فصل ۲

دنباله و سری عددی

۲−۱ دنباله‌ی حقیقی

دنباله یکی از مفاهیم بنیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال است که از آن در بررسی برخی دیگر از مفاهیم ریاضی نظیر حد، پیوستگی و ... استفاده می‌شود. همچنین مفهوم سری عددی، که خود یکی ازابزارهای موثر در تعریف توابع جدید است، با استفاده از دنباله‌ها قابل بیان است.

به طور شهودی، منظور از یک دنباله‌ی حقیقی نامتناهی، گزینشی بی‌پایان از اعداد حقیقی است که در آن ترتیب انتخاب نیز در نظر گرفته می‌شود. دنباله‌ی اعداد طبیعی $۱, ۲, ۳, ۴, \cdots$ ساده‌ترین مثال از یک دنباله‌ی حقیقی نامتناهی است. برای بیان دقیق این موضوع به زبان ریاضی از مفهوم تابع استفاده می‌شود. زیرا گزینش متوالی اعداد همان مشخص کردن تابعی است که دامنه‌ی تعریف آن اعداد طبیعی و برد آن مجموعه‌ای از اعداد است.

تعریف ۲−۱−۱ یک **دنباله‌ی حقیقی** تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ است. به منظور سهولت، برای هر $n \in \mathbb{N}$ مقدار $f(n)$ را با a_n و دنباله‌ی $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را با $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یا $\{a_n\}$ نمایش می‌دهیم. ضابطه‌ی دنباله‌ی $\{a_n\}$ یعنی a_n را **جمله‌ی عمومی دنباله** می‌نامیم. در صورتی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، a_n متعلق به زیرمجموعه‌ای چون S از $\mathbb{R}$ باشد، $\{a_n\}$ را دنباله‌ای در S می‌نامیم.

می‌توان مفهوم دنباله‌ی عددی را به اعداد مختلط نیز گسترش داد که در این صورت

مفهوم **دنباله‌ی مختلط** $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ مطرح می‌شود. در این جا ما فقط دنباله‌های حقیقی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۲-۱-۲ می‌خواهیم برای هر یک از دنباله‌های زیر، سه جمله‌ی اول و جمله‌ی عمومی دنباله را تعیین کنیم.

الف) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(n)=\sqrt{n^۲+۵}$.

به ازای $n=۱,۲,۳$ سه جمله‌ی اول این دنباله عبارتند از $a_۱=\sqrt{۶}$، $a_۲=۳$ و $a_۳=\sqrt{۱۴}$. جمله‌ی عمومی این دنباله عبارت است از $a_n=\sqrt{n^۲+۵}$.

ب) $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(n)=\sqrt{n^۲-۵}$ که در آن $\mathbb{D}=\mathbb{N}-\{۱,۲\}$.

به نظر می‌رسد که تعریف این تابع با تعریف دنباله منطبق نیست. اما با تغییر ضابطه‌ی آن به صورت $g(n)=f(n+۲)=\sqrt{(n+۲)^۲-۵}$ می‌توان آن را دنباله‌ی $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(n)=\sqrt{(n+۲)^۲-۵}$ در نظر گرفت. سه جمله‌ی اول دنباله به ازای $n=۱,۲,۳$ به ترتیب عبارتند از $a_۱=۲$، $a_۲=\sqrt{۱۱}$ و $a_۳=\sqrt{۲۰}$. همچنین جمله‌ی عمومی دنباله $a_n=\sqrt{(n+۲)^۲-۵}$ است. برای سهولت، این دنباله را به صورت $\{\sqrt{n^۲-۵}\}_{n\geq ۳}$ نیز نمایش می‌دهیم.

ج) $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(n)=\sum\limits_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k!}$ که در آن $\mathbb{D}=\mathbb{N}\cup\{۰\}$.

مانند قسمت (ب)، این تابع نیز یک دنباله را مشخص می‌کند. سه جمله‌ی نخست این دنباله به ترتیب عبارتند از $a_۰=\frac{۱}{۰!}=۱$، $a_۱=۱+\frac{۱}{۱!}=۲$ و $a_۲=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}=\frac{۵}{۲}$.
در اینجا سه جمله‌ی اول را به ترتیب متناظر با مقادیر $n=۰,۱,۲$ به دست آورده‌ایم.
جمله‌ی عمومی دنباله $a_n=\sum\limits_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k!}$ است.

د) دنباله‌ی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(n)=c$ که $c\in\mathbb{R}$ عددی ثابت است. این دنباله را دنباله‌ی ثابت c می‌نامیم. برای این دنباله، همه‌ی جمله‌ها عدد ثابت c هستند.
با توجه به قسمت‌های (ب) و (ج) در این مثال، برخی از مؤلفین به جای $\mathbb{N}$ به عنوان دامنه‌ی دنباله، هر زیر مجموعه‌ی بی‌پایان از $\mathbb{Z}$ را هم مجاز می‌دانند.

مثال ۲-۱-۳ اگر $a_۱=۱$، $a_۲=\sqrt{۲}$، $a_۳=\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$، $a_۴=\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}$ و ...، آنگاه ضابطه‌ی این دنباله را می‌توان به صورت $a_۱=۱$ و به ازای $n\geq ۱$ با $a_{n+۱}=\sqrt{۱+a_n}$ بیان کرد. در این مثال نمی‌توان ضابطه‌ای صریح برای دنباله مطرح کرد. این مثال نمونه‌ای از یک **دنباله‌ی بازگشتی** (**یا دنباله‌ی تکرار**) است. در این نوع دنباله‌ها یک یا چند جمله‌ی اول دنباله اعدادی معلوم هستند و جمله‌ی عمومی بر حسب جمله‌های قبلی بیان می‌شود. در مثال بالا $a_۱=۱$ و با فرض $f(x)=\sqrt{۱+x}$،

$$\forall n\geq ۱,\qquad a_{n+۱}=f(a_n)=\sqrt{۱+a_n}$$

تعریف ۲–۱–۴ دنباله‌ی $\{a_n\}$ را **از بالا کراندار** می‌نامیم هرگاه عدد حقیقی K وجود داشته باشد به قسمی که

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leq K$$

به همین ترتیب، دنباله‌ی $\{a_n\}$ را **از پایین کراندار** می‌نامیم هرگاه $L \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad L \leq a_n$$

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را **کراندار** می‌نامیم هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد. در غیر این صورت، آن را **بی‌کران** می‌نامیم.

بنابر این دنباله‌ی $\{a_n\}$ کراندار است اگر و تنها اگر عدد $M > 0$ وجود داشته باشد که

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leq M$$

مثال ۲–۱–۵ الف) دنباله‌ی $\{\sin n\}$ کراندار است. زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|\sin n| \leq 1$. به نحو مشابه، $\{(-1)^n\}$ دنباله‌ای کراندار است.

ب) دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ کراندار است. زیرا برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$،

$$\begin{aligned} 0 < a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \end{aligned}$$

ج) دنباله‌ی $\{n\}$ دنباله‌ای از پایین کراندار و از بالا بی‌کران است. پس بنابه تعریف، این دنباله بی‌کران است.

تعریف ۲–۱–۶ دنباله‌ی حقیقی $\{a_n\}$ را **همگرا** می‌نامیم هرگاه عددی چون $a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

در این صورت a را **حد دنباله** می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim a_n = a$ یا $a_n \to a$.

تذکر ۲–۱–۷ طبق تعریف مشاهده می‌شود که $a_n \to a$ اگر و تنها اگر $|a_n - a| \to 0$. بنابر این، در حالت خاص $a_n \to 0$ اگر و تنها اگر $|a_n| \to 0$.

قضیه ۲–۱–۸ اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد آنگاه حد آن یکتا است.

اثبات. فرض کنیم $a,b \in \mathbb{R}$ هر دو در شرط (۱) صدق کنند. اگر $a \neq b$ آنگاه برای $\varepsilon = \frac{|b-a|}{4} > 0$، اعداد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارند به قسمی که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

به این ترتیب برای $n \geq \max\{N_1, N_2\}$،

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

که از آن نتیجه می‌شود $1 < \frac{1}{2}$. تناقض حاصل نشان می‌دهد که $a = b$. ■

مثال ۲–۱–۹ می‌خواهیم با استفاده از تعریف ۲–۱–۶، همگرایی هر یک از دنباله‌های زیر را تحقیق کنیم.

الف) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ب) $\left\{\frac{1}{n^r}\right\}$ (برای عدد ثابت و گویای $r > 0$)

ج) $\left\{\frac{n}{1+an}\right\}$ (برای عدد ثابت $a > 0$) د) $\{b^n\}$ (برای عدد ثابت $0 < b < 1$)

ه) $\left\{\frac{\sin^3 n}{n}\right\}$

الف) نشان می‌دهیم $\lim \frac{1}{n} = 0$.

برای $\varepsilon > 0$، کافی است $N \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{1}{N} < \varepsilon$، یا به طور معادل $N > \frac{1}{\varepsilon}$. در این صورت،

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ب) برای عدد ثابت و گویای $r > 0$، نشان می‌دهیم $\lim \frac{1}{n^r} = 0$.

برای $\varepsilon > 0$، کافی است $N \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $N > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$. در این صورت،

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n^r} - 0\right| \leq \frac{1}{N^r} < \varepsilon$$

ج) برای عدد ثابت $a > 0$، نشان می‌دهیم $\lim \frac{n}{1+an} = \frac{1}{a}$.

برای $\varepsilon > 0$، با توجه به نامساوی

$$\left|\frac{n}{1+na} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a(1+na)}\right| < \frac{1}{na^2}$$

کافی است $N \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{1}{Na^2} < \varepsilon$، یا به طور معادل $N > \frac{1}{\varepsilon a^2}$.
به این ترتیب

$$\forall n \geq N, \qquad |\frac{n}{1+na} - \frac{1}{a}| < \frac{1}{na^2} \leq \frac{1}{Na^2} < \varepsilon$$

د) برای عدد ثابت $0 < b < 1$، نشان می‌دهیم $\lim b^n = 0$.
با توجه به فرض، $\frac{1}{b} > 1$. با قرار دادن $a := \frac{1}{b} - 1$ داریم $a > 0$ و $b = \frac{1}{1+a}$. در نتیجه $b^n = \frac{1}{(1+a)^n}$. پس بنابر نامساوی برنولی،

$$b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > 0$، با انتخاب $N \in \mathbb{N}$ به قسمی که $\frac{1}{Na} < \varepsilon$، یا به طور معادل برای $N > \frac{1}{\varepsilon a}$ داریم

$$\forall n \geq N, \qquad |b^n - 0| = b^n < \frac{1}{na} \leq \frac{1}{Na} < \varepsilon$$

ه) نشان می‌دهیم $\lim \frac{\sin^3 n}{n} = 0$.
برای $\varepsilon > 0$، با توجه به نامساوی $|\frac{\sin^3 n}{n}| \leq \frac{1}{n}$، کافی است $N \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{1}{N} < \varepsilon$. در این صورت،

$$\forall n \geq N, \qquad |\frac{\sin^3 n}{n} - 0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

تمرین ۲–۱–۱۰ با استفاده از تعریف ۲–۱–۶، برای عدد حقیقی λ و عدد گویا و مثبت r نشان دهید $\lim(\lambda + \frac{1}{n^r}) = \lambda$ و $\lim \lambda\frac{1}{n^r} = 0$.

