

(۱) از مجموعه های زیر کدامیک زیرفضای ماتریس ها هستند؟ پاسخ خود را با ذکر دلیل بیان کنید.

- (i)  $\{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^n a_{vi} = 0\}$
- (ii)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n)A = 0\}$
- (iii)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
- (iv)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid 3A^T + A - 5I = 0\}$
- (v)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 4 \det(A)\}; \quad (\text{tr}[a_{ij}] := \sum_{i=1}^n a_{ii})$
- (vi)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$
- (vii)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$
- (viii)  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = 0\}$
- (ix)  $\{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}; \quad (A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ is fixed.})$
- (x)  $\{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$
- (xi)  $\{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid J A + A^T J = 0\}$
- (xii)  $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3\}$ .

(۲) از مجموعه های زیر کدامیک زیرفضای توابع حقیقی هستند؟ چرا؟

- (i)  $\{y = f(x) \mid f(1) = 0\}$
- (ii)  $\{y = f(x) \mid f''(x) + x f(x) = 0\}$
- (iii)  $\{y = f(x) \mid f'(x) = 1 + 2 f(x)\}$
- (iv)  $\{y = f(x) \mid f(x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$
- (v)  $\{y = f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 0\}$
- (vi)  $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x) = -p(x)\}$
- (vii)  $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x) = 2p(x)\}$
- (viii)  $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(0) = 0\}$ .

(۳) ماتریس  $R$  تحویل شده سطری پلکانی نظیر  $A$  را بدست آورید هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(۴) فرم ماتریس های  $n \times n$  مانند  $A$  را مشخص کنید به طوری که  $e_{12}A = Ae_{12}$  که در آن  $e_{12}$  ماتریسی است که تمام درایه های آن صفرند بجز درایه  $(1, 2)$  آن که برابر با یک است.

(۵) وارون ماتریس های زیر را در صورت وجود بیابید:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -6 \\ 4 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (۶) نشان دهید که اگر  $U^2 = I$  و  $I + U$  وارون پذیر باشد، آنگاه  $U = I$ .
- (۷) ماتریس مربعی  $E$  را خودتوان گوئیم، هرگاه  $E^2 = E$ . نشان دهید که (الف) تنها ماتریس خودتوان وارون پذیر، ماتریس همانی است. (ب) اگر ماتریس  $A$  خودتوان باشد، آنگاه ماتریس  $I - 2A$  وارون پذیر است.