقض می‌کند.

$(\Rightarrow)$. فرض کنیم
$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \dots$$
یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M باشد. واضح است که $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ یک زیرمدول M است (چرا؟). طبق فرض N تولید متناهی است. فرض کنیم x_1، ...، x_t مولدهای N باشند. در این صورت اندیس j چنان وجود دارد که تمام x_iها در N_j قرار می‌گیرند (چرا؟). در نتیجه زنجیر صعودی بالا باید متوقف شود (چرا؟). □

تذکر ۱۴.۲.۳. *واضح است که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ قضیه ۱۳.۲.۳، برای حالت آرتینی را نقض می‌کند. اما مشابه قضیه ۱۳.۲.۳، برای آرتینی را در درس نظریه مدول خواهید دید که به جای تولید متناهی، باید مفهوم هم‌ـ تولید متناهی جایگزین شود.*

حال وقت آن است که مفهوم نوتری را برای حلقه‌ها تعریف کنیم.

تعریف ۱۵.۲.۳. *گوییم حلقه R نوتری چپ (راست) است هرگاه مدول $_RR$ (R_R) نوتری باشد. اگر حلقه R هم نوتری چپ و هم راست باشد آنگاه گوییم R نوتری است.*

مثال ۱۶.۲.۳. *هر حلقه تقسیم نوتری است.*

مثال ۱۷.۲.۳. *هر حلقه متناهی مانند $\mathbb{Z}_n$ نوتری است.*

مثال ۱۸.۲.۳. *حلقه $\mathbb{Z}$ آرتینی نیست در حالی که نوتری هستند.*

مثال ۱۹.۲.۳. *حلقه*
$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$
یک حلقه نوتری راست است که نوتری چپ نیست (تمرین ۳۰.۲.۳ را ببینید).

مثال ۲۰.۲.۳.
$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$
یک حلقه نوتری چپ است که نوتری راست نیست (تمرین ۳۰.۲.۳ را ببینید).

تذکر ۲۱.۲.۳. *همان طور که در ابتدای فصل اشاره شد، هیلبرت بود که به نوعی از مفهوم نوتری در کارهای خود که روی حلقه‌های جابجایی انجام می‌داد، استفاده کرد. در حقیقت هیلبرت به جای نوتری از "هر ایده‌آل تولید متناهی" در مقالات خود استفاده می‌کرد (قضیه ۱۳.۲.۳ را ببینید).*

تذکر ۲۲.۲.۳. *اگر R یک حلقه نوتری باشد آنگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R متوقف می‌شود. زیرا هر ایده‌آل یک ایده‌آل چپ است. اما اگر هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R متوقف شود لزومی ندارد هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های چپ R هم متوقف شود. برای مثال حلقه معرفی شده در مثال ۱۹.۲.۳ در نظر بگیرید. چون این حلقه نوتری راست است پس هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های متوقف می‌شود. زیرا هر ایده‌آل یک ایده‌آل راست است. اما این حلقه نوتری چپ نیست و در نتیجه نوتری نیست.*

قضیه زیر مشخص می‌کند که یک مدول متناهی مولد روی یک حلقه نوتری، نوتری است.

قضیه ۲۳.۲.۳. *حلقه R نوتری چپ است اگر و تنها اگر هر Rـ مدول چپ M که متناهی مولد است نوتری باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ متناهی تولید باشد. بر طبق قضیه ۳۳.۱.۲، Rـ مدول آزاد چپ تولید متناهی F و زیر مدول K از F چنان وجود دارند که $M \cong_R F/K$. حال طبق تمرین ۱.۷.۲ و نتیجه ۲۹.۱.۲ داریم که $F \cong_R \bigoplus_{i=1}^{t} R$. چون R نوتری چپ است پس طبق نتیجه ۱۱.۲.۳، F نوتری است. اکنون طبق نتیجه ۱۰.۲.۳، F/K نوتری است. این نشان می‌دهد که M نوتری است.
($\Rightarrow$). واضح است که R یک Rـ مدول چپ متناهی مولد است. پس طبق فرض $_RR$ نوتری است. $\square$

تذکر ۲۴.۲.۳. *همان طور که در مثال‌ها مشاهد کرده‌اید، مدول آرتینی وجود دارد که نوتری نیست! اما جالب است که بدانید مشابه این مطلب برای حلقه‌های یکدار صحیح نیست. یعنی هر حلقه آرتینی چپ حتما نوتری چپ است. در واقع وقتی در سال ۱۹۲۷ آرتین مفهوم شرط زنجیر کاهشی را معرفی کرد تا سال ۱۹۳۹ ریاضیدانان مطلبی را که برای حلقه‌های آرتینی ثابت می‌کردند برای نوتری مجددا اثبات می‌کردند. اما در سال ۱۹۳۹ دو جبردان به نام‌های هاپکینز و دیگر لیویتسکی در دو مقاله مجزا ثابت کردن که هر حلقه آرتینی چپ، نوتری چپ است. هر چند باید اشاره کنیم که ریاضیدان ژاپنی یاسو آکی‌زوکی در حدود همان سال‌ها به صورت مستقل نتیجه‌ای مشابه را در حالت جابجایی اثبات کرده بود. اثبات این قضیه جالب را در درس نظریه حلقه خواهید دید.*

این بخش را با قضیه بسیار مهم که از کارهای هیلبرت به دست آمده است به پایان می‌رسانیم. این قضیه کار را برای ارائه مثال از حلقه‌های نوتری ساده می‌کند. شکل امروزی این قضیه به شکل زیر است.

قضیه ۲۵.۲.۳. (*قضیه پایه هیلبرت*) *فرض کنیم R یک حلقه نوتری چپ باشد. در این صورت حلقه $R[x_1, ..., x_n]$ نوتری چپ است.*

اثبات. فرض کنیم مطلب را برای حالت $n = 1$ اثبات کرده‌ایم. با استقرا روی n و قرار دادن $S = R[x_1, ..., x_{n-1}]$ آنگاه $R[x_1, ..., x_n] = S[x_n]$ نوتری چپ است. پس فقط برای $n = 1$ قضیه را اثبات می‌کنیم. قرار می‌دهیم $S = R[x]$. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از S باشد. برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ قرار می‌دهیم

$$I(n) = \{r \in R \mid \text{عضوی مانند } rx^n + r_{n-1}x^{n-1} + ... + r_0 \text{ در } I \text{ موجود باشد}\}$$

اثبات دو ادعای زیر را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.
ادعای اول: $I(n)$ یک ایده‌آل چپ از R است.
ادعای دوم: همواره داریم $I(n) \subseteq I(n+1)$.
حال

$$I(0) \subseteq I(1) \subseteq I(2) \subseteq ...$$

یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های چپ در R است. طبق ادعای اول و دوم، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$

$$I_۱(n) \subseteq I_۲(n) \subseteq I_۳(n) \subseteq \dots$$

یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های چپ در R است. پس طبق فرض عدد طبیعی t چنان وجود دارد که $I(t) = I(t+۱) = \dots$. اما چون R نوتری چپ است طبق قضیه ۱۳.۲.۳، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، $I(n)$ تولید متناهی است. فرض کنیم $\{r_{n۱}, r_{n۲}, \dots, r_{nj_n}\}$ مجموعه مولد $I(n)$ باشد. طبق تعریف $I(n)$ عنصر f_{nj} در I وجود دارد که

$$f_{nj} = r_{nj}x^n + \cdots.$$

حال نشان می‌دهیم مجموعه متناهی

$$X = \{f_{nj} \mid ۱ \leq n \leq t, \quad ۱ \leq j \leq j_n\}$$

مولد برای I است. فرض کنیم $g(x) \in I$ و درجه $g(x)$ برابر با k باشد. با استقرا روی k ثابت می‌کنیم X مولد I است. اگر $k = ۰$ باشد آنگاه $r = g(x)$. واضح است که r توسط $X \supseteq \{r_{۰۱}, r_{۰۲}, \dots, r_{۰j_۰}\}$ تولید می‌شود. حال فرض کنیم اگر $g(x) \in I$ از درجه کمتر از k باشد آنگاه X مولد $g(x)$ است (فرض استقرا). حکم را برای k اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $g(x) = rx^k + \dots$. اکنون دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول: $k \leq t$. طبق تعریف داریم $r \in I(k)$. پس

$$r = s_۱r_{k۱} + s_۲r_{k۲} + \dots + s_{j_k}r_{kj_k}.$$

اما

$$f_{ki} = r_{ki}x^k + \dots \in I \qquad ۱ \leq i \leq j_k$$

پس

$$h(x) = g(x) - \sum_{i=۱}^{j_k} f_{kj}$$

از درجه کمتر از k است (چرا؟). پس طبق فرض استقرا $h(x)$ با X تولید می‌شود. در نتیجه $g(x)$ توسط X تولید می‌شود.

حالت دوم: $k > t$. داریم $I(t) = I(k)$ و در نتیجه $r \in I(k) = I(t)$. پس

$$r = s_۱r_{t۱} + s_۲r_{t۲} + \dots + s_{j_t}r_{tj_t}.$$

اما

$$f_{ti} = r_{ti}x^t + \dots \in I \qquad ۱ \leq i \leq j_t$$

پس

$$h(x) = g(x) - x^{k-t}\sum_{i=۱}^{j_t} f_{tj}$$

از درجه کمتر از k است (چرا؟). پس طبق فرض استقرا $h(x)$ با X تولید می‌شود. در نتیجه $g(x)$ توسط X تولید می‌شود. پس هر ایده‌آل S تولید متناهی است و طبق قضیه ۱۳.۲.۳، مدول $_SS$ نوتری است و اثبات کامل است. $\square$

تمرین‌ها

تمرین ۲۶.۲.۳. *مدولی چنان مثال بزنید که زیرمدولی نوتری داشته باشد اما خودش نوتری نباشد. مدولی چنان مثال بزنید که مدول خارج قسمتی نوتری داشته باشد اما خودش نوتری نباشد. اگر هر زیرمدول سره از یک مدول، نوتری باشد آیا خود مدول نوتری است؟*

تمرین ۲۷.۲.۳. *اگر M یک Rـ مدول چپ باشد که برای ایده‌آل I از R داشته باشیم $IM = 0$ آنگاه نشان دهید که M یک Rـ مدول چپ نوتری است اگر و تنها اگر M یک (R/I)ـ مدول چپ نوتری باشد.*

تمرین ۲۸.۲.۳. *یک مدول نیمساده در چه زمانی نوتری است؟*

تمرین ۲۹.۲.۳. *نشان دهید که اگر R دامنه ایده‌آل اصلی باشد آنگاه R نوتری است.*

تمرین ۳۰.۲.۳. *ادعاهای مثال‌های ۲۰.۲.۳ و ۱۹.۲.۳ را اثبات کنید.*

تمرین ۳۱.۲.۳. *نشان دهید که در یک حلقه نوتری R که هر ایده‌آل چپ با دو عنصر تولید شود، اصلی است آنگاه R ایده‌آل اصلی چپ است.*

تمرین ۳۲.۲.۳. *ادعاهای ظاهر شده در متن اثبات قضیه پایه هیلبرت را اثبات کنید.*

تمرین ۳۳.۲.۳. *نشان دهید که عکس قضیه پایه هیلبرت صحیح است.*

تمرین ۳۴.۲.۳. *نشان دهید که قضیه پایه هیلبرت برای حلقه آرتینی صحیح نیست.*

تمرین ۳۵.۲.۳. *آیا قضیه هیلبرت برای حلقه غیر یکدار صحیح است؟*

۳.۳ سری ترکیبی و طول یک مدول

در این بخش یک مشخصه‌سازی دیگر برای مدول‌های نوتری و آرتینی ارائه می‌کنیم. ایده اصلی تعریف جدید را باز هم از فضای برداری وام می‌گیریم. فرض کنیم V یک Fـ فضای برداری با پایه $\{e_1, ..., e_t\}$ باشد. قرار می‌دهیم $W_i = < e_1, ..., e_i >$. در این صورت یک زنجیر به صورت زیر داریم

$$W_0 = 0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq W_3 \subsetneq ... \subsetneq W_t = V.$$

یک بررسی سر راست نشان می‌دهد که W_{j+1}/W_j با میدان F یکریخت است یا معادلا یک Fـ مدول ساده است. این مطلب ما را به تعریف زیر سوق می‌دهد.