اکنون که با تعریف همگرایی دنباله آشنا شدیم، به بررسی برخی از ویژگی‌های دنباله‌های همگرا می‌پردازیم. بحث را با قضیه‌ی زیر آغاز می‌کنیم.

قضیه ۲–۱–۱۱ هر دنباله‌ی همگرا کراندار است.

اثبات. فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی همگرا به a باشد. در این صورت برای $\varepsilon = 1$، عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n \geq N_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$$

و از آنجا برای هر $n \geq N_\circ$، $|a_n| < |a| + 1$. با انتخاب $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N_\circ - 1}|, |a| + 1\}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$ مشاهده می‌شود که $|a_n| \leq M$. ■

باید توجه داشت که عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست. به طور مثال، دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ کراندار است اما در مثال ۲–۱–۳۶ خواهیم دید که همگرا نیست.

از قضیه‌ی قبل نتیجه‌ی زیر برای اثبات واگرائی به دست می‌آید.

نتیجه ۲–۱–۱۲ هر دنباله‌ی بی‌کران واگرا است.

مثال ۲–۱–۱۳ دنباله‌ی $\{n^2 - n\}$ کراندار نیست. زیرا به ازای $n > 1$ همواره $n^2 \geq 2n$ و در نتیجه $n^2 - n \geq n$. بنابر این $\{n^2 - n\}$ واگرا است.

لم ۲–۱–۱۴ فرض کنیم $\lim a_n = a$ و $a \neq 0$. در این صورت $N_\circ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $n \geq N_\circ$،

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$$

اثبات. برای $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$، از فرض $a_n \to a$ نتیجه می‌شود $N_\circ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N_\circ \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$$

به این ترتیب، برای هر $n \geq N_\circ$،

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \tag{2}$$

در نتیجه

$$-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2}$$

که معادل است با

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$$

■

تذکر ۲–۱–۱۵ در لم ۲–۱–۱۴، از نامساوی $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ نتیجه می‌شود $a - \frac{|a|}{2} < a_n < a + \frac{|a|}{2}$. به این ترتیب مشاهده می‌شود که $N_\circ \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N_\circ$، a_n با a هم علامت است.

تمرین ۲–۱–۱۶ فرض کنید $a_n \to a$. نشان دهید

الف) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n \geq 0$ آنگاه $a \geq 0$.

ب) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n \leq 0$ آنگاه $a \leq 0$.

قضیه‌ی بعد که کاربردهای فراوانی در بحث دنباله‌ها دارد، **قضیه‌ی فشردگی** یا **قضیه‌ی ساندویچ** نامیده می‌شود.

قضیه ۲–۱–۱۷ فرض کنیم برای سه دنباله‌ی $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$، عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n \geq N_0$،

$$b_n \leq a_n \leq c_n \tag{۳}$$

هم چنین فرض کنیم $\lim b_n = \lim c_n = \ell$. در این صورت، دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا است و $\lim a_n = \ell$.

اثبات. برای $\varepsilon > 0$، با توجه به فرض‌های $b_n \to \ell$ و $c_n \to \ell$، اعداد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارند که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n \geq N_1 \implies |b_n - \ell| < \varepsilon$$
$$n \geq N_2 \implies |c_n - \ell| < \varepsilon$$

یا به طور معادل،

$$n \geq N_1 \implies \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$$
$$n \geq N_2 \implies \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$$

اکنون برای $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ و بنابر نامساوی‌های فوق و نامساوی (۳)،

$$\forall n \geq N, \qquad \ell - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < \ell + \varepsilon$$

و در نتیجه برای هر $n \geq N$، $|a_n - \ell| < \varepsilon$. ■

مثال ۲–۱–۱۸ با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، درستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

الف) $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$ که در آن $a > 0$ ثابت است.

ابتدا $N_0 \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $a < N_0$. در نتیجه برای هر $n \geq N_0$،

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{a^n}{n!} &= \left(\frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \times \cdots \times \frac{a}{N_0 - 1}\right) \times \cdots \times \frac{a}{n} \\
&\leq \left(\frac{a \times \cdots \times a}{1 \times \cdots \times (N_0 - 1)}\right) \frac{a}{n} \\
&= \frac{a^{N_0}}{(N_0 - 1)!} \, \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

با توجه به تمرین ۲–۱–۱۰، با فرض $\lambda := \frac{a^{N_0}}{(N_0 - 1)!}$، داریم $\lim \lambda \frac{1}{n} = 0$. پس طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

ب) $\lim \frac{n}{a^n} = 0$ که در آن $a > 1$ ثابت است.
قرار می‌دهیم $a = 1 + b$ که در آن $b > 0$. با توجه به اتحاد دوجمله‌ای نیوتن برای $x, y \geq 0$ و $n \geq 2$، داریم

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 \quad (4)$$

پس برای $x = 1$ و $y = b$ نامساوی زیر به دست می‌آید.

$$a^n = (1 + b)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\, b^2 \quad (5)$$

بنابر نامساوی (۵) خواهیم داشت،

$$0 < \frac{n}{a^n} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\, b^2} = \frac{2}{(n-1)b^2}$$

چون $\lim \frac{2}{(n-1)b^2} = 0$، بنابر قضیه‌ی فشردگی، $\lim \frac{n}{a^n} = 0$.

ج) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} = 1$.
برای $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{n^2 + n} + \frac{n}{n^2 + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} &\leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \\
&\leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 1}.
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n + 1} = \frac{n^2}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1} \leq 1.$$

از سوی دیگر، بنابر تمرین ۲–۱–۱۰، $\lim(1-\frac{1}{n})=1$. به این ترتیب با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}=1$.

به عنوان یکی از کاربردهای مهم قضیه‌ی فشردگی، یکی از ویژگی‌های اعداد حقیقی را ثابت می‌کنیم.

نتیجه ۲–۱–۱۹ برای هر عدد حقیقی a، دنباله‌های $\{r_n\}$ از اعداد گویا و $\{t_n\}$ از اعداد گنگ وجود دارند به قسمی که $\lim r_n=\lim t_n=a$.

اثبات. بنابر یکی از ویژگی‌های اعداد حقیقی، برای هر دو عدد حقیقی x و y با شرط $x<y$، عدد گویای r و عدد گنگ t وجود دارند که

$$x\leq r\leq y \qquad \text{و} \qquad x\leq t\leq y$$

اکنون برای $n\in\mathbb{N}$، $x=a$ و $y=a+\frac{1}{n}$، عدد گویای r_n و عدد گنگ t_n وجود دارند که

$$a\leq r_n\leq a+\frac{1}{n}$$
$$a\leq t_n\leq a+\frac{1}{n}$$

از سوی دیگر $\lim a=\lim(a+\frac{1}{n})=a$. در نتیجه بنابر قضیه‌ی ساندویچ، $\lim r_n=\lim t_n=a$. ■

با توجه به تعریف جمع، ضرب و تقسیم توابع حقیقی، اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی حقیقی باشند آنگاه دنباله‌های $\{a_n\pm b_n\}$، $\{a_nb_n\}$ و $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ $(b_n\neq 0)$ قابل تعریف هستند.

لم ۲–۱–۲۰ فرض کنیم $\lim b_n=0$. در این صورت،

الف) اگر $\lim a_n=0$ آنگاه $\lim(a_n\pm b_n)=0$.

ب) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد آنگاه $\lim a_nb_n=0$.

اثبات. الف) برای $\varepsilon>0$، با توجه به فرض‌های $a_n\to 0$ و $b_n\to 0$، اعداد $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ وجود دارند که برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$n\geq N_1\Longrightarrow |a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$n\geq N_2\Longrightarrow |b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

اکنون با در نظر گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$، برای هر $n \geq N$،

$$|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon$$

ب) بنا به فرض، $M > 0$ وجود دارد به قسمی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n| \leq M$. برای $\varepsilon > 0$، با توجه به این که $b_n \to 0$، عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\forall n \geq N, \qquad |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

در نتیجه برای هر $n \geq N$،

$$|a_n b_n| \leq M|b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

■

مثال ۲–۱–۲۱ نشان می‌دهیم که برای هر عدد گویای $r > 0$، $\frac{\sin n}{n^r} \to 0$.

در مثال ۲–۱–۹ مشاهده کردیم که برای عدد گویای $r > 0$، $\lim \frac{1}{n^r} = 0$. از سوی دیگر، دنباله‌ی $\{\sin n\}$ کراندار است. پس بنابر لم قبل، $\lim \frac{\sin n}{n^r} = 0$.

قضیه ۲–۱–۲۲ فرض کنیم $\lim a_n = a$ و $\lim b_n = b$. در این صورت،

الف) $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

ب) $\lim(a_n b_n) = ab$.

ج) اگر $b \neq 0$ آنگاه $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ و از آنجا $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

اثبات. الف) با استفاده از نامساوی مثلثی برای اعداد حقیقی،

$$0 \leq |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

از سوی دیگر با توجه به فرض قضیه و قسمت (الف) لم ۲–۱–۲۰،

$$|a_n - a| + |b_n - b| \to 0$$

در نتیجه بنابر قضیه‌ی فشردگی، $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \to 0$ و از آنجا بنابر تذکر ۲–۱–۷،

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

ب) بنابر نامساوی مثلثی،

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$$

با توجه به همگرایی دنباله‌ی $\{a_n\}$، این دنباله کراندار است. پس دنباله‌ی $\{|a_n|\}$ نیز کراندار خواهد بود. بنابر قسمت (ب) لم ۲–۱–۲۰، $|a_n|\,|b_n - b| \to ۰$. به نحو مشابه، $|b|\,|a_n - a| \to ۰$ و از آنجا داریم

$$\lim\,(|a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|) = ۰.$$

پس بنابر قضیه‌ی فشردگی، $|a_nb_n - ab| \to ۰$ و در نتیجه $\lim(a_nb_n) = ab$.

