بسمه تعالی

تمرینات درس ریاضیات تکمیلی سری ششم

---

۱. برای ماتریس A داده شده ماتریس e^A را بیابید:

$$(i)\ A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \qquad (ii)\ A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$(iii)\ A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix} \qquad (iv)\ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$(v)\ A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (vi)\ A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲. فرض کنید $A, B \in M_n(F)$. در این صورت، نشان دهید

(الف) $e^{I\otimes A} = I \otimes e^A$ و $e^{B\otimes I} = e^B \otimes I$.

(ب) ماتریس‌های $I \otimes A$ و $B \otimes I$ با یکدیگر جابجا می‌شوند.

(پ) $e^{A\oplus B} = e^A \otimes e^B$.

۳. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۷ \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} ۹ & ۱ \\ ۱ & -۹ \end{bmatrix}.$$

تحقیق کنید که خواص ۱۰ گانه ضرب تانسوری (یا ضرب کرونکر) برای این ماتریس‌ها برقرارند.

۴. جواب عمومی معادلات با مشتقات جزئی زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
&(i) && u_{xx} + ۲u_{xy} + u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y). \\
&(ii) && ۳u_{xx} + ۱۰\, u_{xy} + ۳u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y). \\
&(iii) && u_{tt} - c^۲ u_{xx} = ۰,\ u = u(x,t). \\
&(iv) && x^۲ u_{xx} + ۲xy\, u_{xy} + y^۲ u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y). \\
&(v) && u_{xx} - \frac{۱}{x} u_x - x^۲ u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y). \\
&(vi) && x^۲ u_{xx} - y^۲ u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(vii) \quad u_{xx} - u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y).\\
&(viii) \quad u_{xx} - ۴u_{xy} + ۳u_{yy} = ۰,\ u = u(x,y).\\
&(ix) \quad u_{xx} + u_x = ۰,\ u = u(x,y).\\
&(x) \quad u_{yy} + u = ۰,\ u = u(x,y).
\end{aligned}
$$

موفق باشید