تعریف ۱.۳.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ باشد. زنجیری به شکل زیر که با 0 شروع و به M ختم می‌شود زنجیر سره از زیرمدول‌های M گوییم*

$$M_0 = 0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_t = M.$$

به عدد t طول زنجیر سره یا به طور خلاصه طول زنجیر گوییم. همچنین به M_{j+1}/M_j عامل خارج قسمت زنجیر سره گوییم. اگر برای هر i، مدول خارج قسمتی M_{j+1}/M_j ساده باشد، به زنجیر سره، سری ترکیبی گوییم.

مثال ۲.۳.۳. *در $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_{12}$ دو زنجیر سره زیر را در نظر می‌گیریم*

$$M_0 = \{\bar{0}\} \subsetneq M_1 = \{\bar{0}, \bar{6}\} \subsetneq M_2 = \mathbb{Z}_{12}$$
$$N_0 = \{\bar{0}\} \subsetneq N_1 = \{\bar{0}, \bar{6}\} \subsetneq N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} \subsetneq N_3 = \mathbb{Z}_{12}.$$

زنجیر سره اول یک سری ترکیبی نیست چون M_2/M_1 ساده نیست (چرا؟) اما زنجیر سره دوم یک سری ترکیبی است.

مثال ۳.۳.۳. *در مدول ساده M سری ترکیبی زیر را داریم*

$$M_0 = 0 \subsetneq M_1 = M.$$

تذکر ۴.۳.۳. *وقتی که*

$$M_0 = 0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_t = M$$

یک سری ترکیبی برای Rـ مدول چپ M باشد آنگاه چون مدول خارج قسمتی M_{j+1}/M_j ساده است، نمی‌توان زیرمدولی بین M_j و M_{j+1} قرار دهیم در حقیقت M_j در M_{j+1} ماکسیمال است. دقت شود که M_1 ساده یا زیرمدول مینیمال M و M_{t-1} ماکسیمال در M است. پس اگر سری ترکیبی داشته باشیم نمی‌توانیم طول آن را افزایش دهیم.

مثال ۵.۳.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول‌های $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ سری ترکیبی ندارند. زیرا با کمک تذکر ۴.۳.۳، یکی زیرمدول ساده ندارد و دیگری زیرمدول ماکسیمال ندارد.*

قضیه زیر ارتباط سری ترکیبی، نوتری و آرتینی را معلوم می‌کند.

قضیه ۶.۳.۳. *Rــ مدول چپ M سری ترکیبی دارد اگر و تنها اگر M هم نوتری و هم آرتینی باشد.*

اثبات. ($\Leftarrow$). فرض کنیم

$$M_\circ = \circ \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_t = M$$

یک سری ترکیبی برای Rــ مدول چپ M باشد. چون M_1 و M_2/M_1 ساده هستند، پس آرتینی (نوتری) هستند. حال طبق نتیجه ۹.۱.۳ (۱۰.۲.۳)، M_2 آرتینی (نوتری) است. حال M_2 آرتینی (نوتری) و M_3/M_2 ساده ــ آرتینی ــ (نوتری) است، پس از نتیجه ۹.۱.۳، M_3 آرتینی (نوتری) است. این روند را ادامه می‌دهیم و در نتیجه $M = M_t$ آرتینی (نوتری) است.

($\Rightarrow$). چون M آرتینی است پس طبق قضیه ۱۱.۱.۳، M زیرمدول مینیمال، ساده، مانند M_1 دارد. پس زنجیر سره

$$M_\circ = \circ \subsetneq M_1$$

را داریم. حال M/M_1 طبق نتیجه ۹.۱.۳، آرتینی است. پس طبق قضیه ۱۱.۱.۳، M/M_1 زیرمدول مینیمال، ساده، مانند M_2/M_1 دارد. پس زنجیر سره

$$M_\circ = \circ \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$$

را داریم. چون M نوتری است روند بالا نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند. این ایجاب می‌کند که M سری ترکیبی داشته باشد. □

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷.۳.۳. *در مدول $\mathbb{Z}_6$ دو سری ترکیبی زیر را داریم*

$$M_\circ = \{\bar{\circ}\} \subsetneq M_1 = \{\bar{\circ}, \bar{2}\} \subsetneq M_2 = \mathbb{Z}_6$$
$$N_\circ = \{\bar{\circ}\} \subsetneq N_1 = \{\bar{\circ}, \bar{2}, \bar{3}\} \subsetneq N_2 = \mathbb{Z}_6.$$

طول هر دو سری ترکیبی برابر ۲ است و سری ترکیبی دیگری ندارد. عدد ۲ بسیار خاص است و این مثال ما را به سمت تعریف زیر سوق می‌دهد.

تعریف ۸.۳.۳. *فرض کنیم Rــ مدول چپ M سری ترکیبی داشته باشد. به طول کوتاه‌ترین سری ترکیبی M، طول مدول M گوییم و با $l(M)$ نشان می‌دهیم. اگر M سری ترکیبی نداشته باشد، طول M را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.*

اکنون قضیه زیر را داریم.

قضیه ۹.۳.۳. *فرض کنیم Rــ مدول چپ M دارای طول متناهی m باشد. در این صورت زیرمدول سره N از M طول متناهی $n < m$ دارد.*

اثبات. فرض کنیم

$$M_\circ = \circ \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_t = M$$

یک سری ترکیبی برای Rـ مدول چپ M باشد. واضح است که داریم $M_{i-۱} \cap N \subseteq M_i \cap N$.
فرض کنیم $M_{i-۱} \cap N \subsetneq M_i \cap N$. نشان خواهیم داد که $(M_i \cap N)/(M_{i-۱} \cap N)$ مدولی ساده است. قرار می‌دهیم

$$f : M_i \cap N \longrightarrow M_i/M_{i-۱}, \quad f(x) = x + M_{i-۱}.$$

واضح است که f یک همریختی ناصفر است و چون $M_i/M_{i-۱}$ ساده است، f پوشا است (چرا؟). اما

$$Ker(f) = M_{i-۱} \cap M_i \cap N = M_{i-۱} \cap N.$$

پس طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم

$$(M_i \cap N)/(M_{i-۱} \cap N) \cong M_i/M_{i-۱}.$$

بنابراین $(M_i \cap N)/(M_{i-۱} \cap N)$ مدولی ساده است. اکنون اگر از میان tتا زیرمدول ناصفر به صورت $M_i \cap N$ از N، تکراری‌ها را حذف کنیم یک سری ترکیبی برای N به دست می‌آید. طبق تعریف طول، باید $l(N) \leq l(M)$ باشد. اگر $l(N) = l(M)$ باشد آنگاه آن t زیرمدول از N تکراری نیستند. به عبارتی باید $M_{i-۱} \cap N \subsetneq M_i \cap N$. حال چون مدول صفر در N قرار دارد و $N \not\subseteq M_t = M$، می‌توانیم فرض کنیم که بزرگترین اندیس مانند j چنان وجود دارد که $M_j \subsetneq N$ و $N \not\subseteq M_{j+۱}$. اما $(M_{j+۱} \cap N)/M_j$ زیرمدولی از مدول ساده $M_{j+۱}/M_j$ است. پس دو حالت زیر رخ می‌دهد.
حالت اول: $M_{j+۱} \cap N = M_{j+۱}$. این یعنی این که $M_{j+۱} \subseteq N$. این تناقض آشکار با انتخاب ما از j است.
حالت دوم: $M_{j+۱} \cap N = M_j$. پس $M_{j+۱} \cap N = M_j \cap N$. این با $M_{i-۱} \cap N \subsetneq M_i \cap N$ در تناقض است.
بنابراین $l(N) < l(M)$. $\square$

این بخش را با قضیه مهم زیر به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱۰.۳.۳. (جردن‌ـ هلدر) *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ با طول متناهی $l(M) = n$ باشد. در این صورت طول هر دو سری ترکیبی برای M برابر عدد n است و هر زنجیر سره از زیرمدول‌های M را می‌توان به یک سری ترکیبی تبدیل کرد.*

اثبات. فرض کنیم

$$M_۰ = ۰ \subsetneq M_۱ \subsetneq \ldots \subsetneq M_t = M$$

یک زنجیر سره برای Rـ مدول چپ M باشد. طبق قضیه ۹.۳.۳، داریم

$$۰ \subsetneq l(M_۱) < l(M_۲) < \ldots < l(M_t) = l(M) = n.$$

چون $l(M_i)$ها عدد صحیح مثبت هستند، باید $t \leq n$. حال اگر

$$N_۰ = ۰ \subsetneq N_۱ \subsetneq \ldots \subsetneq N_t = M$$

یک سری ترکیبی برای Rـ مدول چپ M باشد آنگاه طبق تعریف طول، باید $n \leq t$. در نتیجه $n = t$.
برای اثبات قسمت دوم، فرض کنیم

$$M_0 = 0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_t = M \qquad (*)$$

یک زنجیر سره برای Rـ مدول چپ M باشد. اگر هر M_{j+1}/M_j ساده باشد آنگاه سری بالا یک سری ترکیبی است و چیزی برای اثبات نداریم. اگر M_{j+1}/M_j ساده نباشد آنگاه بین M_j و M_{j+1} زیرمدول‌هایی اضافه می‌کنیم تا یک زنجیر سره با عوامل مدول خارج قسمتی ساده به دست آید. یعنی زنجیر سره‌ایی به صورت

$$N_{j_1} = M_j \subsetneq N_{j_2} \subsetneq \ldots \subsetneq N_{k_j} = M_{j+1} \qquad (**)$$

که هر N_{j_i+1}/N_{j_i} ساده است (چگونه می‌توان چنین N_{j_i}هایی ساخت؟). حال $(**)$ را در $(*)$ در جای مناسب جایگزین می‌کنیم. آن قدر عملیات بالا را تکرار می‌کنیم تا به زنجیر سره‌ایی برسیم که عوامل خارج قسمتی آن ساده باشند، یعنی یک سری ترکیبی. دقت شود که چون طول متناهی است و طول هر دو سری ترکیبی عددی یکسان است، این روند مجبور است متوقف شود. □

تمرین‌ها

تمرین ۱۱.۳.۳. *فرض کنیم M_1 ، ...، M_k ، Rـ مدول‌های چپ ساده باشند. یک سری ترکیبی برای $\bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ بنویسید.*

تمرین ۱۲.۳.۳. *نشان دهید جمع مستقیم نامتناهی مدول ساده، سری ترکیبی ندارد.*

تمرین ۱۳.۳.۳. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول چپ ساده باشند که $M^{(k)} \cong_R N^{(t)}$. نشان دهید که $k = t$ و $M \cong N$.*

تمرین ۱۴.۳.۳. *اگر N زیرمدولی از Rـ مدول چپ M باشد آنگاه نشان دهید که*

$$l(M) = l(N) + l(M/N).$$

تمرین ۱۵.۳.۳. *اگر M_1 و M_2 با طول متناهی باشند آنگاه نشان دهید که*

$$l(M_1 \oplus M_2) = l(m_1) + l(M_2).$$

حکم مسئله را برای تعداد متناهی گسترش دهید.