ج) اگر $b \neq ۰$ آنگاه، بنا به لم ۲–۱–۱۴، $N_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $n \geq N_۰$، $|b_n| > \frac{|b|}{۲}$. به این ترتیب،

$$\forall n \geq N_۰, \qquad |\frac{۱}{b_n} - \frac{۱}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|} \leq \frac{۲}{|b|^۲}|b_n - b|$$

مشابه استدلال قسمت‌های قبل، $\frac{۲}{|b|^۲}\,|b_n - b| \to ۰$. در نتیجه $\lim|\frac{۱}{b_n} - \frac{۱}{b}| = ۰$. ■

نتیجه ۲–۱–۲۳ فرض کنیم $\lim a_n = a$. در این صورت

الف) برای هر عدد ثابت $\alpha \in \mathbb{R}$، $\alpha a_n \to \alpha a$.

ب) برای هر عدد ثابت $k \in \mathbb{N}$، $a_n^k \to a^k$.

ج) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x باشد آنگاه $P(a_n) \to P(a)$.

تمرین ۲–۱–۲۴ فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی نامنفی و همگرا به a باشد. برای عدد گویای $r > ۰$، نشان دهید $\lim a_n^r = a^r$.

مثال ۲–۱–۲۵ می‌خواهیم با استفاده از گزاره‌هایی که تاکنون ثابت کرده‌ایم، حد هر یک از دنباله‌های زیر با جمله‌ی عمومی داده شده را به‌دست آوریم.

الف) $a_n = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt[۳]{n})^۴}{n^۲ + ۱}$.

جمله‌ی عمومی دنباله، یعنی a_n را می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم.

$$a_n = \frac{n^۲(۱ - \frac{\sqrt[۳]{n}}{\sqrt{n}})^۴}{n^۲(۱ + \frac{۱}{n^۲})} = \frac{(۱ - \frac{۱}{\sqrt[۶]{n}})^۴}{(۱ + \frac{۱}{n^۲})}$$

بنابر نتیجه‌ی قبل $(۱ - \frac{۱}{\sqrt[۶]{n}})^۴ \to ۱$. همچنین، $(۱ + \frac{۱}{n^۲}) \to ۱$. در نتیجه

$$\lim a_n = \lim \frac{(۱ - \frac{۱}{\sqrt[۶]{n}})^۴}{(۱ + \frac{۱}{n^۲})} = ۱$$

ب) $a_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n+r} + b^{n+r}}$ که $a, b > ۰$ اعداد حقیقی ثابت و $r > ۰$ عددی گویا و ثابت است.

دو حالت در نظر می‌گیریم.

(i) $a = b$. در این صورت دنباله‌ی مورد نظر به صورت زیر ساده می‌شود.

$$a_n = \frac{a^n + a^n}{a^{n+r} + a^{n+r}} = \frac{a^n}{a^{n+r}} = \frac{۱}{a^r}$$

با توجه به این که $\{\frac{۱}{a^r}\}$ یک دنباله‌ی ثابت است، در این حالت $\lim a_n = \frac{۱}{a^r}$.

(ii) $a < b$. در این صورت می‌توان نوشت

$$a_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n+r} + b^{n+r}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + ۱}{\left(\frac{a}{b}\right)^n a^r + b^r}$$

اما چون $۰ < \frac{a}{b} < ۱$، بنابر قسمت (د) مثال ۲–۱–۹، $\lim(\frac{a}{b})^n = ۰$. پس

$$(\left(\frac{a}{b}\right)^n a^r + b^r) \to b^r \quad , \quad (\left(\frac{a}{b}\right)^n + ۱) \to ۱$$

در نتیجه

$$\lim a_n = \lim \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + ۱}{\left(\frac{a}{b}\right)^n a^r + b^r} = \frac{۱}{b^r}$$

در حالت $a > b$ با استدلال مشابه ثابت می‌شود که $\lim a_n = \frac{۱}{a^r}$.

ج) $a_n = a^{\frac{۱}{n}}$ که $a > ۰$ عددی ثابت است.

سه حالت در نظر می‌گیریم.

(i) $a = ۱$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = a^{\frac{۱}{n}} = ۱$ و در نتیجه $\lim a_n = ۱$.

(ii) $a > ۱$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a^{\frac{۱}{n}} > ۱$. بنابر این دنباله‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n = a^{\frac{۱}{n}} - ۱$ دنباله‌ای مثبت است. با استفاده از نامساوی برنولی، $a = (۱ + b_n)^n \geq ۱ + nb_n$. بنابر این $۰ < b_n \leq \frac{a - ۱}{n}$. در نتیجه بنا بر قضیه‌ی فشردگی $\lim b_n = ۰$. پس

$$\lim a^{\frac{۱}{n}} = \lim(b_n + ۱) = ۱$$

(iii) $۰ < a < ۱$. در این صورت $\frac{۱}{a} > ۱$ و در نتیجه بنا به قسمت قبل، $\lim \frac{۱}{a^{\frac{۱}{n}}} = \lim(\frac{۱}{a})^{\frac{۱}{n}} = ۱$. به این ترتیب، در این حالت نیز $\lim a^{\frac{۱}{n}} = ۱$.

د) $a_n = n^{\frac{۱}{n}}$.

قرار می‌دهیم $b_n := a_n - ۱$. در این صورت برای $n \geq ۱$ داریم $b_n \geq ۰$ و $۱ + b_n = n^{\frac{۱}{n}}$ یا به طور معادل $(۱ + b_n)^n = n$. از سوی دیگر، بنابر نامساوی (۴) در مثال ۲–۱–۱۸،

به ازای $x = ۱$ و $y = b_n$ داریم $n = (۱ + b_n)^n \geq \frac{n(n-۱)}{۲} b_n^۲$. در نتیجه

$$\circ \leq b_n \leq \sqrt{\frac{۲}{n-۱}}$$

با توجه به تمرین ۲–۱–۲۴ و قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌شود $\lim b_n = \circ$. پس $\lim n^{\frac{۱}{n}} = ۱$.

ه) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ که $a, b > \circ$ اعدادی ثابت هستند.
بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم $a \leq b$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{۲b^n} = ۲^{\frac{۱}{n}} b$$

از سوی دیگر بنابر قسمت (ج)، $۲^{\frac{۱}{n}} \to ۱$. به این ترتیب با استفاده از قضیه‌ی فشردگی $\lim a_n = b$.

مثال ۲–۱–۲۶ فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی همگرا به عدد مثبت a باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $a_n^{\frac{۱}{n}} \to ۱$.
بنابر لم ۲–۱–۱۴، عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{a}{۲} < a_n < \frac{۳a}{۲}$$

در نتیجه برای هر $n \geq N$،

$$\left(\frac{a}{۲}\right)^{\frac{۱}{n}} < a_n^{\frac{۱}{n}} < \left(\frac{۳a}{۲}\right)^{\frac{۱}{n}}$$

بنابر قسمت (ج) مثال ۲–۱–۲۵، حد دو طرف نامساوی‌های فوق برابر ۱ است. پس، بنابر قضیه‌ی فشردگی، $\lim a_n^{\frac{۱}{n}} = ۱$.

تعریف ۲–۱–۲۷ دنباله‌ی $\{a_n\}$ را **صعودی** می‌نامیم هرگاه

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+۱}.$$

به همین ترتیب، دنباله‌ی $\{a_n\}$ را **نزولی** نامیم هرگاه

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq a_{n+۱}.$$

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را **یکنوا** می‌نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

پیش از این مشاهده کردیم که هر دنباله‌ی همگرا کراندار است. ولی اشاره کردیم که عکس این گزاره در حالت کلی برقرار نیست. در قضیه‌ی بعد ثابت می‌کنیم که در مورد دنباله‌های یکنوا، کرانداری و همگرایی معادل هستند.

قضیه ۲-۱-۲۸ (**همگرائی دنباله‌ی یکنوا**) الف) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار باشد آنگاه همگرا است.
ب) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ نزولی و از پایین کراندار باشد آنگاه همگرا است.

اثبات. الف) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار باشد. مجموعه‌ی $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای غیرتهی از اعداد حقیقی و کراندار از بالا و در نتیجه، بنابر اصل کمال اعداد حقیقی، دارای کوچکترین کران بالا است. قرار می‌دهیم $a := \sup A$ و نشان می‌دهیم $a_n \to a$. برای $\epsilon > 0$، چون $a - \epsilon$ کران بالای مجموعه‌ی A نیست عدد طبیعی N وجود خواهد داشت که $a - \epsilon < a_N$. در نتیجه با استفاده از صعودی بودن این دنباله، داریم

$$\forall n \geq N, \quad a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon$$

به این ترتیب برای هر $n \in \mathbb{N}$ با شرط $n \geq N$، $|a_n - a| < \epsilon$. پس بنابر تعریف، $a = \lim a_n$.

ب) مشابه (الف) اثبات می‌شود. ■

باید توجه داشت که این قضیه شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن دنباله همگرا باشد ولی اطلاعی در مورد مقدار حد آن به دست نمی‌دهد.

برای مشاهده‌ی روش استفاده از این قضیه به چند مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۲-۱-۲۹ دنباله‌ی $\{a_n\}$ را با جمله‌ی عمومی $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ در نظر می‌گیریم. برای این دنباله، با استفاده از نامساوی برنولی داریم

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}(\frac{n+1}{n}) = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}(\frac{n+1}{n})\\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}(\frac{n+1}{n}) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)(\frac{n+1}{n}) = 1\end{aligned}$$

به این ترتیب، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \leq a_{n+1}$. پس این دنباله صعودی است.
اکنون نشان می‌دهیم که این دنباله کراندار است. با استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتن،

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n})^k$$

از سوی دیگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $1 \le k \le n$،

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n})^k = \frac{(n-k+1)\cdots n}{n^k}\frac{1}{k!} \le \frac{1}{k!}$$

در نتیجه

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n})^k \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

بنابر قسمت (ب) مثال ۲–۱–۵، دنباله‌ی $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ کراندار است. به این ترتیب، دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار و در نتیجه همگرا است. همانطور که اشاره کردیم، در این مثال قضیه‌ی همگرایی دنباله‌ی یکنوا در مورد مقدار حد این دنباله اظهار نظری نمی‌کند.

مثال ۲–۱–۳۰ در قسمت (ب) مثال ۲–۱–۵، دیدیم که دنباله‌ی $a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ کراندار است. علاوه بر این، برای هر $n \ge 0$،

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = a_n$$

به عبارت دیگر، این دنباله صعودی و در نتیجه همگرا است.

