بسمه تعالی

تمرینات درس دستگاه‌های دینامیکی ۱ سری پنجم

۱. در دستگاه‌های حاصلضرب زیر، نماهای فاز را رسم کنید و درباره مجموعه‌های α-حدی و ω-حدی آن بحث کنید.

$(i)\ \dot{x}_۱ = -x_۱,\ \ \dot{x}_۲ = x_۲^۲.$ $\qquad$ $(ii)\ \dot{x}_۱ = x_۱ - x_۱^۲,\ \ \dot{x}_۲ = x_۲ - x_۲^۲.$

۲. نمای فاز دستگاه معادلات زیر را رسم کنید:

$$(i)\quad \dot{x}_۱ = x_۲(x_۱^۲ - x_۲^۲),\ \ \dot{x}_۲ = -x_۱(x_۱^۲ - x_۲^۲).$$
$$(ii)\quad \dot{x}_۱ = x_۲(۱ - x_۱^۲ - x_۲^۲),\ \ \dot{x}_۲ = -x_۱(۱ - x_۱^۲ - x_۲^۲).$$

۳. نشان دهید که چندجمله‌ای همگن درجه دوم $V(x_۱, x_۲) = ax_۱^۲ + ۲bx_۱x_۲ + cx_۲^۲$، که در آن a, b, c اعداد حقیقی هستند، مثبت اکید است (یعنی در مبدا صفر است و در نقاط دیگر مثبت است) اگر و تنها اگر $a > ۰$ و $ac - b^۲ > ۰$.

۴. با استفاده از تابع

$$V(x_۱, x_۲) = \frac{۱}{۲}(x_۱^۲ - x_۲^۲),$$

نشان دهید مبدا یک نقطه تعادل ناپایدار دستگاه زیر است:

$$\dot{x}_۱ = x_۱^۳ + x_۱^۲x_۲$$
$$\dot{x}_۲ = -x_۲ + x_۱^۲$$

۵. با استفاده از تابع

$$V(x_۱, x_۲) = \frac{۱}{۴}x_۱^۴ - \frac{۱}{۲}x_۲^۲,$$

نشان دهید مبدا یک نقطه تعادل ناپایدار دستگاه زیر است:

$$\dot{x}_۱ = x_۱^۳ + x_۱x_۲$$
$$\dot{x}_۲ = -x_۲ + x_۲^۲ + x_۱x_۲ - x_۱^۳$$

۶. برای سه دستگاه زیر، با استفاده از توابع درجه دوم مناسب، نوع پایداری مبدا را تعیین کنید:

$$(i)\quad \dot{x}_۱ = -x_۱^۳ + x_۱x_۲^۲,\ \ \dot{x}_۲ = -۲x_۱^۲x_۲ - x_۲^۳.$$
$$(ii)\quad \dot{x}_۱ = -x_۱^۳ + ۲x_۲^۳,\ \dot{x}_۲ = -۲x_۱x_۲^۲.$$
$$(iii)\quad \dot{x}_۱ = x_۱^۳ - x_۲^۳,\ \ \dot{x}_۲ = x_۱x_۲^۲ + ۲x_۱^۲x_۲ + x_۲^۳.$$

۷. دستگاه معادلات

$$\dot{x}_۱ = x_۲ - x_۱ f(x_۱, x_۲)$$
$$\dot{x}_۲ = -x_۱ - x_۲ f(x_۱, x_۲)$$

را در نظر بگیرید که در آن f یک تابع حقیقی مقدار از کلاس $C^۱$ است. با استفاده از یک تابع درجه دوم، نشان دهید که اگر در یک همسایگی باز از مبدا $f > ۰$، آنگاه مبدا مجانبی پایدار است. اگر در یک همسایگی مبدا $f < ۰$، آنگاه نوع پایداری مبدا چیست؟

۸. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع $C^۱$ است که در نقطه $\bar{x}$ دارای یک نقطه بحرانی ایزوله است و این نقطه بحرانی یک ماگزیمم موضعی اکید برای f است. نشان دهید $\bar{x}$ یک نقطه تعادل مجانبی پایدار از میدان برداری گرادیان، $F(x) = \nabla f(x)$، است.

۹. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع $C^۱$ است که در نقطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ دارای یک نقطه بحرانی ایزوله است و این نقطه بحرانی یک ماگزیمم موضعی برای f نیست. نشان دهید $\bar{x}$ یک نقطه تعادل ناپایدار از میدان برداری $F(x) = \nabla f(x)$ است.

۱۰. نشان دهید تابع $V = x^۲ + ۴y^۲ + ۲xy^۲ + y^۴$ برای میدان برداری $F(x, y) = (-۲xy^۲, xy - ۲y)$ در $(۰, ۰) \in \mathbb{R}^۲$ یک تابع لیاپانوف است.

۱۱. دستگاه‌های مسطح زیر را در نظر بگیرید:

$$(i) \quad \dot{x}_۱ = -x_۱, \quad \dot{x}_۲ = x_۲ + x_۱^۳.$$
$$(ii) \quad \dot{x}_۱ = x_۲, \quad \dot{x}_۲ = x_۱ + x_۱^۳.$$

نشان دهید مبدا یک نقطه زینی است. منیفلدهای پایدار و ناپایدار مبدا برای دستگاه خطی شده و همچنین غیرخطی را تعیین کنید. نماهای فاز معادلات خطی شده حول مبدا و معادلات غیرخطی را رسم کرده و آنها را با هم مقایسه کنید.

۱۲. تقریب‌هایی برای منیفلدهای پایدار و ناپایدار تمامی نقاط زینی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به دست آورید و به کمک آنها نمای فاز را رسم کنید:

$$\dot{x}_۱ = ۱ - x_۱x_۲, \quad \dot{x}_۲ = x_۱ - x_۲^۳.$$

موفق باشید