۴.۳ مدول‌های تولید متناهی روی دامنه ایده‌آل اصلی

می‌دانیم که هر گروه آبلی یک $\mathbb{Z}$ـ مدول است. از طرفی قضیه بسیار معروفی برای گروه‌های آبلی تولید متناهی داریم که به قضیه اساسی گروه‌های آبلی تولید متناهی معروف است. جهت یادآوری، قضیه اساسی گروه‌های آبلی تولید متناهی می‌گوید که هر گروه آبلی تولید متناهی ($\mathbb{Z}$ـ مدول) به صورت

$$\mathbb{Z}^{(k)} \oplus Z_{m_۱} \oplus ... \oplus Z_{m_t}$$

است که k یک عدد صحیح نامنفی و m_iها توانی از اعداد اول (نه لزوما متمایز) هستند. با در نظر گرفتن این مطلب که $\mathbb{Z}$ یک دامنه ایده‌آل اصلی (حلقه نوتری) بسیار خاص است، این مطلب برای جبردانان وسوسه کننده است که آیا می‌توان قضیه ساختاری مشابه با قضیه اساسی گروه‌های آبلی تولید متناهی برای مدول‌های تولید متناهی مانند M روی یک حلقه نوتری مانند R بیان کرد؟ در این بخش جواب این پرسش را وقتی که حلقه R دامنه ایده‌آل اصلی باشد می‌دهیم. باید اشاره کنیم که مشابه قضیه ساختاری این بخش برای زمانی که R یک دامنه ایده‌آل اصلی ناجابجایی است (یعنی حلقه‌ای که دامنه است، از چپ و راست اصلی است ولی ناجابجایی است. ارائه مثال از چنین حلقه‌های ساده نیست و نیاز به معلومات بیشتری در زمینه حلقه‌ها دارد)، نیز وجود دارد که از حیطه این درس خارج است.

در ابتدا یادآوری می‌کنیم که طبق نتیجه ۱۱.۲.۲.۲، وقتی حلقه R جابجایی باشد هر دو پایه از یک Rـ مدول آزاد دارای عدد اصلی یکسان هستند. این مطلب برای ما مجوز یک تعریف را صادر می‌کند.

تعریف ۱.۴.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. اگر Rـ مدول M آزاد باشد آنگاه به عدد اصلی مجموعه پایه مرتبه مدول M گوییم و با $r(M)$ نشان می‌دهیم.*

اکنون اولین قضیه خود را می‌توانیم بیان کنیم.

قضیه ۲.۴.۳. *فرض کنیم F یک مدول آزاد تولید متناهی با nـ مولد روی دامنه ایده‌آل اصلی R باشد و $N \leq F$. در این صورت N نیز یک Rـ مدول آزاد است که یک مجموعه مولد با $m \leq n$ عضو دارد و $r(N) \leq r(F)$.*

اثبات. طبق تمرین ۱۸.۷.۲، N یک Rـ مدول آزاد است. طبق قضیه ۲۳.۲.۳، M نوتری است. بنابراین از قضیه ۱۳.۲.۳، N تولید متناهی است. حال طبق تمرین ۱.۷.۲، هر پایه از M و N تعداد متناهی عضو دارد. حال فرض کنیم $r(F) = k$ با استقرا نشان می‌دهیم که $l = r(N) \leq n$. اگر $n = ۰$ باشد آنگاه $F = ۰$ است با پایه روی مجموعه تهی. در این حالت چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنیم $n > ۰$. طبق نتیجه ۲۹.۱.۲، $F \cong R^{(n)}$. چون $N \leq F$ است پس زیرمدول K در $R^{(n)}$ چنان وجود دارد که $K \cong N$ و $r(K) = l$. حال همریختی زیر را در نظر می‌گیریم

$$p_۱ : K \longrightarrow R, \;\; p_۱((x_۱, ..., x_n)) = x_۱.$$

اگر $p_۱ = ۰$ آنگاه $K = ker(p_۱) \subseteq R^{(n-۱)}$. اکنون طبق فرض استقرا کار تمام است. پس فرض کنیم $p_۱ \neq ۰$. پس $Im(p_۱)$ یک ایده‌آل R است در نتیجه $Im(p_۱) = Rx$ که $x \in R$.

می‌توانیم $k \in K$ چنان انتخاب کنیم که $p_1(k) = x$ (چرا چنین چیزی امکان پذیر است؟). حال ادعا می‌کنیم

$$K = Rk \oplus Ker(p_1).$$

فرض کنیم $y \in K$. پس $p_1(y) = rx$ که $r \in R$. پس داریم $p_1(y - rk) = rx - rx = 0$. پس

$$y = rk + (y - rk) \in Rk + Ker(p_1).$$

اگر $sk \in Rk \cap Ker(p_1)$ آنگاه $sx = p_1(sk) = 0$. چون R دامنه و x ناصفر است، پس $s = 0$. بنابراین ادعای ما اثبات می‌شود. حال $R \cong Rk$، زیرا R یک دامنه است (چرا؟). از طرفی

$$Ker(p_1) = \{(0, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R.$$

پس $Ker(p_1)$ در $R^{(n-1)}$ می‌نشیند (چرا؟). از فرض استقرا $Ker(p_1)$ آزاد است و پایه آن حداکثر $n - 1$ عضو دارد. بنابراین

$$K = Rk \oplus Ker(p_1) \cong R^{(t)} \oplus R$$

که $t \leq n - 1$. بنابراین $K \cong R^{(t+1)}$ که $t + 1 \leq n$. در نتیجه $r(N) = r(K) = l = t + 1 \leq n$. اثبات کامل است. $\square$

یادآوری می‌کنیم که هر دامنه ایده‌آل اصلی یک دامنه تجزیه یکتا است و در آن مفهوم عاد کردن قابل تعریف است. همچنین باید یادآوری کنیم که روی یک حلقه جابجایی مفهوم دترمینان برقرار است. بنابراین بسیاری از مفاهیم جبر خطی که روی یک میدان برقرار بودند را می‌توان به حلقه جابجایی گسترش داد. یادآوری می‌کنیم که دو ماتریس $m \times n$ مانند A و B با درایه‌های از حلقه جابجایی R هم ارز هستند هرگاه ماتریس‌های وارونپذیر $n \times n$ مانند Q و وارونپذیر $m \times m$ مانند P با درایه‌هایی از R موجود باشند که $B = PAQ$. حال لم زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

لم ۳.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه ایده‌آل اصلی باشد و A یک ماتریس $m \times n$ با داریه‌های از R. آنگاه A با ماتریس قطری*

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ & a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_t & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

هم ارز است که $a_i \neq 0$ و برای هر $1 \leq i \leq i - 1$ داریم $a_i | a_{i+1}$ (به a_iها عوامل پایای ماتریس A گوییم).

اکنون قضیه مهم زیر را داریم.

قضیه ۴.۴.۳. *فرض کنیم M یک مدول متناهی مولد روی دامنه ایده‌آل اصلی R باشد. در این صورت*
$$M \cong R^{(k)} \oplus (R/Ra_۱) \oplus \ldots \oplus (R/Ra_l)$$
که $l \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، a_iها ناصفر و غیر یکال هستند و به علاوه برای هر $۱ \leq i \leq i-۱$ داریم $a_i | a_{i+۱}$.

اثبات. بر طبق قضیه ۳۳.۱.۲ و نتیجه ۲۹.۱.۲، زیرمدول K از $R^{(n)}$ چنان وجود دارد که $M \cong_R R^{(n)}/K$. با استفاده از قضیه ۲.۴.۳، $K \cong R^{(m)}$ که $m \leq n$. فرض کنیم f یکریختی بین K و $R^{(m)}$ را تامین کند و $\{x_۱, \ldots, x_m\}$ پایه برای $R^{(m)}$ باشد. چون $K \subseteq R^{(n)}$، داریم

$$f(x_۱) = \begin{pmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{n۱} \end{pmatrix} \in R^{(n)}, f(x_۲) = \begin{pmatrix} a_{۱۲} \\ a_{۲۲} \\ \vdots \\ a_{n۲} \end{pmatrix} \in R^{(n)}, \ \ldots, f(x_m) = \begin{pmatrix} a_{۱m} \\ a_{۲m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \in R^{(n)}$$

حال قرار می‌دهیم $A = (a_{ij})$. پس $K = f(R^{(m)}) = AR^{(m)}$. دقت شود که A یک ماتریس $n \times m$ با درایه‌هایی از R است. حال طبق لم ۳.۴.۳، ماتریس‌های P و Q از اندازه‌های مناسب وجود دارند که

$$PAQ = \begin{pmatrix} a_۱ & & & & & & \\ & a_۲ & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_t & & & \\ & & & & ۰ & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & ۰ \end{pmatrix}$$

و $a_i \neq ۰$ و برای هر $۱ \leq i \leq i-۱$ داریم $a_i | a_{i+۱}$. در نتیجه

$$M \cong R^{(n)}/K = R^{(n)}/f(R^{(m)}) = R^{(n)}/AR^{(m)} \cong R^{(n)}/PAQR^{(m)}.$$

اما

$$PAQR^{(m)} = \begin{pmatrix} a_۱ & & & & & & \\ & a_۲ & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_t & & & \\ & & & & ۰ & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ R \\ R \\ \vdots \\ R \\ R \\ R \end{pmatrix}$$
$$= Ra_۱ \oplus Ra_۲ \oplus \ldots \oplus Ra_t$$

حال چون $t \leq n$ داریم

$$\frac{R^{(n)}}{PAQR^{(m)}} = \frac{R \oplus R \oplus ... \oplus R}{Ra_۱ \oplus Ra_۲ \oplus ... \oplus Ra_t} \cong \frac{R}{Ra_۱} \oplus \frac{R}{Ra_۲} ... \oplus \frac{R}{Ra_t} \oplus R^{(n-t)}.$$

قرار می‌دهیم $k = n - t$. از طرفی ممکن است بعضی از a_iها یکال باشند، پس ممکن است یکسری از R/Ra_iها برابر با صفر شوند (چرا؟). در نتیجه عدد $l \leq t$ وجود دارد که

$$M \cong R^{(k)} \oplus (R/Ra_۱) \oplus ... \oplus (R/Ra_l)$$

و a_iها ناصفر و غیر یکال هستند و به علاوه برای هر $۱ \leq i \leq i - ۱$ داریم $a_i | a_{i+۱}$. اثبات تمام است. □

در ادامه چند تعریف خواهیم آورد.

تعریف ۵.۴.۳. *فرض کنیم M یک مدول روی دامنه صحیح R باشد. عنصر x از M را تابدار گوییم هرگاه عنصر ناصفر $r \in R$ موجود باشد که $rx = ۰$.*

مثال ۶.۴.۳. *در $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_۴$ عنصر $(۰, \bar{۲})$ تابدار است. زیرا $(۰, \bar{۰}) = (۰, \bar{۲})۲$.*

تعریف ۷.۴.۳. *فرض کنیم M یک مدول روی دامنه صحیح R باشد. عنصر x از M را بی‌تاب! (بدون‌تاب! یا خالی از تاب) گوییم هرگاه $rx = ۰$ که $r \in R$ نتیجه شود $r = ۰$.*

مثال ۸.۴.۳. *در $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ عنصر $(۲, ۰)$ بی‌تاب است. زیرا اگر $r(۲, ۰) = (۰, ۰)$ آنگاه $r = ۰$.*

اگر به تعریف عنصر تابدار دقت کنیم در خواهیم یافت که یک عنصر تابدار مانند x دارای پوچساز ناصفر است. اکنون به لم زیر دقت کنید.

لم ۹.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و M یک Rـ مدول باشد. قرار می‌دهیم*

$$T(M) = \{m \in M \mid Ann(m) \neq ۰\}.$$

در این صورت $T(M)$ مجموعه همه عنصرهای تابدار از M است و به علاوه زیرمدولی از M نیز می‌باشد.

اثبات. تمرین ۱۶.۴.۱ را ببینید. □

تعریف ۱۰.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و M یک Rـ مدول باشد. گوییم M تابدار است هرگاه $T(M) = M$ و گوییم M بی‌تاب! است هرگاه $T(M) = ۰$ باشد (مدول صفر را بی‌تاب به حساب می‌آوریم).*

مثال ۱۱.۴.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ بی‌تاب است. $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۶$ تابدار است. $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_۴$ نه بی‌تاب است و نه تابدار.*

اکنون نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۲.۴.۳. *فرض کنیم M یک مدول متناهی مولد روی دامنه ایده‌آل اصلی R باشد. در این صورت $M = F \oplus T(M)$ که F یک Rـ مدول آزاد است.*

اثبات. تمرین ۱۷.۴.۳ را ببینید. □

اکنون این بخش را با قضیه زیر به پایان می‌رسانیم. قضیه زیر اثبات نسبتا طولانی ولی سر راستی دارد که از نتیجه ۱۲.۴.۳ در اثبات آن استفاده می‌شود. از اثبات این قضیه صرف نظر می‌کنیم. این قضیه یکتایی تجزیه را در قضیه ۴.۴.۳ به دست می‌دهد.