مثال ۲–۱–۳۱ می‌خواهیم همگرایی دنباله‌ی بازگشتی $a_1 = 1$، $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ ($n \ge 1$) را به کمک قضیه‌ی همگرایی دنباله‌ی یکنوا بررسی کنیم.

با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. داریم $a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{2} > 1 = a_1$. با فرض $a_n > a_{n-1}$ خواهیم داشت

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} > \sqrt{1+a_{n-1}} = a_n$$

اکنون نشان می‌دهیم که این دنباله از بالا کراندار است. مشاهده می‌کنیم که

$$a_1 = 1 < 2 \quad , \quad a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{1+1} < 2 \quad , \quad a_3 = \sqrt{1+a_2} = \sqrt{1+2} < 2$$

و اگر $a_n < 2$ آنگاه $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} < 2$. پس بنابر استقرا، برای هر n، $a_n < 2$، یعنی $\{a_n\}$ از بالا به ۲ کراندار است. در نتیجه، بنابر قضیه‌ی همگرایی دنباله‌ی یکنوا، این دنباله همگرا است. حد این دنباله رادر مثال ۲–۱–۳۹ به دست می آوریم.

زیر دنباله

یکی از مفاهیم وابسته به دنباله‌ها مفهوم زیردنباله است. نظر به این که رابطه‌ی مهمی بین همگرایی یک دنباله و همگرایی زیردنباله‌های آن وجود دارد، در این بخش به اختصار به معرفی این مفهوم می‌پردازیم.

تعریف ۲–۱–۳۲ فرض کنیم $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=f(n)$ باشد. برای تابع اکیداً صعودی $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، دنباله‌ی $f\circ g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ که جمله‌ی عمومی آن عبارت است از $b_n=(f\circ g)(n)=a_{g(n)}$ را یک **زیر دنباله‌ی** f می‌نامیم.

به این ترتیب یک زیردنباله از $\{a_n\}$ در حالت کلی به شکل $\{a_{g(n)}\}$ است که در آن $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی اکیداً صعودی است. با توجه به این که بی‌شمار تابع اکیداً صعودی $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ قابل تعریف است، برای هر دنباله بی‌شمار زیردنباله وجود دارد.

برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ زیردنباله‌ی $\{a_{2n}\}$ را **زیردنباله‌ی زوج** می‌نامیم. این زیردنباله به ازای تابع با ضابطه‌ی $g(n)=2n$ به دست می‌آید. به همین ترتیب به ازای $g(n)=2n+1$ **زیردنباله‌ی فرد** $\{a_{2n+1}\}$ به دست می‌آید.

مثال ۲–۱–۳۳ الف) برای دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$، زیر دنباله‌های زوج و فرد به ترتیب دنباله‌های ثابت ۱ و ۱− هستند.
ب) برای دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی

$$a_n=\begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ بر ۵ قابل قسمت باشد} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

دنباله‌ی $\{a_{5n}\}=\{5n\}$ یک زیردنباله است.

قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین همگرایی دنباله و زیردنباله‌هایش را مطرح می‌کند.

قضیه ۲–۱–۳۴ الف) دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به عدد a است اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ی آن به عدد a همگرا باشد.
ب) دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به عدد a است اگر و تنها اگر زیردنباله‌های زوج و فرد آن به عدد a همگرا باشند.

برای مشاهده‌ی اثبات می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید. نتیجه‌ی زیر برای اثبات واگرایی به کار گرفته می‌شود.

نتیجه ۲–۱–۳۵ اگر زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ واگرا باشد، یا اگر دست کم دو زیر دنباله از آن به عددهای متمایز همگرا شوند آنگاه $\{a_n\}$ واگرا است.

مثال ۲–۱–۳۶ الف) برای دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ اگر قرار دهیم $a_n=(-1)^n$، آنگاه زیردنباله‌های $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n+1}\}$ به ترتیب به اعداد ۱ و ۱− همگرا می‌شوند. پس $\{(-1)^n\}$ واگرا است.

ب) برای دنباله‌ی $\{a_n\} = \{\sin(\frac{\pi}{2}n)\}$، زیردنباله‌های $\{a_{4n}\}$ و $\{a_{4n+1}\}$ به ترتیب دنباله‌های ثابت 0 و 1 هستند که به 0 و 1 همگرا می‌شوند. پس $\{\sin(\frac{\pi}{2}n)\}$ واگرا است.

تمرین ۲–۱–۳۷ آیا دنباله‌ی $a_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ عدد اول باشد} \\ \frac{1}{n} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ دنباله‌ای همگرا است؟ چرا؟

تمرین ۲–۱–۳۸ فرض کنیم $\lim a_n = a$.

الف) مقدار $\lim a_{n+1}$ برابر چیست؟ چرا؟

ب) برای عدد صحیح و ثابت $k \in \mathbb{Z}$ مقدار $\lim a_{n+k}$ برابر چیست؟ چرا؟

مثال ۲–۱–۳۹ می‌خواهیم حد دنباله‌ی بازگشتی $a_1 = 1$، $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $(n \geq 1)$ را به دست آوریم.

در مثال ۲–۱–۳۱ ثابت شد که این دنباله همگرا است. فرض کنیم $\lim a_n = a$. در این صورت بنابر تمرین‌های ۲–۱–۲۴ و ۲–۱–۳۸،

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+a}.$$

در نتیجه $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. از سوی دیگر، بنابر تذکر ۲–۱–۱۵، $a > 0$. پس

$$\lim a_n = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

تمرین ۲–۱–۴۰ همگرایی دنباله‌ی بازگشتی $a_1 = 1$، $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ $(n \geq 1)$ را بررسی کنید و در صورت همگرایی، حد آن را به دست آورید.

واگرایی به بی‌نهایت

بحث واگرایی دنباله‌ها در حالت کلی گسترده است. به همین دلیل، برای جلوگیری از طولانی شدن بحث، در اینجا تنها به ذکر یک حالت خاص آن می‌پردازیم.

تعریف ۲–۱–۴۱ دنباله‌ی $\{a_n\}$ را واگرا به **مثبت بی‌نهایت** می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim a_n = \infty$ هرگاه

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n > N \Longrightarrow a_n > M$$

به همین ترتیب دنباله‌ی $\{a_n\}$ را واگرا به **منفی بی‌نهایت** می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim a_n = -\infty$ هرگاه

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n > N \Longrightarrow a_n < -M$$

مثال ۲-۱-۴۲ الف) دنباله‌ی $\{n^{2}-1\}$ واگرا به مثبت بی‌نهایت است.
زیرا به ازای $n>1$، همواره $n^{2}-1>n$. پس برای $M>0$ با انتخاب $N>\max\{M,1\}$ نتیجه می‌شود

$$\forall n>N, \qquad n^{2}-1>M$$

ب) دنباله‌ی $\{\frac{n-n^{2}}{n+1}\}$ واگرا به منفی بی‌نهایت است.
زیرا به ازای $n\in\mathbb{N}$، همواره $n+1\leq 2n$. بنابر این برای هر $n>1$،

$$\frac{n^{2}-n}{n+1}\geq\frac{n(n-1)}{2n}=\frac{n-1}{2}\geq\frac{n}{4}$$

پس برای $M>0$، با انتخاب $N>\max\{4M,1\}$ نتیجه می‌شود

$$\forall n>N, \qquad \frac{n^{2}-n}{n+1}\geq\frac{n}{4}>\frac{N}{4}>M$$

که معادل است با

$$\forall n>N, \qquad \frac{n-n^{2}}{n+1}<-M$$

ج) فرض کنیم $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$. نشان می‌دهیم $\lim a_n=\infty$.
مشاهده می‌شود که

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$$

پس $\{a_n\}$ صعودی است. از سوی دیگر

$$\begin{aligned}a_{2n} &= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\\ &= a_n+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد باید $\lim a_{2n}=\lim a_n$ و در نتیجه $\lim(a_{2n}-a_n)=0$ که طبق نامساوی فوق ناممکن است. پس $\{a_n\}$ واگرا است. به این ترتیب، با توجه به صعودی بودن $\{a_n\}$، این دنباله نمی‌تواند از بالا کراندار باشد. پس برای هر $M>0$ عدد $N_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $a_{N_0}>M$. حال از صعودی بودن $\{a_n\}$ نتیجه می‌شود

$$\forall n>N_0, \qquad a_n\geq a_{N_0}>M$$

و این یعنی $\lim a_n=\infty$.

تمرین ۲–۱–۴۳ نشان دهید دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به مثبت بی‌نهایت است اگر و تنها اگر دنباله‌ی $\{-a_n\}$ واگرا به منفی بی‌نهایت باشد.

لم ۲–۱–۴۴ فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی حقیقی باشد. در این صورت $\lim a_n = \infty$ اگر و تنها اگر $N_\circ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای $n > N_\circ$، داشته باشیم $a_n > \circ$ و $\lim \frac{\backslash}{a_n} = \circ$.

اثبات. فرض کنیم $\lim a_n = \infty$. در این صورت برای $\varepsilon > \circ$، به ازای $M = \frac{1}{\varepsilon}$، عدد $N_\circ \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n > N_\circ \Longrightarrow a_n > M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

که معادل است با

$$n > N_\circ \Longrightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

پس برای هر $n \geq N_\circ$، $a_n > 0$ و

$$|\frac{1}{a_n} - 0| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

یعنی $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

برعکس، فرض کنیم $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ و برای $n > N_\circ$ داشته باشیم $a_n > 0$. در این صورت برای $M > 0$، به ازای $\varepsilon = \frac{1}{M}$، عدد $N_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n > N_1 \Longrightarrow |\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$$

که معادل است با

$$n > N_1 \Longrightarrow |a_n| > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

پس برای $M > 0$ با انتخاب $N = \mathrm{Max}\{N_1, N_\circ\}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$n > N \Longrightarrow a_n = |a_n| > M$$

و این یعنی $\lim a_n = \infty$. ■

قضیه ۲–۱–۴۵ فرض کنیم $\lim a_n = \infty$ و $\lim b_n = b$. در این صورت،

الف) $\lim(a_n \pm b_n) = \infty$.

ب) اگر $b > 0$ آنگاه $\lim(a_n b_n) = \infty$ و اگر $b < 0$ آنگاه $\lim(a_n b_n) = -\infty$.

