

(۱) دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(۲) پایه‌های $B = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ و $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ (پایه استاندارد) از \mathbb{R}^3 را در نظر بگیرید. ماتریس تبدیل پایه $A \rightarrow B$ را بیابید.

(۳) فرض کنید V یک فضای برداری با تولید متناهی روی میدان F باشد. اگر $X_r = \{v_1, \dots, v_r\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی در V باشد، آن‌گاه بردارهای $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ وجود دارند که $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V است.

(۴) فرض کنید W یک زیرفضا از فضای برداری V باشد. نشان دهید $\frac{V}{W} = \{v + W | v \in V\}$ یک افزاز V است.

(۵) اثر ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ را به صورت $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ تعریف می‌کنیم.
 (الف) مطلوبست تعیین همه‌ی ماتریس‌های $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ که $tr(AA^T) = 0$.
 (ب) نشان دهید که اگر $tr((A + A^T)^2) = 0$ ، آن‌گاه $A^T = -A$.
 پیشنهاد: سعی کنید از (الف) استفاده کنید.

(۶)