

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از سریهای زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n} \quad (\text{الف})$$

پاسخ. میدانیم که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ، بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ (۱ نمره)
از آنجا که $a_n \rightarrow +\infty$ اگر و فقط اگر $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ ، نتیجه میگیریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$ (۱ نمره)

به این ترتیب $\left\{ \frac{(-1)^n n}{\ln n} \right\}$ دنباله ای کراندار نیست و در نتیجه نمیتواند همگرا باشد. (۱ نمره)

به ویژه $\frac{(-1)^n n}{\ln n}$ همگرا به صفر نیست، پس بنا به آزمون جمله عمومی، سری داده شده واگرا است. (۲ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n} \quad (\text{ب})$$

پاسخ.
روش اول:

$$\frac{n}{\cosh n} = \frac{n}{\frac{e^n + e^{-n}}{2}} = \frac{2n}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{2n}{e^n} \quad (1)$$

(۲ نمره)
ادعا میکنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ همگرا است. برای اثبات بنا بر آزمون نسبت و این که $\frac{n}{e^n} > 0$ داریم

$$\lim \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cosh n}$ همگرا است. (۲ نمره)
اکنون از رابطه (۱) و آزمون مقایسه نتیجه میشود سری داده شده همگرا است.
(۱ نمره)

روش دوم:

آزمون نسبت را میتوانیم مستقیماً به کار ببریم، $\frac{n}{\cosh n} > 0$.

$$\begin{aligned} \lim \frac{\frac{n+1}{\cosh(n+1)}}{\frac{n}{\cosh n}} &= \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{\cosh n}{\cosh(n+1)} \\ &= \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-(n+1)}} = \lim \frac{n+1}{n} \times \frac{1 + e^{-2n}}{e + e^{-2n-1}} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

زیرا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim \frac{n+1}{n} = 1$. در نتیجه سری داده شده بنا بر آزمون نسبت همگرا است. (۵ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱

آبان ماه ۱۳۹۵

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos n} \quad (\text{ج})$$

پاسخ.

روش اول:

با توجه به اینکه برای هر $x \in R$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ نتیجه میگیریم

$$\forall n \in N, \quad 0 < \frac{1}{n^2 + \cos n} \leq \frac{1}{n^2 - 1}$$

(۲ نمره)

اکنون با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه از همگرایی

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos n}$ همگرایی سری نتیجه میشود. (۲ نمره)

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ از آزمون مقایسه حدی با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 - 1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$

و همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ به دست می آید. (۱ نمره)

روش دوم:

با توجه به اینکه $-1 \leq \cos x \leq 1$ نتیجه میگیریم $0 < \frac{1}{n^2 + \cos n}$

از سوی دیگر داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + \cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + \cos n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n^2}} = 1 > 0$$

(۳ نمره)

$\{\cos n\}$ کراندار و دنباله $\{\frac{1}{n^2}\}$ همگرا به صفر است، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$ (۱ نمره)

در نتیجه از همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بنابر آزمون مقایسه حدی نتیجه میشود سری

داده شده همگراست. (۱ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱
آبان ماه ۱۳۹۵

۲. عدد c را چنان بیابید که تابع $f: R \rightarrow R$ با ضابطه زیر در $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ. باید داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln|x|}{x}}$$

(۱ نمره)

ابتدا نشان میدهیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{x} = -\infty$. اگر $a_n \rightarrow 0$ آنگاه $a_n^{\frac{1}{a_n}} \rightarrow 0$ و $a_n^{\frac{1}{a_n}} > 0$ پس $a_n^{\frac{1}{a_n}} \rightarrow +\infty$ (۱ نمره)

علاوه بر این $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نتیجه میگیریم $\ln|a_n| \rightarrow -\infty$ در نتیجه $\lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{\ln|a_n|}{a_n} = -\infty$ (۱ نمره)

از سوی دیگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ پس $e^{\frac{\ln|a_n|}{a_n}} \rightarrow 0$ و این یعنی برای پیوستگی تابع داده شده باید $c = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1}{x}} = 0$ (۱ نمره)

به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱

آبان ماه ۱۳۹۵

۳. الف) نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x) = \ln(2^x + 1)$ بر R پیوسته است.

ب) نشان دهید $c \in R$ وجود دارد که $c^2 = \ln(2^c + 1)$

پاسخ.

الف) میدانیم که تابع $g(x) = 2^x + 1 = e^{x \ln 2} + 1$ و تابع $h(x) = \ln x$ پیوسته هستند در نتیجه بنا به قضیه پیوستگی ترکیب توابع، $f(x) = (h \circ g)(x)$ تابعی پیوسته است. (۲ نمره)

ب) قرار میدهیم $g(x) = \ln(2^x + 1) - x^2$ (۱ نمره)

با توجه به قسمت قبل و پیوستگی تابع x^2 ، $g(x)$ تابعی پیوسته است. (۱ نمره)
بازه بسته $[0, 2]$ را در نظر بگیرید. $g(0) = \ln 2$ و $g(2) = \ln 5 - 4$. (۲ نمره)
از آنجا که $1 < 2$ و $e^4 < 5$ و تابع \ln تابعی اکیدا صعودی است، داریم

$$\ln 2 > \ln 1 = 0 \quad \text{و} \quad \ln 2 < \ln(e^4) = 4. \quad (2 \text{ نمره})$$

در نتیجه تابع $g(x)$ در بازه بسته $[0, 2]$ پیوسته و $g(0) \cdot g(2) < 0$. پس بنا به قضیه بولتسانو نقطه $c \in (0, 2)$ وجود دارد به طوری که $g(c) = 0$ یعنی $c^2 = \ln(2^c + 1)$ (۲ نمره)

توجه: نتیجه فوق روی بازه های بسته $[-1, 1]$ و $[1, 2]$ نیز برقرار است.