ج) $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

اثبات. الف) نشان می‌دهیم $\lim(a_n+b_n)=\infty$.
دنباله‌ی $\{b_n\}$ همگرا و در نتیجه کراندار است. پس عدد $M_\circ>\circ$ وجود دارد به قسمی که برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$|b_n|<M_\circ$$

یا به طور معادل $-M_\circ<b_n<M_\circ$.

از $\lim a_n=\infty$ نتیجه می‌شود برای $M>\circ$ عدد $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad n>N\Longrightarrow a_n>M+M_\circ$$

پس برای $M>\circ$،

$$\forall n>N,\quad a_n+b_n>a_n-M_\circ>M$$

و این یعنی $\lim a_n+b_n=\infty$.

ب) فرض کنیم $b>\circ$. نشان می‌دهیم $\lim a_nb_n=\infty$.
بنابر تذکر ۲–۱–۱۵، عدد $N_\circ\in\mathbb{N}$ یافت می‌شود به طوری که برای $n\geq N_\circ$، $\frac{b}{۲}<b_n$.
همچنین از $\lim a_n=\infty$ نتیجه می‌شود برای $M>\circ$ عدد $N_۱\in\mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad n>N_۱\Longrightarrow a_n>\frac{۲M}{b}$$

پس برای $M>\circ$، با انتخاب $N=\mathrm{Max}\{N_۱,N_\circ\}$، برای هر $n>N$،

$$a_nb_n>\frac{۲M}{b}\,\frac{b}{۲}=M$$

و این یعنی $\lim a_nb_n=\infty$.
حالت $b<\circ$ از بحث قبل و تمرین ۲–۱–۴۳ نتیجه می‌شود.
ج) بنابر لم ۲–۱–۴۴ از یک سو $\lim\frac{۱}{a_n}=\circ$ و از سوی دیگر دنباله‌ی همگرای $\{b_n\}$ کراندار است. به این ترتیب از قسمت (ب) لم ۲–۱–۲۰ نتیجه می‌شود $\lim\frac{b_n}{a_n}=\circ$. ■

در تمرین بعد تعمیم قسمت‌های (الف) و (ج) قضیه‌ی فوق به خواننده واگذار شده است.

تمرین ۲–۱–۴۶ ثابت کنید اگر $\lim a_n=\infty$ و $\{b_n\}$ کراندار باشد آنگاه $\lim(a_n\pm b_n)=\infty$ و $\lim\frac{b_n}{a_n}=\circ$.

نتیجه ۲–۱–۴۷ فرض کنیم $\lim a_n=\circ$ و $\lim b_n=b$ که $b>\circ$. در این صورت
الف) اگر $N_\circ\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n>N_\circ$، $a_n>\circ$ آنگاه $\lim\frac{b_n}{a_n}=\infty$.
ب) اگر $N_\circ\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n>N_\circ$، $a_n<\circ$ آنگاه $\lim\frac{b_n}{a_n}=-\infty$.

اثبات. الف) از این که برای هر $n > N_\circ$، $a_n > \circ$ و $\lim a_n = \circ$، بنابر لم ۲–۱–۴۴، $\lim \frac{۱}{a_n} = \infty$. اکنون از قضیه‌ی ۲–۱–۴۵ نتیجه می‌شود $\lim \frac{b_n}{a_n} = \infty$.
ب) در این حالت $-a_n > \circ$. پس بنابر قسمت (الف) و تمرین ۲–۱–۴۳،

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim -\frac{b_n}{-a_n} = -\infty$$

■

تمرین ۲–۱–۴۸ فرض کنید دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به مثبت بی‌نهایت است و برای هر $n \geq N_\circ$، $a_n \leq b_n$. نشان دهید دنباله‌ی $\{b_n\}$ نیز واگرا به مثبت بی‌نهایت است.

۲–۲ سری عددی

سری عددی بیش از ۲۴۰۰ سال پیش، یعنی در زمان فیلسوف یونانی **زنو** به طور شهودی مورد توجه بوده است. در آن زمان مفهوم جمع تعداد باپایانی از اعداد شناخته شده بود ولی درک دقیقی از مفهوم جمع تعداد بی‌پایانی از اعداد حقیقی مانند $a_۱ + a_۲ + \cdots$ وجود نداشت. زنو پارادوکس‌هائی مطرح کرد که بنابر یکی از آنها یک دونده هرگز نمی‌تواند به انتهای مسیر مسابقه برسد. به این مسئله حدود ۲۰۰۰ سال بعد در قرون ۱۷ و ۱۸ میلادی با تعمیم مفهوم جمع دسته‌ی متناهی اعداد به دسته‌ای نامتناهی از اعداد، یعنی با مفهوم سری عددی پاسخ داده شد. در این بخش به بررسی این مفهوم می‌پردازیم.

تعریف ۲–۲–۱ فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی عددی باشد. در این صورت عبارت نمادین $a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots$، یا به طور خلاصه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ را یک **سری عددی** می‌نامیم.

مثال ۲–۲–۲ هر یک از عبارت‌های زیر یک سری عددی هستند.

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$　　ب) $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!}$　　ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۳}$

د) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n}{n!-۱}$　　ه) $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n \cos(n^۲)}{n^۲+۱}$　　و) $\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^n$

تعریف ۲–۲–۳ فرض کنیم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری عددی باشد. در این صورت دنباله‌ی $\{s_n\}$ با ضابطه‌ی $s_n = a_۱ + \cdots + a_n$، $(n \in \mathbb{N})$ را **دنباله‌ی حاصل جمع جزئی** این سری می‌نامیم.

تعریف ۲–۲–۴ (همگرایی سری) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را **همگرا** می‌نامیم هرگاه دنباله‌ی $\{s_n\}$، حاصل جمع جزئی آن همگرا باشد. اگر $\lim s_n = s$، قرار می‌دهیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

در صورتی که دنباله‌ی $\{s_n\}$ همگرا نباشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را **واگرا** می‌نامیم.

مثال ۲–۲–۵ همگرایی یا واگرایی چند سری را بررسی می‌کنیم.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ (**سری هندسی با جمله‌ی آغازین a و قدر نسبت r که** $a, r \in \mathbb{R}$).

ابتدا ضابطه‌ی دنباله‌ی حاصل جمع جزئی این سری را به دست می‌آوریم.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$$

در قسمت (د) مثال ۲–۱–۹ مشاهده کردیم که اگر $0 \leq r < 1$ آنگاه $\lim r^n = 0$. به نحو مشابه، اگر $-1 < r < 0$ آنگاه با فرض $t := -r$، داریم $\lim r^n = \lim (-1)^n t^n = 0$. پس برای هر $r \in \mathbb{R}$ با شرط $|r| < 1$، $\lim r^n = 0$ و

$$\lim s_n = \lim \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

پس برای هر $r \in \mathbb{R}$ با شرط $|r| < 1$، سری هندسی همگرا و مقدار آن برابر $\frac{a}{1-r}$ است.

اگر $r = 1$ آنگاه $s_n = na$ و اگر $r = -1$ آنگاه $s_n = \frac{1-(-1)^n}{2} a$. این دو دنباله برای $a \neq 0$ واگرا هستند. همچنین برای $|r| > 1$ دنباله‌ی $\{r^n\}$ و در نتیجه $\{s_n\}$ واگرا است.

بنابر این سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ همگرا است اگر و تنها اگر $|r| < 1$ و در این حالت

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(1+n)!} \end{aligned}$$

اما $\lim \frac{1}{(n+1)!} = 0$ (چرا؟). در نتیجه $\lim s_n = 1$. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ همگرا به ۱ است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$،

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

در نتیجه $\lim s_n = 1$. پس این سری همگرا به ۱ است.

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (سری همساز).

در قسمت (ج) مثال ۲–۱–۴۲ دیدیم که دنباله‌ی حاصل جمع جزئی این سری، با جمله‌ی عمومی $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$، واگرا به مثبت بی‌نهایت است. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا به مثبت بی‌نهایت است.

اکنون که با مفهوم سری عددی و همگرایی آن آشنا شدیم به بررسی ویژگی‌های یک سری همگرا می‌پردازیم.

قضیه ۲–۲–۶ (شرط لازم همگرایی سری) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim a_n = 0$.

اثبات. فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ی حاصل جمع جزئی سری باشد. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. در نتیجه $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = 0$. ■

نتیجه ۲–۲–۷ اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد یا $\lim a_n \neq 0$، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

مثال ۲–۲–۸ برای $c > 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{c}$ واگرا است. زیرا در قسمت (ج) مثال ۲–۱–۲۵ نشان دادیم که $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$. پس بنابر نتیجه‌ی ۲–۲–۷، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{c}$ واگرا است.

باید توجه داشت که شرط $\lim a_n = 0$ یک شرط لازم برای همگرایی است ولی کافی نیست. برای مثال، سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است اگر چه $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

قضیه ۲–۲–۹ فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$. در این صورت، برای هر دو عدد ثابت $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ همگرا و مقدار آن برابر $\alpha s + \beta t$ است.

اثبات. فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ به ترتیب دنباله‌های حاصل جمع جزیی دو سری فوق باشند. در این صورت $s_n \to s$ و $t_n \to t$. بنابر قضیه‌ی ۲–۱–۲۲ و قسمت (الف) نتیجه‌ی ۲–۱–۲۳ برای دو ثابت $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، دنباله‌ی $\{r_n\} = \{\alpha s_n + \beta t_n\}$، دنباله‌ی حاصل جمع جزیی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ همگرا به $\alpha s + \beta t$ است. ■

مثال ۲–۲–۱۰ نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$ همگرا است.

دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$ سری هندسی با قدر نسبت‌های به ترتیب $r = \frac{1}{2}$ و $r = \frac{3}{4}$ و در نتیجه همگرا هستند. پس، بنابر قضیه‌ی ۲–۲–۹، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$ نیز همگرا است.

باید توجه داشت که در بسیاری از موارد یافتن ضابطه‌ی دنباله‌ی حاصل جمع جزئی یک سری کار ساده‌ای نیست. در حالتی که جملات یک سری نامنفی باشند، با توجه به قضیه‌ی ۲–۱–۲۸ و تعریف همگرایی یک سری می‌توانیم از قضیه‌ی زیر استفاده کنیم.

قضیه ۲–۲–۱۱ فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \geq 0$. در این صورت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر دنباله‌ی حاصل جمع جزئی آن از بالا کراندار باشد.

اثبات. با توجه به فرض، دنباله‌ی حاصل جمع جزئی این سری صعودی است. اگر این دنباله از بالا کراندار باشد آنگاه، بنابر قضیه‌ی ۲–۱–۲۸، همگرا خواهد بود.

