بسمه تعالی

ریاضی عمومی ۱

۹۷/۰۱/۲۳ **جوابهای میانترم** وقت : ۱۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

جواب ۱(الف). قرار می دهیم $a_n = \frac{1+\sqrt[3]{n^4}}{2+\sqrt[3]{n^5}}$ و $b_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{1}{n^{1/3}}$ و از آزمون مقایسه حدی استفاده می کنیم:

$$\ell = \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(1+\sqrt[3]{n^4})\sqrt[3]{n^5}}{(2+\sqrt[3]{n^5})\sqrt[3]{n^4}} = \lim \frac{n^3(1+n^{-4/3})}{n^3(1+2n^{-5/3})} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

چون $\ell = 1 > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ یک p-سری با $p = \frac{1}{3} \in (0,1)$ است و واگرا است، پس طبق آزمون مقایسه حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا است.

راه حل دوم استفاده از آزمون مقایسه:

$$a_n = \frac{1+\sqrt[3]{n^4}}{2+\sqrt[3]{n^5}} > \frac{\sqrt[3]{n^4}}{2\sqrt[3]{n^5}+\sqrt[3]{n^5}} = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{3\sqrt[3]{n^5}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{3}b_n.$$

جواب ۱ (ب). قرار می دهیم $a_n = \frac{e^n \cos n\pi}{1+\pi^n} = \frac{(-1)^n e^n}{1+\pi^n}$. در اینصورت،

$$0 < |a_n| = \frac{e^n}{1+\pi^n} < \frac{e^n}{\pi^n} = (\frac{e}{\pi})^n.$$

چون $\frac{e}{\pi} < 1$ و سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{e}{\pi})^n$ همگرا است، پس بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است و در نتیجه همگرا است.

راه حل دوم استفاده از آزمون ریشه:

$$\ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{e}{\sqrt[n]{1+\pi^n}} = \frac{e}{\max\{1,\pi\}} = \frac{e}{\pi} < 1.$$

جواب ۱(ج). قرار می دهیم $a_n = \frac{n!}{n^2 e^n} > 0$ و از آزمون نسبت استفاده می کنیم. داریم که

$$\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!n^2 e^n}{(n+1)^2 e^{n+1} n!} = \lim \frac{n^2}{(n+1)e} = +\infty > 1.$$

چون $\ell > 1$، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

راه حل دوم. نشان می دهیم $\lim a_n = +\infty \neq 0$، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

چون $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ برای $a > 0$، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{n^2 e^n} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{n^2 e^n} = \frac{n-1}{n} \times \frac{(n-2)!}{e^n} \\ &= \frac{n-1}{ne^2} \times \frac{(n-2)!}{e^{n-2}} \to \frac{1}{e^2} \times \infty = \infty. \end{aligned}$$

جواب ۲. بنا به تعریف داریم

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}-1} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{(\frac{1}{x}-1)\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-1)\ln x} = e^{(+\infty)(-\infty)} = e^{-\infty} = 0, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\tanh x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x\tanh x = 0. \end{aligned}$$

چون $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$، پس $f'(0) = 0$.

جواب ۳. قرار می دهیم

$$f(x) = x^x - 3 - 2x + x^2 = e^{x\ln x} + x^2 - 2x - 3 : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

چون $f(x)$ در دامنه خود پیوسته و مشتق پذیر است، پس می توانیم قضیه رل و بولزانو را بکار بریم. برای $x > 1$ داریم

$$f'(x) = e^{x\ln x}(1+\ln x)+2x-2 = 2(x-1)+e^{x\ln x}(1+\ln x) > 0; x > 1.$$

در نتیجه، تابع f روی بازه $[1,\infty)$ اکیدا صعودی است و بنابر قضیه رل معادله ی $f(x) = 0$ در بازه $[1,\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد. از طرف دیگر، $f(1) = -3 < 0$ و $f(2) = 1 > 0$، پس طبق قضیه ی بولزانو، تابع f در بازه $(1,2)$ حداقل یک ریشه دارد. بنابراین، دقیقا یک ریشه برای f وجود دارد که این ریشه در بازه $(1,2)$ قرار دارد. در نتیجه، دقیقا یک عدد حقیقی $a > 1$ وجود دارد که $f(a) = 0$، یعنی $a^a = 3+2a-a^2$.

جواب ۴. در حالت $a = b$ تساوی برقرار است، لذا حالت $0 < a < b$ را در نظر می گیریم. قضیه مقدار میانگین را روی بازه $[a,b]$ به کار می بریم. بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد c در بازه (a,b) وجود دارد که

$$|f(b)-f(a)| = |(b-a)f'(c)| = |b-a||f'(c)| = \frac{|b-a|}{e^{1/c}+1}.$$

چون

$$0 < a < c < b \Longrightarrow \frac{1}{c} > 0 \Longrightarrow e^{1/c} > 1 \Longrightarrow e^{1/c}+1 > 2 \Longrightarrow \frac{1}{e^{1/c}+1} < \frac{1}{2}.$$

بنابراین $f'(c) < \frac{1}{2}$ و در نتیجه حکم برقرار است.

جواب ۵. تابع $f(x) = x\ln x - \tan^{-1}(x-1)$ را روی بازه $[1,\infty)$ در نظر می گیریم. در اینصورت $f(1)=0$ و علاوه بر این،

$$f'(x) = 1+\ln x-\frac{1}{1+(x-1)^2} = 1-\frac{1}{1+(x-1)^2}+\ln x > 0, \quad (\forall x > 1).$$

در نتیجه، تابع f در بازه $[1,\infty)$ اکیدا صعودی است. بنابراین از $x > 1$ نتیجه می شود که $f(x) > f(1) = 0$.

راه حل دوم. قضیه مقدار میانگین را روی بازه $[1,x]$ به کار می بریم. بنابراین،

$$f(x)-f(1) = (x-1)f'(c) \Longrightarrow f(x)-0 = (x-1)(1-\frac{1}{1+(c-1)^2}+\ln c) > 0.$$

در نتیجه، $f(x) > 0$ برای هر $x > 1$.