قضیه ۱۳.۴.۳. *فرض کنیم M یک مدول متناهی مولد روی دامنه ایده‌آل اصلی R باشد. همچنین فرض کنیم*

$$M \cong R^{(k)} \oplus (R/Ra_1) \oplus \dots \oplus (R/Ra_l)$$

که $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، a_iها ناصفر و غیر یکال هستند و به علاوه برای هر $1 \le i \le i-1$ داریم $a_i | a_{i+1}$. اگر

$$M \cong R^{(k')} \oplus (R/Rb_1) \oplus \dots \oplus (R/Rb_s)$$

که $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، b_iها ناصفر و غیر یکال هستند و به علاوه برای هر $1 \le i \le i-1$ داشته باشیم $b_i | b_{i+1}$ آنگاه $k = k'$، $s = l$ و برای هر i داریم $Ra_i = Rb_i$.

اثبات. بر عهده خواننده! □

تمرین‌ها

تمرین ۱۴.۴.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول متناهی مولد M که توسط مجموعه $\{x, y\}$ تولید شده و در $2x = 3y = 0$ صدق می‌کند را شناسایی کنید.*

تمرین ۱۵.۴.۳. *$\mathbb{Z}$ـ مدول متناهی مولد M که توسط مجموعه $\{x, y, z\}$ تولید شده و در*

$$\begin{cases} 5x + 9y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

صدق می‌کند را شناسایی کنید.

تمرین ۱۶.۴.۳. *فرض کنیم R یک دامنه صحیح و M یک Rـ مدول باشد. نشان دهید که $M/T(M)$ بی‌تاب است.*

تمرین ۱۷.۴.۳. *نتیجه ۱۲.۴.۳ را اثبات کنید.*

تمرین ۱۸.۴.۳. *نشان دهید که همه زیرمدول‌ها و حاصل ضرب مستقیم مدول‌های بی‌تاب، بی‌تاب است.*

۵.۳ تمرین‌های حل شده از کل مباحث فصل چهارم

تمرین ۱.۵.۳. *فرض کنیم M یک Rـ مدول چپ آرتینی باشد. اگر $f : M \longrightarrow M$ یک همریختی یک‌به‌یک باشد آنگاه f پوشا است.*

حل. زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$Im(f) \supseteq Im(f^{۲}) \supseteq Im(f^{۳}) \supseteq \cdots.$$

طبق فرض عدد طبیعی k چنان وجود دارد که $Im(f^k) = Im(f^{k+۱})$. اکنون فرض کنیم $x \in M$. واضح است که $f^{k+۱}(x) \in Im(f^k)$. پس $y \in M$ چنان وجود دارد که $f^{k+۱}(x) = f^k(y)$. در نتیجه $f^k(f(x) - y) = ۰$. اما f یک‌به‌یک است پس f^k نیز یک‌به‌یک است (چرا؟). پس $f(x) = y$ و بنابراین $x \in Im(f)$. یعنی $M \subseteq Im(f)$. چون $Im(f) \subseteq M$ پس $M = Im(f)$ و مسئله حل است.

تمرین ۲.۵.۳. *فرض کنیم R حلقه جابجایی و M یک Rـ مدول متناهی مولد آرتینی باشد. نشان دهید که حلقه $R/Ann_R(M)$ آرتینی است.*

حل. فرض کنیم $\{x_۱, ..., x_t\}$ مجموعه مولد برای M باشد. تعریف می‌کنیم

$$f : R \longrightarrow \bigoplus_{i=۱}^{t} M, \quad f(r) = (rx_۱, rx_۲, ..., rx_t).$$

واضح است که f یک Rـ همریختی خوشتعریف است (چرا؟). همچنین یک محاسبه سر راست نشان می‌دهد که $Ker(f) = Ann_R(M)$. حال طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم $R/Ann_R(M) \cong Im(f)$. چون M آرتینی است پس طبق نتیجه ۱۰.۱.۳، $\bigoplus_{i=۱}^{t} M$ آرتینی است. حال از نتیجه ۹.۱.۳، $Im(f)$ یک Rـ مدول آرتینی است. پس باید $R/Ann_R(M)$ یک Rـ مدول چپ آرتینی باشد. این نتیجه می‌دهد که $R/Ann_R(M)$ به عنوان $(R/Ann_R(M))$ـ مدول چپ آرتینی است (چرا؟). چون R جابجایی است به راحتی حکم مسئله به دست می‌آید و کار تمام است.

تمرین ۳.۵.۳. *نشان دهید که در حلقه جابجایی ایده‌آل اصلی و آرتینی R هر ایده‌آل سره پوچتوان است.*

حل. فرض کنیم $\mathcal{M}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R باشد. کافی است نشان دهیم $\mathcal{M}$ پوچتوان است (چرا؟). طبق فرض $\mathcal{M} = Rx$ که $x \in R$. زنجیر نزولی

$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}^{۲} \supseteq \mathcal{M}^{۳} \supseteq ...$$

را در نظر می‌گیریم. طبق فرض عدد طبیعی k چنان وجود دارد که $\mathcal{M}^k = \mathcal{M}^{k+۱}$. چون R جابجایی است داریم $Rx^k = \mathcal{M} = \mathcal{M}^{k+۱} = Rx^{k+۱}$. بنابراین عنصر r در R چنان وجود دارد که $x^k = rx^{k+۱}$ و در نتیجه $x^k(۱ - rx) = ۰$. اما $۱ - rx$ یکال است (چرا؟). پس $x^k = ۰$ و اثبات تمام است.

تمرین ۴.۵.۳. *در هر حلقه آرتینی جابجایی نشان دهید که هر ایده‌آل اول ایده‌آل ماکسیمال است.*

حل. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از R است. طبق نتیجه ۹.۱.۳، R/P یک Rـ مدول چپ آرتینی است. چون R جابجایی است در نتیجه R/P یک (R/P)ـ مدول آرتینی است، یعنی R/P یک حلقه آرتینی است. اما R/P یک دامنه صحیح است پس طبق تمرین ۲۵.۱.۳، R/P میدان است. بنابراین P ایده‌آل ماکسیمال است.

تمرین ۵.۵.۳. *در هر حلقه آرتینی جابجایی نشان دهید که تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال متناهی است.*

حل. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{I \leq R \mid \text{اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال است } I\}.$$

طبق نتیجه ۴۰.۲.۱، حلقه R ایده‌آل ماکسیمال دارد پس باید $\mathcal{A}$ ناتهی باشد (چرا؟). در نتیجه طبق قضیه ۱۱.۱.۳، $\mathcal{A}$ دارای عنصر مینیمال مانند J است و $J = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_t$ که $\mathcal{M}_i$ها ایده‌آل‌های ماکسیمال هستند. حال فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک ایده‌آل ماکسیمال دلخواه باشد. در این صورت $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_t \subseteq J$ و طبق مینیمال بودن باید $J = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_t$. در نتیجه $J \subseteq \mathcal{M}$. حال چون هر ایده‌آل ماکسیمال یک ایده‌آل اول نیز می‌باشد، اندیس k چنان وجود دارد که $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}$. چون $\mathcal{M}$ ایده‌آل ماکسیمال است پس $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}$. پس حلقه R حداکثر می‌تواند t ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد و مسئله حل شده است.

تمرین ۶.۵.۳. *فرض کنیم R یک حلقه آرتینی چپ باشد. اگر هر عنصر ایده‌آل چپ I پوچتوان باشد آنگاه نشان دهید که I یک ایده‌آل پوچتوان است.*

حل. به برهان خلف، فرض کنیم I پوچتوان نباشد. پس برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $I^k \neq 0$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{I, I^2, I^3, \ldots\}.$$

چون R آرتینی چپ است طبق قضیه ۱۱.۱.۳، $\mathcal{A}$ عضو مینیمال مانند I^m دارد. چون هیچ توانی از I صفر نیست و I^m مینیمال است، نتیجه می‌شود که $I^m = I^{2m}$. اکنون خانواده‌ای دیگر مانند

$$\mathcal{B} = \{J \leq R \mid I^m J \neq 0\}$$

در نظر می‌گیریم. چون $I^m \in \mathcal{B}$ پس $\mathcal{B}$ ناتهی است. طبق قضیه ۱۱.۱.۳، $\mathcal{B}$ عضو مینیمال مانند L دارد که $I^m L \neq 0$. پس عنصری مانند $x \in L$ چنان وجود دارد که $I^m x \neq 0$. اما $I^m(I^m x) = I^m x \neq 0$ و در نتیجه $I^m x \in \mathcal{B}$. واضح است که $I^m x$ یک ایده‌آل چپ است و $I^m x \subseteq L$ (چرا؟). در نتیجه طبق مینیمال بودن باید $I^m x = L$. پس باید $y \in I^m$ باشد که $yx = x$. اما با ضرب طرفین در y از سمت چپ داریم که $y^2 x = x$. با روند استقرایی برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $y^i x = x$. اما طبق فرض $y \in I$ پوچتوان است و در نتیجه $x = 0$ و این تناقض است.

تمرین ۷.۵.۳. *فرض کنیم R حلقه نوتری چپ باشد. در این صورت مجموع ایده‌آل‌های پوچتوان R یک ایده‌آل پوچتوان است.*

حل. فرض کنیم $\{J_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ خانواده ایده‌آل‌های پوچتوان باشد و قرار می‌دهیم $I=\sum_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$. چون R نوتری چپ است پس طبق قضیه ۱۳.۲.۳، I تولید متناهی است. پس تعداد متناهی ایده‌آل J_{α_1}، ...، J_{α_t} وجود دارند که $I=\sum_{i=1}^{t}J_{\alpha_i}$. طبق فرض اعداد طبیعی k_i چنان وجود دارند که $J_{\alpha_i}^{k_i}=0$. قرار می‌دهیم $k=\sum_{i=1}^{t}k_i$. با یک محاسبه سر راست می‌توانیم ببینیم که $I^k=0$.

تمرین ۸.۵.۳. *فرض کنیم R یک دامنه و نوتری چپ باشد و $0\neq x\in R$. نشان دهید که ایده‌آل چپ Rx با همه ایده‌آل‌های چپ ناصفر R اشتراک نابدیهی دارد.*

حل. به برهان خلف، فرض کنیم ایده‌آل چپ ناصفر I موجود باشد که $I\cap Rx=0$. قرار می‌دهیم $J=\sum_{n=1}^{\infty}Ix^n$. نشان می‌دهیم این جمع، یک جمع مستقیم است. حال فرض کنیم $y\in Ix^t\cap\sum_{t\neq n=1}^{\infty}Ix^n$. پس

$$ax^t=y=b_1x+b_2x^2+\dots+b_{t-1}x^{t-1}+b_{t+1}x^{t+1}+\dots+b_mx^m$$

که $a\in I$ و همچنین $b_k\in I$. در نتیجه

$$(ax^{t-1}-b_1-b_2x-\dots-b_{t-1}x^{t-2}-b_{t+1}x^t-\dots-b_mx^{m-1})x=0.$$

چون x ناصفر است و R دامنه پس باید

$$ax^{t-1}-b_1-b_2x-\dots-b_{t-1}x^{t-2}-b_{t+1}x^t-\dots-b_mx^{m-1}=0.$$

یعنی

$$ax^{t-1}-b_2x-\dots-b_{t-1}x^{t-2}-b_{t+1}x^t-\dots-b_mx^{m-1}=b_1.$$

سمت چپ تساوی آخر در Rx و سمت راست در I قرار دارد. پس باید $b_1=0$ باشد. در نتیجه

$$(ax^{t-2}-b_2-\dots-b_{t-1}x^{t-3}-b_{t+1}x^{t-1}-\dots-b_mx^{m-2})x^2=0.$$

چون x ناصفر است و R دامنه پس $x^2\neq 0$ و باید

$$ax^{t-2}-b_2-\dots-b_{t-1}x^{t-3}-b_{t+1}x^{t-1}-\dots-b_mx^{m-2}=0.$$

یعنی

$$ax^{t-2}-b_3x-\dots-b_{t-1}x^{t-3}-b_{t+1}x^{t-1}-\dots-b_mx^{m-2}=b_2.$$

سمت چپ تساوی آخر در Rx و سمت راست در I قرار دارد. پس باید $b_2=0$ باشد. با تکرار روند استقرایی بالا، $a=0$ به دست می‌آید و در نتیجه $y=0$. بنابراین جمع، یک جمع مستقیم است. اما وجود $J=\bigoplus_{n=1}^{\infty}Ix^n$ نوتری چپ بودن R را نقض می‌کند (چرا؟).

