

۱. (الف) مشتق تابع زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 \\ -x_1 + x_2 - x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 \end{bmatrix}.$$

(ب) صفرهای تابع فوق را بیابید و ماتریس یاکوبی را در این نقاط محاسبه کنید.

۲. جریان $\phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را برای دستگاه غیرخطی زیر تعیین کنید و سپس نمای فاز آن را در فضای \mathbb{R}^3 رسم کنید:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 + x_3^2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

۳. نقاط تعادل و نوع آنها (چاه، منبع یا زین) را برای دستگاه غیرخطی $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ مشخص کنید هرگاه

$$(a) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -4x_2 + 2x_1 x_2 - 8 \\ 4x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_1 x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ kx_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

۴. با حل دستگاه زیر مجموعه‌های پایایی S و U را مشخص کنید:

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2$$

$$\dot{x}_3 = x_3 + x_2^2$$

۵. منیفدهای پایدار و ناپایدار مبداء را برای دستگاه غیرخطی زیر تعیین کنید و نمای فاز آن را رسم کنید:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 3x + 4y - 2xy\end{aligned}$$

۶. نمای فاز دستگاههای مسطح زیر را در صفحه فاز \mathbb{R}^2 رسم کنید:

$$\begin{aligned}۱) \begin{cases} \dot{x} = -2x(x-1)(x-\frac{1}{2}), \\ \dot{y} = -y. \end{cases} & \quad ۲) \begin{cases} \dot{x} = x^4 - x^2, \\ \dot{y} = y^2 - y^4. \end{cases} \\ ۳) \begin{cases} \dot{x} = x - x^3, \\ \dot{y} = y - y^3. \end{cases} & \quad ۴) \begin{cases} \dot{x} = y \sin x, \\ \dot{y} = -\cos x. \end{cases}\end{aligned}$$

۷. نمای فاز معادلات نیوتنی زیر را در صفحه \mathbb{R}^2 رسم کنید:

$$۱) \ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad ۲) \ddot{x} + x(1-x)(\lambda-x) = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

۸. نمای فاز دستگاههای همیلتونی زیر را رسم کنید:

$$\begin{aligned}۱) \begin{cases} \dot{x} = y + y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - x(x^2 + y^2). \end{cases} & \quad ۲) \begin{cases} \dot{x} = y - y^3, \\ \dot{y} = x - x^3. \end{cases} \\ ۳) \begin{cases} \dot{x} = \cos y, \\ \dot{y} = \cos x. \end{cases} & \quad ۴) \begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = -y \cos x. \end{cases}\end{aligned}$$

۹. با استفاده از تغییر مختصات قطبی، نمای فاز دستگاه معادلات زیر را رسم کنید:

$$\begin{aligned}۱) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)^2, \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)^2. \end{cases} \\ ۲) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2). \end{cases} \\ ۳) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \\ ۴) \begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{د) } & \begin{cases} \dot{x} = -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \dot{y} = x + y\sqrt{x^2 + y^2} \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases} \\
\text{ه) } & \begin{cases} \dot{x} = -x - \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{y} = -y + \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

موفق باشید