طرف دیگر قضیه بنابر قضیه‌ی ۲–۱–۱۱ برقرار است. ■

مثال ۲–۲–۱۲ برای عدد گویای $p>\circ$، سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\frac{\text{۱}}{n^p}$ **سری فوق همساز یا p—سری** نامیده می‌شود. نشان می‌دهیم که p—سری برای $p\geq\text{۲}$ همگرا و برای $\circ<p\leq\text{۱}$ واگرا است.

ابتدا فرض کنیم $p\geq\text{۲}$. با توجه به نامنفی بودن جملات این سری، بنابر قضیه‌ی ۲–۲–۱۱، کافی است نشان دهیم که دنباله‌ی حاصل جمع جزئی این سری از بالا کراندار است. برای $k\geq\text{۲}$ داریم،

$$\frac{\text{۱}}{k^p}\leq\frac{\text{۱}}{k^{\text{۲}}}\leq\frac{\text{۱}}{(k-\text{۱})k}$$

پس برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$\begin{aligned}s_n:=\sum_{k=\text{۱}}^{n}\frac{\text{۱}}{k^p}=\text{۱}+\sum_{k=\text{۲}}^{n}\frac{\text{۱}}{k^p}\quad&\leq\quad\text{۱}+\sum_{k=\text{۲}}^{n}\frac{\text{۱}}{(k-\text{۱})k}=\text{۱}+\sum_{k=\text{۲}}^{n}\left(\frac{\text{۱}}{k-\text{۱}}-\frac{\text{۱}}{k}\right)\\&=\quad\text{۲}-\frac{\text{۱}}{n}<\text{۲}\end{aligned}$$

به این ترتیب برای $p\geq\text{۲}$ سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\frac{\text{۱}}{n^p}$ همگرا است.

حال فرض کنیم $\circ<p\leq\text{۱}$. در این حالت دیده می‌شود که برای هر $k\in\mathbb{N}$، $k^p\leq k$. در نتیجه برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$s_n=\sum_{k=\text{۱}}^{n}\frac{\text{۱}}{k^p}\geq\sum_{k=\text{۱}}^{n}\frac{\text{۱}}{k}:=t_n$$

در قسمت (ج) مثال ۲–۱–۴۲ دیدیم که دنباله‌ی حاصل جمع جزئی سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\frac{\text{۱}}{n}$ واگرا به مثبت بی‌نهایت است. به عبارت دیگر $t_n\to\infty$. پس، بنابر تمرین ۲–۱–۴۸، s_n و در نتیجه سری فوق همساز در این حالت واگرا به مثبت بی‌نهایت است.

در مبحث انتگرال‌های ناسره، با استفاده از آزمون انتگرال نشان می‌دهیم که p—سری برای هر عدد گویای $\text{۱}<p<\text{۲}$ نیز همگرا است.

برای بررسی همگرایی یا واگرایی سری با جملات نامنفی از قضیه‌هایی معروف به **آزمون‌های همگرایی** استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲–۲–۱۳ **(آزمون مقایسه)** فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی حقیقی مثبت باشند و $N_\circ\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n\geq N_\circ$، $a_n\leq b_n$. در این صورت،

الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

اثبات. الف) فرض کنیم

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

ابتدا فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است. به طور معادل، دنباله‌ی $\{t_n\}$ دنباله‌ای همگرا و در نتیجه کراندار است. بنا بر فرض، برای هر $n \geq N_0$،

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_{N_0 - 1} + a_{N_0} + \cdots + a_n \\ &\leq a_1 + \cdots + a_{N_0 - 1} + b_{N_0} + \cdots + b_n \\ &= s_{N_0 - 1} + (t_n - t_{N_0 - 1}) = (s_{N_0 - 1} - t_{N_0 - 1}) + t_n \end{aligned}$$

با توجه به کراندار بودن دنباله‌ی $\{t_n\}$ و ثابت بودن عدد $s_{N_0 - 1} - t_{N_0 - 1}$، دنباله‌ی $\{s_n\}$ نیز از بالا کراندار است. بنابر قضیه‌ی ۲−۲−۱۱ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

قسمت (ب) از (الف) نتیجه می‌شود. ■

مثال ۲−۲−۱۴ همگرایی هر سری را با استفاده از آزمون مقایسه بررسی می‌کنیم.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5n^2 + 1}$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$0 < \frac{n}{n^3 + 5n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

با توجه به همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5n^2 + 1}$ همگرا است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sqrt{n} \leq n$. پس

$$0 < \frac{1}{2n} = \frac{1}{n + n} \leq \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

اکنون با توجه به واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ نیز واگرا است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^3})$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $0 < \sin(\frac{1}{n^3}) \leq \frac{1}{n^3}$. درنتیجه، با توجه به همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^3})$ نیز همگرا است.

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+a^2}$ (a عددی ثابت است).

عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $N_0 \geq |a|$. به این ترتیب برای هر $n \geq N_0$، $a^2 \leq n^2$ و در نتیجه

$$0 < \frac{1}{n} = \frac{2n}{n^2+n^2} \leq \frac{2n}{n^2+a^2}$$

اکنون با توجه به واگرایی سری همساز، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+a^2}$ نیز واگرا است.

قضیه ۲-۲-۱۵ **(آزمون مقایسه‌ی حدی)** فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی مثبت باشند و $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$. در این صورت،

الف) در حالت $\ell > 0$، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد.

ب) اگر $\ell = 0$ آنگاه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد.

ج) اگر $\frac{a_n}{b_n}$ به مثبت بی‌نهایت واگرا شود آنگاه از واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود.

اثبات. الف) بنابر لم ۲-۱-۱۴ عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N_0$،

$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3\ell}{2}$$

پس برای هر $n \geq N_0$،

$$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3\ell}{2} b_n$$

بنابر آزمون مقایسه، از نامساوی $a_n \leq \frac{3\ell}{2} b_n$ و همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود.

به همین ترتیب از نامساوی $\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n$ و همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نتیجه می‌شود.

ب) اگر $\ell = 0$ آنگاه برای $\varepsilon = 1$ عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N_0$، $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1$. پس برای هر $n \geq N_0$، $0 < a_n < b_n$ و درنتیجه طبق آزمون مقایسه، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد.

ج) اگر $\frac{a_n}{b_n}$ به مثبت بی‌نهایت واگرا شود آنگاه برای $M = 1$ عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq N_0$، $\frac{a_n}{b_n} > M = 1$. پس برای هر $n \geq N_0$، $a_n > b_n$ و درنتیجه طبق آزمون مقایسه، واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد. ■

مثال ۲-۲-۱۶ همگرایی هر سری را با استفاده از آزمون مقایسه‌ی حدی بررسی می‌کنیم.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{3^n + n}$.

برای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم، $a_n = \frac{2^n - n}{3^n + n}$ و $b_n = (\frac{2}{3})^n$. بدیهی است دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ نامنفی هستند. همچنین،

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{2^n - n}{3^n + n}}{(\frac{2}{3})^n} = \lim \frac{1 - \frac{n}{2^n}}{1 + \frac{n}{3^n}}$$

بنابر قسمت (ب) مثال ۲-۱-۱۸، $\lim \frac{n}{3^n} = \lim \frac{n}{2^n} = 0$. در نتیجه $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. با توجه به همگرایی سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{3^n + 7}$ نیز همگرا است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با جمله‌های عمومی $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ و $b_n = \frac{1}{n}$ دنباله‌های مثبت هستند. همچنین

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

پس با توجه به واگرایی سری همساز، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ نیز واگرا است.

قضیه ۲-۲-۱۷ **(آزمون نسبت)** فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی حقیقی مثبت باشد و $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$. در این صورت،

الف) اگر $\ell < 1$ آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) اگر $\ell > 1$ یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اثبات. الف) فرض کنیم r عددی حقیقی باشد به قسمی که $\ell < r < 1$. در این صورت برای $\varepsilon = r - \ell > 0$، با توجه به فرض $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$، عدد $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\forall n \geq N_0, \qquad -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell < \varepsilon$$

به این ترتیب برای هر $n \geq N_0$، $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon = r$، یعنی $a_{n+1} < a_n r$. پس $a_{N_0+1} < a_{N_0} r$، $a_{N_0+2} < a_{N_0+1} r < a_{N_0} r^2$ و به استقرا برای هر $n > N_0$، $a_n < a_{n-1} r < \cdots < a_{N_0} r^{n-N_0} = \frac{a_{N_0}}{r^{N_0}} r^n$. اکنون با توجه به همگرایی سری هندسی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{N_0}}{r^{N_0}} r^n$ و با استفاده از آزمون مقایسه، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) اثبات این قسمت مشابه قسمت قبل است. ■

باید توجه داشت که تحت شرایط قضیه‌ی ۲–۲–۱۷، اگر $\ell = 1$ آنگاه در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ چیزی نمی‌توان گفت. به طور مثال، برای هر دو سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مقدار $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ برابر ۱ است. حال آنکه سری اول واگرا و سری دوم همگرا است.

مثال ۲–۲–۱۸ همگرایی هر سری را با استفاده از آزمون نسبت بررسی می‌کنیم.

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a > 0$ عددی ثابت است).

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

در نتیجه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ همگرا است.

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1$$

در نتیجه این سری واگرا است.

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n)!}{(n!)^۳}$.

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{\frac{\big(۲(n+۱)\big)!}{\big((n+۱)!\big)^۳}}{\frac{(۲n)!}{(n!)^۳}} = \lim \frac{\big(۲(n+۱)\big)!}{(۲n)!}\Big(\frac{n!}{(n+۱)!}\Big)^۳$$

$$= \lim \frac{(۲n+۱)(۲n+۲)}{(n+۱)^۳} = ۰ < ۱$$

بنابر این $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n)!}{(n!)^۳}$ همگرا است.

قضیه ۲–۲–۱۹ (آزمون ریشه) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت باشد به قسمی که $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$. در این صورت،

الف) اگر $\ell < ۱$ آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) اگر $\ell > ۱$ یا $\sqrt[n]{a_n} \to \infty$ آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا است.

اثبات قضیه‌ی ۲–۲–۱۹ مانند اثبات آزمون نسبت است.

باید توجه داشت که مانند آزمون نسبت، اگر $\ell = ۱$ آنگاه از آزمون ریشه نتیجه‌ای به دست نمی آید.

مثال ۲–۲–۲۰ همگرایی هر سری را با استفاده از آزمون ریشه بررسی می‌کنیم.

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۵^n}{n^n}$.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{۵}{n} = ۰ < ۱$$

بنابر این $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۵^n}{n^n}$ همگرا است.