تمرین ۹.۵.۳. *فرض کنیم R نوتری چپ باشد. اگر برای دو عنصر a و b در R داشته باشیم $ab=1$ آنگاه نشان دهید که $ba=1$.*

حل. به برهان خلف، فرض کنیم $ba \neq 1$. برای هر عدد طبیعی i و j، قرار می‌دهیم

$$x_{ij} = b^{i-1}a^{j-1} - b^i a^j.$$

واضح است که $x_{ij} \neq 0$ (چرا؟) و برای هر $i \neq s$ و $j \neq l$ داریم $x_{ij} \neq x_{sl}$ (چرا؟). با یک محاسبه ساده برای هر عدد طبیعی i داریم که $x_{ii}^2 = x_{ii}$. بنابراین بی‌نهایت عنصر خودتوان مانند $e_i = x_{ii}$ در R وجود دارد. به راحتی می‌توان دید که برای هر دو عدد طبیعی متمایز m و n داریم $e_m e_n = 0$. قرار می‌دهیم $J = \sum_{i=1}^{\infty} Re_i$. نشان می‌دهیم که این جمع، جمع مستقیم است. فرض کنیم $y \in Re_n \cap \sum_{n \neq i=1}^{\infty} Re_i$. پس $r \in R$ و همچنین s_iها در R وجود دارند که

$$re_n = y = s_1e_1 + ... + s_{n-1}e_{n-1} + s_{n+1}e_{n+1} + ... + s_k e_k.$$

دو طرفین تساوی را از سمت راست در e_n ضرب می‌کنیم و داریم $re_n^2 = re_n = y = 0$. این نشان می‌دهد که جمع، یک جمع مستقیم است. اما وجود J نوتری چپ بودن را نقض می‌کند (چرا؟).

تمرین ۱۰.۵.۳. *فرض کنیم به ازای هر زیرمدول ناصفر N از Rـ مدول چپ M داشته باشیم که M/N به عنوان Rـ مدول چپ نوتری است. نشان دهید که M نوتری است. آیا حکم مشابه برای آرتینی صحیح است؟*

حل. فرض کنیم M نوتری نباشد. پس زنجیر صعودی ناایستا مانند

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq ...$$

از زیرمدول‌های M وجود دارد. بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم N_1 ناصفر باشد. حال زنجیر

$$0 = N_1/N_1 \subsetneq N_2/N_1 \subsetneq N_3/N_1 \subsetneq ...$$

از زیرمدول‌های M/N_1 متوقف نمی‌شود. این تناقض با نوتری بودن M/N_1 است.
برای قسمت دوم، حکم مشابه برای آرتینی صحیح نیست. زیرا می‌دانیم که $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ آرتینی نیست. در حالی که برای هر زیرمدول ناصفر مانند N از $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}$ داریم $\mathbb{Z}/N$ متناهی (چرا؟) و در نتیجه آرتینی است.

تمرین ۱۱.۵.۳. *Rـ مدول چپ M طول متناهی دارد اگر و تنها اگر نوتری و آرتینی باشد.*

حل. $(\Leftarrow)$. چون M طول متناهی دارد پس طبق تعریف سری ترکیبی دارد. حال طبق قضیه ۶.۳.۳، M هم نوتری است و هم آرتینی.
$(\Rightarrow)$. طبق قضیه ۶.۳.۳، M سری ترکیبی دارد. پس طبق تعریف، M طول متناهی دارد.

تمرین ۱۲.۵.۳. *فرض کنیم R دامنه ایده‌آل اصلی باشد که میدان نیست. Rـ مدول M طول متناهی دارد اگر و تنها اگر M متناهی مولد باشد و عضو ناصفر $r \in R$ موجود باشد که $rM = 0$.*

حل. $(\Leftarrow)$. چون M طول متناهی است پس طبق تمرین ۱۱.۵.۳، M نوتری و آرتینی است. بنابراین طبق قضیه ۱۳.۲.۳، M تولید متناهی است. چون R میدان نیست پس عنصر غیر یکال ناصفر مانند r دارد. پس زنجیر نزولی

$$rM \supseteq r^2M \supseteq r^3M \supseteq ...$$

در M باید متوقف شود زیرا M آرتینی است. پس عدد طبیعی k وجود دارد که $r^kM = r^{k+1}M$. قرار می‌دهیم $s = r^k - r^{k+1}$. واضح است که $sM = 0$. اما s همان مطلوب مسئله است. زیرا اگر $s = 0$ آنگاه $r^k(1-r) = 0$. چون R دامنه صحیح است و $r^k \neq 0$ (چرا؟) پس $r = 1$ که تناقض با غیر یکال بودن r.

$(\Rightarrow)$. چون R نوتری است (چرا؟) پس طبق قضیه ۲۳.۲.۳، M نوتری است. اما طبق فرض برای یک $r \in R$ داریم $rM = 0$ پس M یک (R/Rr)ـ مدول است (چرا؟). اما طبق تمرین ۲۳.۱.۳، R/Rr آرتینی است و در نتیجه طبق قضیه ۱۹.۱.۳، M یک (R/Rr)ـ مدول آرتینی است. اما چون $RrM = 0$ پس M یک Rـ مدول آرتینی است (چرا؟). حال طبق تمرین ۱۱.۵.۳، M طول متناهی دارد.

تمرین ۱۳.۵.۳. *نشان دهید که یک مدول متناهی مولد بی‌تاب M روی دامنه ایده‌آل اصلی R که میدان نیست، نیمساده نیست مگر این که صفر باشد.*

حل. طبق قضیه ۴.۴.۳

$$M \cong R^{(k)} \oplus (R/Ra_1) \oplus ... \oplus (R/Ra_l)$$

که $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، a_iها ناصفر و غیر یکال هستند و به علاوه برای هر $1 \leq i \leq i-1$ داریم $a_i|a_{i+1}$. حال طبق فرض M بی‌تاب است، پس نباید R/Ra_iها در M ظاهر شوند. زیرا عناصر R/Ra_i توسط عنصر a_i که ناصفر است صفر می‌شوند. پس باید $M \cong R^{(k)}$ باشد. حال اگر M نیمساده و ناصفر باشد آنگاه $R^{(k)}$ نیمساده است. چون R یک جمعوند $R^{(k)}$ است پس R به عنوان Rـ مدول چپ نیمساده می‌شود. در نتیجه R یک ایده‌آل مینیمال مانند I دارد. به راحتی می‌توان دید که $R \cong_R I = Rx$ که $0 \neq x \in R$. پس R هیچ ایده‌آلی جز 0 و خودش ندارد. این نشان می‌دهد که R میدان است و این تناقض است.

تمرین ۱۴.۵.۳. *فرض کنیم زیرمدول N از مدول M و مدول M/N روی دامنه R تابدار (بی‌تاب) باشند. نشان دهید که M تابدار (بی‌تاب) است.*

حل. مسئله را فقط برای تابدار نشان می‌دهیم و قسمت دیگر مشابه است. فرض کنیم $m \in M$. واضح است که $m + N \in M/N$. چون M/N تابدار است، پس $0 \neq r \in R$ چنان وجود دارد که $rm \in N$. از طرفی N نیز تابدار است، پس $0 \neq s \in R$ چنان وجود دارد که $s(rn) = srn = (sr)n = 0$. چون R دامنه است پس $rs \neq 0$ (چرا؟). در نتیجه $sr \in Ann_R(M)$ و مسئله حل است.

تمرین ۱۵.۵.۳. *فرض کنیم M یک مدول تولید متناهی بی‌تاب روی دامنه نوتری (جابجایی) R باشد. اگر برای $f : M \longrightarrow M$ مدول $M/f(M)$ تابدار باشد آنگاه نشان دهید که f یک‌به‌یک است.*

حل. ابتدا دقت شود که چون M تولید متناهی و R نوتری است، طبق قضیه ۲۳.۲.۳، M مدولی نوتری است. حال زنجیر صعودی زیر از زیرمدول‌های M

$$Ker(f) \subseteq Ker(f^2) \subseteq ...$$

متوقف می‌شود. پس عدد طبیعی k چنان وجود دارد $Ker(f^{k}) = Ker(f^{k+1})$. حال برای هر عدد طبیعی i قرار می‌دهیم

$$f^{i} : M/f(M) \longrightarrow f^{i}(M)/f^{i+1}(M), \;\; f^{i}(m+M) = f^{i}(m) + f^{i+1}(M).$$

واضح است که f^{i} یک Rـ همریختی خوشتعریف و پوشا است (چرا؟). طبق قضیه اول یکریختی، قضیه ۲۰.۳.۱، داریم

$$[M/f(M)]/Ker(f^{i}) \cong f^{i}(M)/f^{i+1}(M).$$

حال چون $M/f(M)$ تابدار است، $[M/f(M)]/Ker(f^{i})$ نیز تابدار است (چرا؟). در نتیجه داریم که $f^{i}(M)/f^{i+1}(M)$ یک مدول تابدار است. از طرفی بنا به قضیه سوم یکریختی، قضیه ۲۶.۳.۱، داریم

$$M/f(M) \cong [M/f^{2}(M)]/[f(M)/f^{2}(M)].$$

چون $M/f(M)$ و $f(M)/f^{2}(M)$ تابدار هستند، از تمرین ۱۴.۵.۳، $M/f^{2}(M)$ تابدار است. دوباره از طرفی بنا به قضیه سوم یکریختی، قضیه ۲۶.۳.۱، داریم

$$M/f(M) \cong [M/f^{3}(M)]/[f^{2}(M)/f^{3}(M)].$$

چون $M/f(M)$ و $f^{2}(M)/f^{3}(M)$ تابدار هستند، از تمرین ۱۴.۵.۳، $M/f^{3}(M)$ تابدار است. با کمک استقرا $M/f^{k}(M)$ تابدار است. اکنون فرض کنیم $x \in Ker(f)$. پس عنصر ناصفر $s \in R$ وجود دارد که $sx \in f^{k}(M)$ زیرا $M/f^{k}(M)$ تابدار است. در نتیجه $sx = f^{k}(m)$ که $m \in M$. حال داریم

$$0 = sf(x) = f(sx) = f^{k+1}(m).$$

بنابراین $m \in Ker(f^{k+1}) = Ker(f^{k})$. پس باید $sx = 0$ باشد. اما M بی‌تاب است و s عنصری ناصفر، این نتیجه می‌دهد که $x = 0$. یعنی $Ker(f) = 0$ و طبق لم ۱۸.۳.۱، f یک‌به‌یک است.

