

۱. انتگرال خط زیر را محاسبه کنید، که در آن منحنی C نیم دایره‌ی $z = 2e^{i\theta}$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ است:

$$\int_C \frac{\text{Log}(iz) + \text{Log}(i\bar{z}) + z + 2}{z} dz.$$

۲. فرض کنید $f(z) = |z| - z$. مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C f(\bar{z}) dz$ ، که در آن C نیم دایره‌ی $z = e^{i\theta}$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ است.

۳. حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید:

$$\begin{array}{ll} ۱) \int_{|z|=1} \frac{1}{z^4 \cos z} dz, & ۲) \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2(z-1)} dz, \\ ۳) \int_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}(z)}{(z-1)^2(z^2-4)} dz, & ۴) \int_{|z-4|=2} \frac{\text{Log}(z-1)}{z-5} dz, \\ ۵) \int_{|z-i|=1} \frac{\text{Log}(\text{Log}(z))}{z^2-1} dz, & ۶) \int_{|z|=1} e^{z^2} \cot(\pi z) dz. \end{array}$$

۴. اگر $0 < \varphi < \pi$ ، نشان دهید

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z^9}{1-2z \cos \varphi + z^2} dz = \frac{\sin 9\varphi}{\sin \varphi}.$$

۵. فرض کنید $f(z)$ یک تابع تام باشد و به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leq A|z|$ که در آن A یک عدد حقیقی مثبت است. نشان دهید اسکالر $a \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $f(z) = az$.

۶. با استفاده از سری هندسی، سری مک‌لوران (بسط تیلور حول صفر) توابع زیر را بیابید:

$$۱) f(z) = \text{Log}(1+z), \quad ۲) f(z) = (1-z)\text{Log}(1-z).$$

۷. سری تیلور تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ را حول نقاط $z = -1, -i$ بدست آورید و شعاع همگرایی آن را مشخص کنید.

۸. سری لوران تابع $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$ را در نواحی داده شده بیابید:

(i) $|z| > 2$ (ii) $1 < |z| < 2$ (iii) $0 < |z-1| < 1$.

۹. نقاط تکین و مانده‌ی آنها را برای هر یک از توابع زیر مشخص کنید:

۱) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ ۲) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ ۳) $\frac{z^3}{\sin z^2}$ ۴) $e^{\frac{1-z}{z}}(e^z-1)$
 ۵) $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$ ۶) $\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$

۱۰. با استفاده از قضیه مانده‌ها، مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید:

۱) $\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^3 \sinh z}$ ۲) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sinh z} dz$ ۳) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$
 ۴) $\int_{|z|=2} \cos\left(\frac{z}{z-1}\right) dz$ ۵) $\int_{|z|=2} z e^{\frac{z}{(z+i)^2}} dz$ ۶) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{1-\cos z} dz$
 ۷) $\int_{|z|=1} \frac{3z^2 - 2z + 5}{(2z-1)^2(3z-1)} dz$ ۸) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\text{Log}(z^2 - z + 1)}{(z^4 + 3) \cos z} dz$

۱۱. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{|z|=1} (1-z+z^2-z^3)(e^{\frac{1}{z}} - e^{\frac{1}{2z-1}} + e^{\frac{1}{3z-1}}) dz.$$

۱۲. با استفاده از قضیه مانده‌ها، انتگرال‌های ناسره حقیقی زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ ۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} dx$
 ۳) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4-6x^2+25}$ ۴) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$
 ۵) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2(x^2+9)} dx$ ۶) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx$

۱۳. با استفاده از قضیه مانده‌ها، انتگرال‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید:

$$۱) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$$

$$۲) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta}$$

$$۳) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos 2\theta + \sin \theta}$$

$$۴) \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{3 - \cos \theta} d\theta$$

$$۵) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta}$$

$$۶) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(1 - e^{i\theta})}{e^{2i\theta} - 4} d\theta$$

موفق باشید