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۲n}{n+۴}\right)^n$.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{۲n}{n+۴} = ۲ > ۱$$

در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۲n}{n+۴}\right)^n$ واگرا است.

از آزمون‌های همگرایی می‌توان برای بررسی همگرایی یا واگرایی یک سری با جملات دلخواه نیز استفاده کرد. برای این کار ابتدا مفهوم همگرایی مطلق یک سری را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۲-۲-۲۱ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را **همگرای مطلق** می‌نامیم هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که هر سری همگرای مطلق، همگرا است.

قضیه ۲-۲-۲۲ اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد آنگاه همگرا است.

اثبات. از $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

بنابر آزمون مقایسه و همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ همگرا است. در نتیجه، با استفاده از قضیه‌ی ۲-۲-۹ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است. ■

مثال ۲-۲-۲۳ همگرایی مطلق هر سری را بررسی می‌کنیم.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a \in \mathbb{R}$ عددی ثابت است).

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1$$

پس سری همگرای مطلق است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ($2 \leq p$ عددی ثابت و گویا است).

بنابر مثال ۲-۲-۱۲، چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا است، سری مورد نظر همگرای مطلق خواهد بود.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^2 + n}$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$0 \leq \left|\frac{\sin n + \cos n}{n^2 + n}\right| \leq \frac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2} \leq 2\frac{1}{n^2}$$

در نتیجه، بنابر آزمون مقایسه و مثال ۲–۲–۱۲، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^2 + n}$ همگرای مطلق است.

تمرین ۲–۲–۲۴ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرای مطلق باشد.

الف) اگر $\{s_n\}$ دنباله‌ی حاصل جمع جزئی این سری باشد نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq s_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

ب) نتیجه بگیرید $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

در اینجا به بررسی نوعی از سری می‌پردازیم که به سری متناوب معروف است.

تعریف ۲–۲–۲۵ فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشد. در این صورت سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ را یک **سری متناوب** می‌نامیم.

مثال ۲–۲–۲۶ دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ متناوب هستند.

قضیه ۲–۲–۲۷ **(آزمون لایب‌نیتس)** اگر $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی حقیقی مثبت، نزولی و همگرا به صفر باشد آنگاه سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگرا است.

اثبات. با توجه به نزولی بودن دنباله‌ی $\{a_n\}$، برای هر $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $a_{k+1} \leq a_k$. در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ و از آنجا برای حاصل جمع جزئی $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ داریم

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (-a_{2n+1} + a_{2n+2}) \leq s_{2n}$$

پس زیر دنباله‌ی زوج آن، یعنی $\{s_{2n}\}$ نزولی است. به همین ترتیب

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq s_{2n-1}$$

در نتیجه زیر دنباله‌ی فرد یعنی $\{s_{2n+1}\}$ صعودی است. از سوی دیگر، با توجه به مثبت بودن جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$، داریم $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1}$. پس

$$s_2 \geq s_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$$

به این ترتیب، زیردنباله‌های $\{s_{۲n}\}$ و $\{s_{۲n+۱}\}$ کراندار و از آنجا بنابر قضیه‌ی همگرائی یکنوا همگرا هستند. چون

$$\lim(s_{۲n} - s_{۲n+۱}) = \lim a_{۲n} = ۰$$

پس $\lim s_{۲n} = \lim s_{۲n+۱}$. در نتیجه بنابر قضیه‌ی ۲-۱-۳۴ دنباله‌ی جمع جزئی $\{s_n\}$ همگرا است. یعنی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n a_n$ همگرا است. ■

مثال ۲-۲-۲۸ دو سری متناوب $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n \frac{۱}{n}$ و $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{۱}{(۲n)!}$ همگرا هستند. زیرا دنباله‌های $\{\frac{۱}{n}\}$ و $\{\frac{۱}{(۲n)!}\}$ هر دو مثبت، نزولی و همگرا به صفرند.

تعریف ۲-۲-۲۹ سری همگرای $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ را **همگرای مشروط** می‌نامیم هرگاه همگرای مطلق نباشد، یعنی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد.

مثال ۲-۲-۳۰ سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n \frac{۱}{n}$ همگرای مشروط است. زیرا بنابر مثال ۲-۲-۲۸ همگرا است ولی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \left|(-۱)^n \frac{۱}{n}\right|$ واگرا است.

تعریف ۲-۲-۳۱ برای دو سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} b_n$ و برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ قرار می‌دهیم

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k} = a_۰ b_n + a_۱ b_{n-۱} + \cdots + a_{n-۱} b_۱ + a_n b_۰$$

در این صورت سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} c_n$ را **حاصل ضرب کوشی دو سری** می‌نامیم.

باید توجه کرد که در حالت کلی از همگرایی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرایی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} c_n$ نتیجه نمی‌شود. در قضیه‌ی بعد ثابت می‌کنیم که اگر هر دو سری همگرای مطلق باشند آنگاه حاصل ضرب کوشی دو سری نیز همگرا است.

قضیه ۲-۲-۳۲ فرض کنیم دو سری عددی $\sum\limits_{k=۰}^{\infty} a_k$ و $\sum\limits_{k=۰}^{\infty} b_k$ همگرای مطلق باشند. در این صورت سری حاصل‌ضرب کوشی دو سری همگرا و مقدار آن برابر $(\sum\limits_{k=۰}^{\infty} a_k)(\sum\limits_{k=۰}^{\infty} b_k)$ است.

اثبات. برای هر $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} c_k &:= a_0 b_k + \cdots + a_k b_0 \\ d_k &:= |a_0|\,|b_k| + \cdots + |a_k|\,|b_0| \end{aligned}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم سری $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ همگرا است. برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{k=0}^{n} d_k &= |a_0|\,|b_0| + \big(|a_0|\,|b_1| + |a_1|\,|b_0|\big) + \cdots + \big(|a_0|\,|b_n| + \cdots + |a_n|\,|b_0|\big) \\ &\leq \big(|a_0| + \cdots + |a_n|\big)\big(|b_0| + \cdots + |b_n|\big) \\ &\leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\Big) \end{aligned}$$

به این ترتیب، دنباله‌ی صعودی $\{s_n\}$ از بالا کراندار و در نتیجه همگرا است. با توجه به این‌که

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad |c_k| \leq d_k$$

بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ و از آنجا سری $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ همگرا است.

اکنون نشان می‌دهیم $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$. برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) + (a_2 b_n + a_3 b_{n-1} + \cdots + a_n b_2) + \cdots + a_n b_n$$

در نتیجه

$$\Big|\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big) - \sum_{k=0}^{n} c_k\Big| = \Big|(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) + (a_2 b_n + a_3 b_{n-1} + \cdots + a_n b_2) + \cdots + a_n b_n\Big| \leq \big(|a_1|\,|b_n| + |a_2|\,|b_{n-1}| + \cdots + |a_n|\,|b_1|\big) + \big(|a_2|\,|b_n| + |a_3|\,|b_{n-1}| + \cdots + |a_n|\,|b_2|\big) + \cdots + |a_n|\,|b_n| \leq d_{n+1} + d_{n+2} + \cdots + d_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} d_k - \sum_{k=0}^{n} d_k = s_{2n} - s_n$$

با توجه به همگرایی $\{s_n\}$، زیردنباله‌ی $\{s_{2n}\}$ نیز همگرا است و $\lim s_n = \lim s_{2n}$. پس

$$\lim \Big|\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big) - \sum_{k=0}^{n} c_k\Big| = \lim(s_{2n} - s_n) = 0$$

به این ترتیب،

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim \sum_{k=0}^{n} c_k = \lim \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big)$$

■

۲–۳ تابع نمایی

در این بخش با استفاده از مفهوم سری، به تعریف یکی از مهم‌ترین توابع غیرجبری یعنی تابع نمایی می‌پردازیم.

در مثال ۲–۲–۲۳ دیدیم که برای هر $a \in \mathbb{R}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ همگرا است. با توجه به این که مقدار این سری به a بستگی دارد، تابعی از a است.

تعریف ۲–۳–۱ تابع $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

را **تابع نمایی** می‌نامیم (برای سادگی قرار می‌دهیم $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$).

تابع نمایی یکی از توابع بسیار مهم در ریاضیات و علوم مهندسی است. در این بخش برخی از خواص جبری این تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از ویژگی‌های مهم تابع نمایی در قضیه‌ی بعد بیان شده است.

قضیه ۲–۳–۲ برای هر دو عدد حقیقی $a, b \in \mathbb{R}$،

$$\exp(a+b) = \exp(a)\ \exp(b)$$

اثبات. برای دو عدد $a, b \in \mathbb{R}$ و برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ قرار می‌دهیم $x_n := \frac{a^n}{n!}$ و $y_n := \frac{b^n}{n!}$. در این صورت $\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ و $\exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$. اگر برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ قرار دهیم $c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_k y_{n-k} + \cdots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0$ آنگاه

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{b^n}{n!} + a\frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{a^k}{k!}\,\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}b + \frac{a^n}{n!} \\
&= \frac{1}{n!}\big(b^n + nab^{n-1} + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k} + \ldots + a^n\big) \\
&= \frac{1}{n!}(a+b)^n
\end{aligned}$$

و از آنجا،

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b)$$

اکنون با توجه به این که سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ همگرای مطلق است و بنابر قضیه‌ی ۲–۲–۳۲،

$$\exp(a+b) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)\ (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) = \exp(a)\ \exp(b)$$

■

به کمک قضیه‌ی ۲–۳–۲ می‌توانیم برخی دیگر از ویژگی‌های تابع نمایی را به دست آوریم.

لم ۲–۳–۳ تابع $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دارای ویژگی‌های زیر است.

الف) $\exp(0) = 1$ و برای هر عدد حقیقی x، $\exp(x)\exp(-x) = 1$.

ب) برای هر $x > 0$، $\exp(x) > 1$ و برای هر $x < 0$، $0 < \exp(x) < 1$.

ج) تابع $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

اثبات. الف) با توجه به تعریف تابع نمائی، $\exp(0) = 1$. برای $x \in \mathbb{R}$، بنابر قضیه‌ی ۲–۳–۲

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp\big(x + (-x)\big) = \exp(0) = 1$$

ب) برای $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $x \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. در این صورت $s_n(x) \to \exp(x)$. اکنون برای $x > 0$،

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$$

و در نتیجه برای $x > 0$،

$$\exp(x) = \lim s_n(x) \geq 1 + x > 1$$

حال فرض کنیم $x < 0$. در این صورت $-x > 0$ و از آنجا $\exp(-x) > 1$. پس از تساوی $\exp(x)\exp(-x) = 1$ نتیجه می‌شود $0 < \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1$.