۶.۳ تمرین‌های مروری فصل چهارم

تمرین ۱.۶.۳. *نشان دهید هر حلقه نیمساده چپ هم آرتینی چپ است و هم نوتری چپ.*

تمرین ۲.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه آرتینی چپ باشد. اگر M یک Rــ مدول چپ ناصفر باشد آنگاه M زیرمدول ساده دارد.*

تمرین ۳.۶.۳. *نشان دهید که R نوتری چپ (آرتینی چپ) است اگر و تنها اگر $M_n(R)$ نوتری چپ (آرتینی چپ) باشد.*

تمرین ۴.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و S یک زیرحلقه از R. اگر S نوتری چپ باشد و R ــ مدول چپ S تولید متناهی باشد آنگاه R نوتری چپ است.*

تمرین ۵.۶.۳. *فرض کنیم X یک مجموعه نامتناهی باشد. می‌دانیم که مجموعه توانی X، $P(X)$، با عمل اشتراک به عنوان ضرب و عمل تفاضل متقارن به عنوان جمع یک حلقه یکدار است. نشان دهید این حلقه نه آرتینی است و نه نوتری.*

تمرین ۶.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری جابجایی باشد. نشان دهید که*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$$

پوچتوان است اگر و تنها اگر هر a_i پوچتوان باشد.

تمرین ۷.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی نوتری و با تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathcal{M}$ باشد. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}^{n+1}$ آنگاه عدد طبیعی m چنان وجود دارد که $\mathcal{M}^m = 0$ و R آرتینی است.*

تمرین ۸.۶.۳. *فرض کنیم R حلقه نوتری چپ باشد. در این صورت مجموع ایده‌آل‌های پوچتوان R یک ایده‌آل پوچتوان است.*

تمرین ۹.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری چپ باشد که هیچ ایده‌آل پوچتوان ناصفری ندارد. نشان دهید که R هیچ ایده‌آل ناصفری ندارد که پوچ باشد. (ایده‌آل I را پوچ گوییم هرگاه هر عنصر آن پوچتوان باشد.)*

تمرین ۱۰.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $\mathcal{M}_1$، ...، $\mathcal{M}_t$ ایده‌آل‌های ماکسیمالی در R باشند. اگر M یک Rــ مدول باشد که $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\ldots\mathcal{M}_t M = 0$ آنگاه نشان دهید که M نوتری است اگر و تنها اگر M آرتینی باشد.*

تمرین ۱۱.۶.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد به گونه‌ای که برای هر عنصر مانند x داشته باشیم $x^2 = x$. اگر R آرتینی چپ باشد نشان دهید که R طول متناهی دارد.*

تمرین ۱۲.۶.۳. فرض کنیم R دامنه صحیح نوتری و $S = R \setminus \{0\}$ باشند. قرار می‌دهیم

$$R_S = \{\frac{r}{s} \mid r \in R,\ s \in S\}.$$

نشان دهید که حلقه R_S نوتری است.

تمرین ۱۳.۶.۳. نشان دهید که اگر M یک $\mathbb{Z}$ـ مدول طول متناهی باشد آنگاه متناهی است.

تمرین ۱۴.۶.۳. فرض کنیم M، N و K سه مدول تولید متناهی روی دامنه ایده‌آل اصلی R باشند که $M \oplus K \cong M \oplus N$. نشان دهید که $N \cong K$. با یک مثال نشان دهید شرط تولید متناهی قابل حذف نیست.

تمرین ۱۵.۶.۳. نشان دهید که هر مدول آزاد روی یک دامنه صحیح بی‌تاب است.

فصل ۴

مقدماتی بر نظریه رسته

در این فصل مختصری از نظریه رسته خواهیم گفت. نظریه رسته فرمول بندی کردن ساختارهای ریاضی مانند گروه‌ها، حلقه‌های، فضاهای توپولوژیکی و حتی مجموعه‌ها می‌باشد. در حقیقت ساختارهای ریاضی و مفاهیم آن را در غالبی از اشیا و فلش‌ها صوری سازی می‌کند. آیلنبرگ و مک لین مفاهیم رسته و فانکتور را از دل مطالعات خود در توپولوژی جبری با هدف درک فرآیندهایی که ساختار ریاضی را حفظ می‌کنند، معرفی نمودند. البته ایده‌های آنها ریشه در کارهای مرتبط قبلی ریاضیدانان لهستانی و آلمانی داشت. نظریه رسته‌ها دارای کاربردهایی در همه شاخه‌های ریاضی و به طور خاص در جبر و هندسه جبری است. حتی اخیرا کاربردهایی عملی از نظریه رسته در نظریه زبان‌های برنامه‌نویسی نیز وجود دارد.

۱.۴ تعریف‌ها

این بخش پر از تعاریف و مثال‌هایی است که مفهوم اولیه نظریه رسته را روشن سازی می‌کند. کار را با تعریف رسته آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای از اشیا مانند A، B، C، ... باشد. گوییم $\mathcal{C}$ یک رسته است هرگاه ویژگی‌های زیر برقرار باشد.*
(۱) برای هر دو شی مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای نظیر می‌شود که با $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ نمایش داده می‌شود و اعضای آن را معمولا فلش یا ریخت می‌نامیم.
(۲) برای هر چهار شی مانند A، B، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A,B) \neq (C,D)$ صدق می‌کنند، داریم

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset.$$

(۳) برای هر سه شی مانند A، B و C از $\mathcal{C}$ یک تابع مانند

$$.: Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A,C), \quad .(g,f) = g.f = gf$$

موجود است که در خواص زیر صدق می‌کند.
(الف) شرکت‌پذیر است. یعنی برای هر چهار شی مانند A، B، C و D از $\mathcal{C}$، اگر $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$،

$g \in Mor\mathcal{C}(B,C)$ و $h \in \mathcal{C}(C,D)$ آنگاه $h.(g.f) = (h.g).f$.

(ب) دارای همانی است. یعنی برای هر شی مانند A از $\mathcal{C}$ عضوی در $Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ مانند id_A موجود باشد که برای هر عضوی از $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ مانند f و هر عضوی از $Mor_{\mathcal{C}}(C,A)$ مانند g داشته باشیم $f.id_A = f$ و $id_A.g = g$.

حال برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۲.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانواده تمام مجموعه‌ها باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.*

(۱) برای هر دو شی (مجموعه) مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را همان مجموعه توابع از A به B در نظر می‌گیریم.

(۲) برای هر چهار شی (مجموعه) مانند A، B، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A,B) \neq (C,D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . را هم همان ترکیب معمولی توابع در نظر می‌گیریم. (الف) واضح است که ترکیب توابع شرکتپذیر است.

(ب) همانی هم همان تابع همانی را در نظر می‌گیریم.

در این صورت $\mathcal{C}$ یک رسته است و آن را با $\mathbb{S}et$ نمایش می‌دهیم و $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را با $Map(A,B)$ نشان می‌دهیم. این رسته به رسته مجموعه‌ها معروف است.

مثال ۳.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانواده تمام گروه‌های آبلی ($\mathbb{Z}$ـ مدول‌ها) باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.*

(۱) برای هر دو شی (گروه آبلی) مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را همان همریختی‌های گروهی از A به B در نظر می‌گیریم.

(۲) برای هر چهار شی (گروه آبلی) مانند A، B، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A,B) \neq (C,D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . را هم همان ترکیب معمولی همریختی‌های گروهی در نظر می‌گیریم. (الف) واضح است که این ترکیب شرکتپذیر است.

(ب) همانی هم همان همریختی گروهی همانی را در نظر می‌گیریم.

در این صورت $\mathcal{C}$ یک رسته است و آن را با $\mathbb{A}bG$ نمایش می‌دهیم و همچنین $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را با $Hom_{\mathbb{Z}}(A,B)$ نشان می‌دهیم. این رسته به رسته گروه‌های آبلی معروف است.

مثال ۴.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه و $\mathcal{C}$ خانواده تمام Rـ مدول‌ها چپ باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.*

(۱) برای هر دو شی (Rـ مدول چپ) مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را همان همریختی‌های مدولی از A به B در نظر می‌گیریم.

(۲) برای هر چهار شی (Rـ مدول چپ) مانند A ، B ، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A,B) \neq (C,D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . را هم همان ترکیب معمولی همریختی‌های مدولی در نظر می‌گیریم. (الف) واضح است که این ترکیب شرکت‌پذیر است.
(ب) همانی هم همان همریختی مدولی همانی را در نظر می‌گیریم.
در این صورت $\mathcal{C}$ یک رسته است و آن را با ${}_R\mathbb{M}od$ نمایش می‌دهیم و همچنین $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را با $Hom_R(A,B)$ نشان می‌دهیم. این رسته به رسته Rـ مدول‌های چپ معروف است. گاهی این رسته را با $R - Mod$ نیز نمایش می‌دهیم. رسته Rـ مدول‌های راست به صورت مشابه معلوم می‌شود و آن را با $Mod - R$ یا $\mathbb{M}od_R$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵.۱.۴. فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانواده تمام گروه‌های باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.
(۱) برای هر دو شی (گروه) مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را همان همریختی‌های گروهی از A به B در نظر می‌گیریم.
(۲) برای هر چهار شی (گروه) مانند A ، B ، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A,B) \neq (C,D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . را هم همان ترکیب معمولی همریختی‌های گروهی در نظر می‌گیریم. (الف) واضح است که این ترکیب شرکت‌پذیر است.
(ب) همانی هم همان همریختی گروهی همانی را در نظر می‌گیریم.
در این صورت $\mathcal{C}$ یک رسته است و آن را با $\mathbb{G}roup$ نمایش می‌دهیم و $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را با $Hom(A,B)$ نشان می‌دهیم. این رسته به رسته گروه‌ها معروف است.

مثال ۶.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه و $\mathcal{C}$ خانواده تمام Rـ مدول‌ها چپ تولید متناهی باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.
(۱) برای هر دو شی (Rـ مدول چپ تولید متناهی) مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را همان همریختی‌های مدولی از A به B در نظر می‌گیریم.
(۲) برای هر چهار شی (Rـ مدول چپ تولید متناهی) مانند A ، B ، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A,B) \neq (C,D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . را هم همان ترکیب معمولی همریختی‌های مدولی در نظر می‌گیریم. (الف) واضح است که این ترکیب شرکت‌پذیر است.
(ب) همانی هم همان همریختی مدولی همانی را در نظر می‌گیریم.
در این صورت $\mathcal{C}$ یک رسته است و این رسته را با $R - mod$ نمایش می‌دهیم. و همچنین $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را با $Hom_R(A,B)$ نشان می‌دهیم. این رسته به رسته Rـ مدول‌های تولید متناهی معروف است.

حال تعریف بعدی را بیان می‌کنیم که زیررسته است.

تعریف ۷.۱.۴. *به رسته $\mathcal{D}$ یک زیررسته از رسته $\mathcal{C}$ گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.*
(۱) اشیا $\mathcal{D}$ زیرمجموعه اشیای $\mathcal{C}$ باشند.
(۲) برای هر دو شی مانند A و B از $\mathcal{D}$ داشته باشیم

$$Mor_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A, B).$$

(۳) تابع . روی $\mathcal{D}$ از تحدید تابع . از روی $\mathcal{C}$ به دست آمده باشد.
اگر در زیررسته $\mathcal{D}$ از رسته $\mathcal{C}$ داشته باشیم $Mor_{\mathcal{D}}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ آنگاه به $\mathcal{D}$ زیررسته کامل گوییم.

مثال ۸.۱.۴. *رسته گروه‌های آبلی یک زیررسته از رسته مجموعه‌ها است.*

مثال ۹.۱.۴. *رسته Rــ مدول‌ها یک زیررسته از رسته گروه‌های آبلی است.*

مثال ۱۰.۱.۴. *رسته Rــ مدول‌های تولید متناهی یک زیررسته کامل از رسته Rــ مدول‌ها است.*

تعریف ۱۱.۱.۴. *رسته $\mathcal{C}$ را ملموس گوییم اگر تابع σ موجود باشد که در ویژگی‌های زیر صدق کند.*
(۱) به هر شی A از $\mathcal{C}$ شی $\sigma(A)$ را نظیر کند.
(۲) هر ریخت مانند $f : A \longrightarrow B$ تابعی از مجموعه $\sigma(A)$ به مجموعه $\sigma(B)$ است.
(۳) برای هر شی مانند A ریخت id_A تابع همانی روی مجموعه $\sigma(A)$ است.
(۴) ترکیب دو ریخت مانند $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ همان ترکیب آنها به عنوان توابعی از مجموعه $\sigma(A)$ به مجموعه $\sigma(B)$ و مجموعه $\sigma(B)$ به مجموعه $\sigma(C)$ است.

مثال ۱۲.۱.۴. *در رسته گروه‌ها قرار می‌دهیم $\sigma(A) = A$ که A یک گروه است. واضح است که σ همه خواص موجود در تعریف رسته ملموس را دارد.*

مثال زیر یک رسته غیر ملموس را می‌سازد.

مثال ۱۳.۱.۴. *فرض کنیم G یک گروه و $\mathcal{C}$ خانواده تک عضوی G باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.*
(۱) مجموعه $Mor_{\mathcal{C}}(G, G)$ را همان اعضای G در نظر می‌گیریم.
(۲) چون اعضای G متمایز هستند، واضح است که شرط (۲) تعریف رسته ارضا می‌شود.
(۳) تابع . را هم همان ترکیب ضرب گروه در نظر می‌گیریم. (الف) واضح است که ضرب گروه شرکتپذیر است.
(ب) همانی هم همان عنصر همانی گروه را در نظر می‌گیریم.
در این صورت $\mathcal{C}$ یک رسته است. در این رسته شرط (۲) تعریف رسته ملموس ارضا نمی‌شود. پس این رسته ملموس نیست.

در زیر چند تعریف را خواهیم آورد که تعمیم مفاهیم یک‌به‌یکی و پوشایی در نظریه رسته هستند. مفاهیم زیر روی یک رسته خاص مثلا رسته Rــ مدول‌های همان مفاهیم از قبل دانسته شده مانند پوشایی هستند.

تعریف ۱۴.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته و $f : A \longrightarrow B$ یک ریخت باشد.*
(۱) *گوییم f یک ریخت پوشا است هرگاه $fg = fh$ برای $g, h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, A)$ آنگاه $g = h$.*
(۲) *گوییم f یک ریخت یک‌به‌یک است هرگاه $gf = hf$ برای $g, h \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ آنگاه $g = h$.*
(۳) *گوییم f یک انقباض است هرگاه $fg = id_B$ برای $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$.*
(۴) *گوییم f یک هم‌ـ انقباض است هرگاه $gf = id_A$ برای $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$.*
(۵) *گوییم f هم‌ارزی است هرگاه هم انقباض باشد و هم یک هم‌ـ انقباض.*

مثال ۱۵.۱.۴. *در رسته مثال ۱۳.۱.۴، همه ریخت‌ها، هم‌ارزی هستند.*

مثال ۱۶.۱.۴. *در رسته Rـ مدول‌ها، هم‌ارزی یک ریخت معادل با یک‌به‌یکی و پوشایی است.*

دو مثال زیر دست ما را برای ساختن رسته‌های بیشتر باز می‌کند.

تعریف و مثال ۱۷.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته باشد.* رسته دوگان $\mathcal{C}^{op}$ *به شکل زیر تعریف می‌شود.*
(۱) *اشیا $\mathcal{C}^{op}$ همان اشیا $\mathcal{C}$ هستند.*
(۲) $Mor_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$.
(۳) *تابع. هم به صورت $f.g = g.f$ تعریف می‌شود.*

تعریف و مثال ۱۸.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. رسته حاصل ضربی $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ به شکل زیر تعریف می‌شود.*
(۱) *اشیا را خانواده تمام زوج‌های مرتب مثل (A, B) را در نظر می‌گیریم که A در $\mathcal{C}$ و B در $\mathcal{D}$ است.*
(۲) *برای هر دو شی مانند (A, B) و (C, D) از $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$، قرار می‌دهیم*

$$Mor_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((C, D), (A, B)) = Mor_{\mathcal{C}}(C, D) \times Mor_{\mathcal{C}}(A, B).$$

(۳) *تابع. هم به صورت $(g, g').(f, f') = (gf, g'f')$ تعریف می‌شود.*

با تعریف مدول آزاد در رسته Rـ مدول‌های چپ اشنا شده‌ایم. در زیر تعریف شی آزاد را در یک رسته دلخواه بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱۹.۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس باشد. گوییم شی F روی مجموعه دلخواه و ناتهی X آزاد است هرگاه تابعی مانند $h : X \longrightarrow F$ موجود باشد که برای هر شی A از $\mathcal{C}$ و هر تابع $f : X \longrightarrow A$ ریخت یکتایی مانند $g : F \longrightarrow A$ موجود باشد که نمودار زیر جابجایی شود.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, "g"] \\ A & \end{tikzcd} \qquad (f = gh)$$

مثال ۲۰.۱.۴. *در رسته $\mathbb{G}roup$ شی (گروه) $\mathbb{Z}$ یک شی آزاد روی $X = \{۱\}$ است. فرض کنیم G یک شی (گروه) دلخواه در $\mathbb{G}roup$ و $f : X \longrightarrow G$ یک ریخت (همریختی گروهی) دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم $x = f(۱)$ که $x \in G$. واضح است که $g : F \longrightarrow G$ با ضابطه $g(k) = x^k$ یک ریخت (همریختی گروهی) است و نمودار زیر جابجایی است.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "g"] \\ G & \end{tikzcd} \qquad (f = gi)$$

با یک بررسی ساده می‌توان دید که g در بالا یکتا است.

این بخش را با سوال زیر به پایان می‌بریم.

سوال. آیا می‌توان در یک رسته شی تصویری یا تزریقی تعریف کرد؟

تمرین‌ها

تمرین ۲۱.۱.۴. *رسته فضاهای برداری را معرفی کنید؟*

تمرین ۲۲.۱.۴. *در مثال‌های متن درس زیررسته‌ها را معلوم کنید.*

تمرین ۲۳.۱.۴. *یک رسته و یک زیردسته کامل غیر از متن درس مثال بزنید.*

تمرین ۲۴.۱.۴. *نشان دهید که هم‌ـ انقباض (انقباض) یک ریخت پوشا (یک‌به‌یک) است.*

تمرین ۲۵.۱.۴. *آیا در رسته دوگان برای رسته R ـ مدول‌ها، مدول‌های تصویری تبدیل به مدول‌های تزریقی می‌شوند؟*

تمرین ۲۶.۱.۴. *نشان دهید که در رسته $\mathbb{G}roup$ شی $\mathbb{Q}$ روی هیچ مجموعه ناتهی X آزاد نیست.*

۲.۴ تابعگون

اکنون می‌خواهیم دو رسته به ظاهر متفاوت را بررسی کنیم. به زبان نادقیق می‌خواهیم بین دو رسته تابعی! قرار دهیم و بین دو رسته ارتباطی قرار دهیم. این توابع! که بین دو رسته ارتباط برقرار می‌کنند فانکتور یا تابعگون نام دارند.

تعریف ۱.۲.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. گوییم F یک تابعگون هموردا از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ است هرگاه موارد زیر برقرار باشد.*
(۱) برای هر شی مانند A در $\mathcal{C}$ شی یکتایی مانند $F(A)$ در $\mathcal{D}$ موجود باشد.
(۲) برای هر ریخت مانند $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ یک ریخت یکتا مانند

$$F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

موجود باشد که موارد زیر برقرار باشند.
(الف) اگر id_A ریخت همانی در $\mathcal{C}$ باشد آنگاه $F(id_A)$ ریخت همانی در $\mathcal{D}$ باشد.
(ب) اگر f و g دو ریخت در $\mathcal{C}$ باشند که fg قابل تعریف باشد آنگاه $F(fg) = F(f)F(g)$ باشد.

مثال ۲.۲.۴. *Rـ مدول چپ M را در رسته Rـ مدول‌ها در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم*

$$F : R - Mod \longrightarrow \mathbb{A}bG, \;\; F(N) = Hom_R(M, N).$$

F یک تابعگون هموردا از رسته $R - Mod$ به رسته $\mathbb{A}bG$ است. زیرا
(۱) برای هر مدول چپ A در $R - Mod$ شی یکتایی مانند $F(A) = Hom_R(M, A)$ در $\mathbb{A}bG$ موجود است که یک $\mathbb{Z}$ـ مدول است.
(۲) برای هر همریختی مدولی مانند $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی گروهی یکتا مانند

$$F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$$

با قانون $F(f)(g) = fg$ موجود است که $g : M \longrightarrow A$ یک همریختی مدولی در $F(A)$ است و واضح است که fg در $F(B)$ قرار دارد. همچنین موارد زیر برقرار هستند.
(الف) اگر id_A همریختی مدولی همانی در $R - Mod$ باشد آنگاه $F(id_A)$ همریختی گروهی در $\mathbb{A}bG$ است.
(ب) اگر h و g دو همریختی مدولی در $R - Mod$ باشند که hg قابل تعریف باشد آنگاه واضح است که $F(hg) = F(h)F(g)$.

مثال ۳.۲.۴. *Rـ مدول راست M را در رسته Rـ مدول‌های راست در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم*

$$F : R - Mod \longrightarrow \mathbb{A}bG, \;\; F(N) = M \otimes_R N).$$

F یک تابعگون هموردا از رسته $R - Mod$ به رسته $\mathbb{A}bG$ است. زیرا
(۱) برای هر مدول چپ A در $R - Mod$ شی یکتایی مانند $F(A) = M \otimes_R A$ در $\mathbb{A}bG$ موجود

است که یک $\mathbb{Z}$ـ مدول است.
(۲) برای هر همریختی مدولی مانند $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی گروهی یکتا مانند

$$F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$$

با قانون $F(f)(g) = id_M \otimes f$ موجود است که $id_M : M \longrightarrow M$ همریختی مدولی همانی در $F(A)$ است و واضح است که $id_M \otimes f$ در $F(B)$ قرار دارد. همچنین موارد زیر برقرار هستند.
(الف) اگر id_A همریختی مدولی همانی در $R - Mod$ باشد آنگاه $F(id_A)$ همریختی گروهی در $\mathbb{A}bG$ است.
(ب) اگر h و g دو همریختی مدولی در $R - Mod$ باشند که hg قابل تعریف باشد آنگاه واضح است که $F(hg) = F(h)F(g)$.

تعریف و نمادگذاری ۴.۲.۴. تابعگون‌های همورد معرفی شده در مثال‌های بالا را برای راحتی به ترتیب با $Hom_R(M, -)$ و $- \otimes_R M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۴. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. گوییم F یک تابعگون ناهمورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ است هرگاه موارد زیر برقرار باشد.
(۱) برای هر شی مانند A در $\mathcal{C}$ شی یکتایی مانند $F(A)$ در $\mathcal{D}$ موجود باشد.
(۲) برای هر ریخت مانند $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ یک ریخت یکتا مانند

$$F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$

موجود باشد که موارد زیر برقرار باشند.
(الف) اگر id_A ریخت همانی در $\mathcal{C}$ باشد آنگاه $F(id_A)$ ریخت همانی در $\mathcal{D}$ باشد.
(ب) اگر f و g دو ریخت در $\mathcal{C}$ باشند که fg قابل تعریف باشد آنگاه $F(fg) = F(g)F(f)$ باشد.

مثال ۶.۲.۴. Rـ مدول چپ M را در رسته Rـ مدول‌ها در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$F : R - Mod \longrightarrow \mathbb{A}bG, \;\; F(N) = Hom_R(N, M).$$

F یک تابعگون ناهمورد از رسته $R - Mod$ به رسته $\mathbb{A}bG$ است. زیرا
(۱) برای هر مدول چپ A در $R - Mod$ شی یکتایی مانند $F(A) = Hom_R(A, M)$ در $\mathbb{A}bG$ موجود است که یک $\mathbb{Z}$ـ مدول است.
(۲) برای هر همریختی مدولی مانند $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی گروهی یکتا مانند

$$F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$$

با قانون $F(f)(g) = gf$ موجود است که $g : B \longrightarrow M$ یک همریختی مدولی در $F(A)$ است و واضح است که gf در $F(B)$ قرار دارد. همچنین موارد زیر برقرار هستند.
(الف) اگر id_A همریختی مدولی همانی در $R - Mod$ باشد آنگاه $F(id_A)$ همریختی گروهی در $\mathbb{A}bG$ است.
(ب) اگر h و g دو همریختی مدولی در $R - Mod$ باشند که hg قابل تعریف باشد آنگاه واضح است که $F(hg) = F(g)F(f)$.