ج) برای $a, b \in \mathbb{R}$ فرض کنیم $a < b$. در این صورت $a - b < 0$ و بنابر قسمت قبل

$$1 > \exp(a-b) = \exp(a)\exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

در نتیجه $\exp(a) < \exp(b)$. ■

لم ۲–۳–۴ برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $r \in \mathbb{Q}$، $\exp(rx) = \big(\exp(x)\big)^r$.

اثبات. بنابر قضیه ۲−۳−۲، برای $x \in \mathbb{R}$،

$$\exp(2x) = \exp(x+x) = \exp(x)\exp(x) = \big(\exp(x)\big)^{2}.$$

با استقرا دیده می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^{n}$. به این ترتیب برای $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$،

$$\exp(x) = \exp(n\frac{1}{n}x) = \big(\exp(\frac{1}{n}x)\big)^{n}$$

و از آنجا $\exp(\frac{1}{n}x) = \big(\exp(x)\big)^{\frac{1}{n}}$. اکنون برای $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ و با فرض $m, n > 0$،

$$\exp(rx) = \exp(\frac{m}{n}x) = \big(\exp(\frac{1}{n}x)\big)^{m} = \Big(\big(\exp(x)\big)^{\frac{1}{n}}\Big)^{m} = \big(\exp(x)\big)^{\frac{m}{n}} = (\exp(x))^{r}$$

به عبارت دیگر برای $r \in \mathbb{Q}$، اگر $r > 0$ آنگاه $\exp(rx) = \big(\exp(x)\big)^{r}$. اگر $r < 0$ آنگاه با در نظر گرفتن $t := -r > 0$، داریم

$$\exp(rx) = \exp(-tx) = \frac{1}{\exp(tx)} = \frac{1}{\big(\exp(x)\big)^{t}} = \big(\exp(x)\big)^{-t} = \big(\exp(x)\big)^{r}$$

■

اویلر در سال ۱۷۴۸ ثابت کرد که عدد $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ عددی گنگ است. این عدد در بیشتر مراجع **عدد نپر** نام دارد و با e نمایش داده می‌شود. مقدار این عدد به طور تقریبی برابر ۲٫۷۱۸۲ است. بنابر لم ۲−۳−۴، برای هر $r \in \mathbb{Q}$،

$$\exp(r) = \big(\exp(1)\big)^{r} = e^{r}$$

از آنجا که تابع $\exp$ برای هر عدد حقیقی تعریف شده است، با الهام از رابطه‌ی فوق، می‌توانیم e^x را برای هر عدد حقیقی x، به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{x} := \exp(x)$$

تعریف فوق دلیل نامگذاری تابع نمایی را توجیه می‌کند. به علاوه، با استفاده از این تعریف ویژگی‌های اصلی تابع نمایی بهتر درک می‌شوند. این ویژگی‌ها با استفاده از نمایش جدید آن، به صورت زیر بیان می‌شوند.

الف) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $e^{(a+b)} = e^{a}e^{b}$ و $e^{(a-b)} = \frac{e^{a}}{e^{b}}$.

ب) برای هر $x \geq 0$، $e^{x} \geq 1$ و برای هر $x < 0$، $0 < e^{x} < 1$.

ج) برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $r \in \mathbb{Q}$، $\big(e^{x}\big)^{r} = e^{rx}$.

در فصل‌های بعد با خاصیت‌های این تابع بیشتر آشنا می‌شویم.

تمرین‌های فصل دوم

۱) سه جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ ب) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

۲) کدامیک از دنباله‌های زیر کراندار هستند؟ چرا؟

الف) $a_n = \frac{1}{n^2}$ ب) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

ج) $a_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$ د) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

۳) با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\lim \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3} = 2$ ب) $\lim \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim \frac{1}{n} \cos(\frac{n^2}{n+1}) = 0$ د) $\lim \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}\right) = 0$

ه) $\lim \frac{1(\sin 1) + \cdots + n(\sin n)}{n^3} = 0$

۴) با استفاده از قضیه‌ی همگرایی دنباله‌ی یکنوا، همگرایی هر یک از دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $a_1 = 1\ ,\ \ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ ب) $a_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

۵) با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n)^n}$ ب) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}]}{n^2 + n}$

۶) همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\}$ ب) $\{\frac{1 + (-1)^n}{3}\}$

ج) $\{\frac{1}{n} - \sin(\frac{n\pi}{2})\}$ د) $\{(1 + \frac{1}{2n}) \cos(\frac{n\pi}{3})\}$

۷) حد هر یک از دنباله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $a_n = \frac{4n^2 - \sqrt{n}}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ ب) $a_n = \frac{1 + 4 + \cdots + n^2}{2n^3 + n^2 + 1}$

ج) $a_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$ د) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^4 + n} - n}$

ه) $a_n = \sqrt[3]{1 - n^3} + n$ و) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n)}{n+1}$

ز) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ح) $a_n = \frac{4^n}{n!}$

۸) فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی مثبت هستند. مطلوب است $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$.

۹) فرض کنید $a > ۱$. مطلوب است $\lim \left(\frac{a^n + ۲}{a^{n+۱} + ۳}\right)$.

۱۰) کدامیک از گزاره‌های زیر در حالت کلی درست و کدامیک نادرست است؟ گزاره‌های درست را ثابت کنید و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض ارائه دهید.
الف) اگر زیردنباله‌های $\{a_{۲n}\}$ و $\{a_{۲n+۱}\}$ همگرا باشند آنگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا است.
ب) اگر دنباله‌ی $\{|a_n|\}$ همگرا باشد آنگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا است.
ج) اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد آنگاه $\{|a_n|\}$ نیز همگرا است.
د) اگر $\{|a_n|\}$ همگرا باشد آنگاه $\{a_n\}$ کراندار است.
ه) اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد آنگاه $\{|a_n|\}$ نیز واگرا است.
و) اگر $\lim a_n = ۰$ آنگاه برای هر دنباله‌ی $\{b_n\}$، داریم $\lim a_n b_n = ۰$.
ز) هرگاه دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد آنگاه دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ نیز همگرا هستند.
ح) اگر $\{a_n + b_n\}$ واگرا و $\{a_n\}$ همگرا باشد آنگاه $\{b_n\}$ واگرا است.
ط) اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ < a_n < b_n$ آنگاه $\{b_n\}$ نیز همگرا است.
ی) اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ < a_n < b_n$ آنگاه $\{b_n\}$ نیز واگرا است.
ک) اگر $\{a_n\}$ واگرا به مثبت بی‌نهایت و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ < a_n < b_n$ آنگاه $\{b_n\}$ نیز واگرا به مثبت بی‌نهایت است.
ل) اگر $\{a_n\}$ همگرا و $\{b_n\}$ کراندار باشد آنگاه $\{a_n b_n\}$ نیز کراندار است.
م) اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n < b_n$ آنگاه $a \le b$.

۱۱) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا به عدد a است. اگر $c, d \in \mathbb{R}$ و عدد $N_۰ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند که برای هر $n \ge N_۰$، $a_n \in [c, d]$، ثابت کنید $a \in [c, d]$.

۱۲) هرگاه $|a| < ۱$ نشان دهید که هر دو دنباله‌ی $\{a^n\}$ و $\{na^n\}$ همگرا به صفر هستند.

۱۳) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ + (-۱)^n}{۲}$ مفروض است.
الف) دنباله‌ی حاصل جمع جزئی سری را به دست آورید.
ب) آیا سری همگرا است؟ چرا؟

۱۴) نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{n+۱}{n})^n$ واگرا است.

۱۵) همگرایی یا واگرایی هر سری را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2+1)}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos(\frac{1}{n})\right)$

و) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$

ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right)^n$ (ثابت $a>1$)

ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-e^n}$

ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{b^n+c^n}$ (اعداد ثابت $a,b,c>0$)

ی) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

ل) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

م) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

س) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

ع) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n+\frac{1}{n})}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

ف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

ص) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})$

ق) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)}$

ر) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}$

ش) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+5}$

ث) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

خ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)^n}$

۱۶) تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^n(n+1)}$ به ازای چه مقادیری از $x\in\mathbb{R}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط یا واگرا است.

۱۷) تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ به ازای چه مقادیری از $x\in\mathbb{R}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط یا واگرا است.

۱۸) تعیین کنید که سری $\sum_{n=0}^{\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ به ازای چه مقادیری از $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط یا واگرا است.

۱۹) همگرایی یا واگرایی هر سری را بررسی کنید. در صورت همگرایی، تعیین کنید که آیا همگرایی مطلق است یا مشروط.

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{n}$

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱}{\sqrt[n]{n}}$

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^{(۱+\frac{۱}{n})}}$

د) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin n}{۲n^۲-n}$

ه) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n\cos n}{۲n^۳+n-۵}$

و) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{e^n}$

ز) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱+\frac{۱}{n}}$

ح) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱+a^n}$ ($a>۰$ ثابت)

تمرین‌های گوناگون.

۱) فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند که به ترتیب به a و b همگرا هستند. به‌علاوه عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $n\geq N$، $a_n\leq b_n$. ثابت کنید $a\leq b$.

۲) الف) نشان دهید هرگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و $\lim a_n=a$ $(a\in\mathbb{R})$ باشد آنگاه به ازای هر عدد طبیعی n، $a_n\leq a$ است.
ب) نشان دهید دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_{n+۱}=\sqrt{۱+۲a_n}$ و $a_۱=۱$ همگرا است و حد آن را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید دنباله‌ی تعریف شده در زیر همگرا است.

$$a_n=\frac{۱}{۳+۱}+\frac{۱}{۳^۲+۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۳^n+n^n}$$

۴) فرض کنید $\lim a_n=a>۱$. به ازای $b_n=(\frac{۱}{a_n})^n$، نشان دهید $\lim b_n=۰$.

۵) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت است به قسمی که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا باشد. ثابت کنید سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n^۲}{۱+a_n}$ نیز همگرا است.

۶) همگرایی یا واگرایی هر سری را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt{n}}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^{2}}{9^{n+2}}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$

و) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

ز) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{3^{n+1}}$

ح) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^{\frac{4}{3}}}{2+n^{\frac{5}{3}}}$

) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^{1+\frac{1}{n}}}$

ی) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+(1+\frac{1}{n})^{n}}$

ک) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^{2}}$

ل) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(1+\sin n)}{n^{2}}$