تعریف و نمادگذاری ۷.۲.۴. تابعگون ناهمورد معرفی شده در مثال بالا را با $Hom_R(-, M)$ نمایش می‌دهیم.

تمرین‌ها

تمرین ۸.۲.۴. *فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد. یک تابعگون همورد از $R-Mod$ به $R-Mod$ ارائه کنید.*

تمرین ۹.۲.۴. *فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد. یک تابعگون ناهمورد از رسته $R-Mod$ به رسته $R-Mod$ ارائه کنید.*

۳.۴ تابعگون و دنباله دقیق

این بخش بسیار کوتاه است و مفهوم تابعگون دقیق را معرفی می‌کند.

تعریف ۱.۳.۴. *فرض کنیم F یک تابعگون هموردا از $R-Mod$ به $\mathbb{A}bG$ باشد. گوییم F تابعگون هموردا دقیق چپ است هرگاه F را روی دنباله دقیق کوتاه*

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

در $R-Mod$ اثر دهیم به دنباله دقیق زیر برسیم

$$\circ \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(T) \xrightarrow{F(g)} F(N)$$

مثال ۲.۳.۴. *با توجه به گزاره ۳.۷.۱، تابعگون هموردا $Hom_R(U,-)$ دقیق چپ است.*

تعریف ۳.۳.۴. *فرض کنیم F یک تابعگون هموردا از $R-Mod$ به $\mathbb{A}bG$ باشد. گوییم F تابعگون هموردا دقیق راست است هرگاه F را روی دنباله دقیق کوتاه*

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

در $R-Mod$ اثر دهیم به دنباله دقیق زیر برسیم

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(T) \xrightarrow{F(g)} F(N) \longrightarrow \circ$$

مثال ۴.۳.۴. *فرض کنیم U یک R ـ مدول راست باشد. با توجه به قضیه ۲.۲.۲.۹، تابعگون هموردا $U \otimes_R -$ دقیق راست است.*

تعریف ۵.۳.۴. *گوییم تابعگون هموردا F دقیق است هرگاه هم از چپ و هم از راست دقیق باشد.*

مثال ۶.۳.۴. *فرض کنیم P یک R ـ مدول چپ تصویری باشد. در این صورت تابعگون هموردا $Hom_R(P,-)$ دقیق است (چرا؟).*

تعریف ۷.۳.۴. *فرض کنیم F یک تابعگون ناهموردا از $R-Mod$ به $\mathbb{A}bG$ باشد. گوییم F تابعگون ناهموردا دقیق چپ است هرگاه F را روی دنباله دقیق کوتاه*

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

در $R-Mod$ اثر دهیم به دنباله دقیق زیر برسیم

$$\circ \longrightarrow F(N) \xrightarrow{F(g)} F(T) \xrightarrow{F(f)} F(M)$$

مثال ۸.۳.۴. *با توجه به گزاره ۷.۷.۱، تابعگون هموردا $Hom_R(-,U)$ دقیق چپ است.*

تعریف ۹.۳.۴. فرض کنیم F یک تابعگون ناهمورد از $R-Mod$ به $\mathbb{A}bG$ باشد. گوییم F تابعگون ناهمورد دقیق راست است هرگاه F را روی دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

در $R-Mod$ اثر دهیم به دنباله دقیق زیر برسیم

$$F(N) \xrightarrow{F(g)} F(T) \xrightarrow{F(f)} F(M) \longrightarrow \circ$$

تعریف ۱۰.۳.۴. گوییم تابعگون ناهمورد F دقیق است هرگاه هم از چپ و هم از راست دقیق باشد.

مثال ۱۱.۳.۴. فرض کنیم U یک Rـ مدول چپ تزریقی باشد. در این صورت تابعگون ناهمورد $Hom_R(-,U)$ دقیق است (چرا؟).

تمرین‌ها

تمرین ۱۲.۳.۴. یک تابعگون همورد دقیق راست، غیر از متن درس مثال بزنید.

تمرین ۱۳.۳.۴. یک Rـ مدول چپ M مثال بزنید که $Hom_R(M,-)$ دقیق راست نباشد.

تمرین ۱۴.۳.۴. Rـ مدول چپ M مثال بزنید که $M \otimes_R -$ دقیق چپ نباشد.

۴.۴ تمرین‌های حل شده از کل مباحث فصل چهارم

تمرین ۱.۴.۴. *فرض کنیم F یک میدان باشد. رسته Fـ فضاهای برداری را معرفی کنید.*

حل. فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانواده تمام Fـ فضاهای باشد. حال شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.
(۱) برای هر دو شی (Fـ فضای برداری) مانند A و B از $\mathcal{C}$ مجموعه $Tr_{\mathcal{C}}(A, B)$ را همان تبدیلات خطی از A به B در نظر می‌گیریم.
(۲) برای هر چهار شی (Fـ فضای برداری) مانند A، B، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A, B) \neq (C, D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Tr_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Tr_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . را هم همان ترکیب معمولی تبدیلات خطی در نظر می‌گیریم.
(الف) واضح است که ترکیب شرکتپذیر است.
(ب) همانی هم همان تبدیل خطی همانی را در نظر می‌گیریم.
پس $\mathcal{C}$ یک رسته است (این رسته را با $_F\mathbb{V}ec$ نمایش می‌دهند).

تمرین ۲.۴.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانواده تمام مجموعه‌های جزئا مرتب باشد. برای هر دوشی $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ در $\mathcal{C}$ قرار می‌دهیم*

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f : A \longrightarrow B \mid a \leq b \Rightarrow f(a) \leq' f(b)\}$$

همچنین تابع . را همان ترکیب عادی توابع در نظر بگیرید. نشان دهید $\mathcal{C}$ رسته است.

حل. شرایط موجود در تعریف رسته را بررسی می‌کنیم.
(۱) شرط (۱) تعریف رسته در خود صورت سوال داده شده است.
(۲) برای هر چهار شی مانند A، B، C و D از $\mathcal{C}$ که (به عنوان زوج مرتب) در شرط $(A, B) \neq (C, D)$ صدق می‌کنند، واضح است که

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset.$$

(۳) تابع . هم که معرفی شده است.
(الف) واضح است که ترکیب توابع شرکتپذیر است و دوباره در $\mathcal{C}$ قرار می‌گیرد. زیرا ترکیب توابع صعودی دوباره تابعی صعودی است.
(ب) همانی هم همان تابع همانی را در نظر می‌گیریم که تابعی صعودی است.

تمرین ۳.۴.۴. *فرض کنیم $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ یک تابعگون باشد. اگر f یک هم ارزی در رسته $\mathcal{C}$ باشد آنگاه نشان دهید که $F(f)$ در رسته $\mathcal{D}$ یک هم ارزی است.*

حل. فرض کنیم F تابعگون هممورد باشد. چون f در $\mathcal{C}$ هم ارزی است پس ریخت مناسب g وجود دارد که $fg = id$. طبق خواص تابعگون داریم $F(fg) = F(f)F(g) = F(id) = id$. طبق تعریف $F(f)$ در رسته $\mathcal{D}$ یک هم ارزی است. برای تابعگون ناهمورد مسئله مشابه است.

تمرین ۴.۴.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته دلخواه باشد. یک تابعگون ناهمورد بین $\mathcal{C}$ و $\mathbb{S}et$ معرفی کنید.*

حل. قرار می‌دهیم
$$F:\mathcal{C}\longrightarrow \mathbb{S}et,\ \ F(A)=Map(\mathbb{Z},A).$$
F یک تابعگون ناهمورد از رسته $\mathcal{C}$ به رسته $\mathbb{S}et$ است. زیرا
(۱) برای هر شی A در $\mathcal{C}$ شی یکتایی مانند $F(A)=Map(\mathbb{Z},A)$ در $\mathbb{S}et$ موجود است که یک مجموعه است.
(۲) برای هر ریخت مانند $f:A\longrightarrow B$ یک تابع یکتا مانند
$$F(f):F(A)\longrightarrow F(B)$$
با قانون $F(f)(g)=fg$ موجود است که $g:\mathbb{Z}\longrightarrow A$ یک تابع در $F(A)$ است و واضح است که fg در $F(B)$ قرار دارد. در واقع
$$F(f):Map(\mathbb{Z},A)\longrightarrow Map(\mathbb{Z},B),\ \ F(f)(g)=fg.$$
همچنین موارد زیر برقرار هستند.
(الف) اگر id_A ریخت همانی در $\mathcal{C}$ باشد آنگاه $F(id_A)$ تابع همانی در $\mathbb{S}et$ است.
(ب) اگر h و g دو ریخت در $\mathcal{C}$ باشند که hg قابل تعریف باشد آنگاه واضح است که $F(hg)=F(g)F(h)$.

تمرین ۵.۴.۴. *فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته دلخواه باشد. یک تابعگون همورد بین $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ معرفی کنید.*

حل. فرض کنیم U شی دلخواه در $\mathcal{D}$ باشد. قرار می‌دهیم
$$F:\mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{D},\ \ F(A)=U$$
و برای هر ریخت مانند $f:A\longrightarrow B$ قرار می‌دهیم $F(f)=id_U$. در این صورت F یک تابعگون همورد از رسته $\mathcal{C}$ به رسته $\mathcal{D}$ است. زیرا
(۱) برای هر شی A در $\mathcal{C}$ شی یکتایی $F(A)=U$ در $\mathcal{D}$ موجود است.
(۲) برای هر ریخت مانند $f:A\longrightarrow B$ یک ریخت یکتا مانند
$$F(f):F(A)\longrightarrow F(B)$$
با قانون $F(f)(g)=id_U$ موجود است. همچنین موارد زیر برقرار هستند.
(الف) اگر id_A ریخت همانی در $\mathcal{C}$ باشد آنگاه $F(id_A)=id_U$ ریخت همانی در $\mathcal{D}$ است.
(ب) اگر h و g دو ریخت در $\mathcal{C}$ باشند که hg قابل تعریف باشد آنگاه واضح است که $F(hg)=F(h)F(g)$.

۵.۴ تمرین‌های مروری فصل چهارم

تمرین ۱.۵.۴. *رسته فضاهای توپولوژیک را معرفی کنید.*

تمرین ۲.۵.۴. *رسته حلقه‌های جابجایی که دامنه هستند را معرفی کنید.*

تمرین ۳.۵.۴. *یک تابعگون روی حلقه‌های جابجایی معرفی کنید که هر شی R را به $R[x]$ نظیر کند. قانون این تابعگون روی ریخت چگونه است؟*

تمرین ۴.۵.۴. *با کمک گروه مشتق یک تابعگون بین $\mathbb{G}roup$ و $\mathbb{A}bG$ پیدا کنید.*

تمرین ۵.۵.۴. *بین رسته حلقه‌های جابجایی که دامنه هستند و رسته میدان‌ها یک تابعگون معرفی کنید.*

کتاب‌نامه

[1] Bhattacharya, P. B.; Jain, S. K.; Nagpaul, S. R. Basic abstract algebra. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[2] Herstein, I. N. Abstract algebra. Third edition. With a preface by Barbara Cortzen and David J. Winter. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.

[3] Hungerford, Thomas W. Algebra. Reprint of the 1974 original. Graduate Texts in Mathematics, 73. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[4] Malik, D.S.; Mordeson, J.N.; Sen, M.K. Fundamentals of abstract algebra. McGraw-Hill, 1997.

[5] Rotman, J. Advanced modern algebra, 2002.

[6] Rotman, J. An introduction to homological algebra, 1997.