به نام خدا

امتحان میان‌ترم مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

(دوم آذر ۱۳۹۲)

۱. دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 3 \end{cases}$$

۲. نشان دهید

(الف) ماتریس U وارون خودش است اگر و تنها اگر ماتریس خودتوان P وجود داشته باشد که $U = I - 2P$.

(ب) به ازای هر ماتریس خودتوان P و هر $a \neq 1$، ماتریس $I - aP$ وارون‌پذیر است و

$$(I - aP)^{-1} = I - \frac{a}{a-1}P.$$

۳. نشان دهید $\{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است و مختصات بردار $X = (a,b,c)$ را نسبت به این پایه بیابید.

۴. فرض کنید V یک فضای برداری با تولید متناهی و k مولد روی میدان F باشد. اگر $X_r = \{v_1, \ldots, v_r\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی در V باشد، آن‌گاه بردارهای $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ وجود دارند که $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای V است.

۵. یک دستگاه معادله‌ی خطی همگن بیابید که فضای جواب آن توسط بردارهای زیر تولید شود

$$X_1 = (1,4,0,9),\ X_2 = (3,4,-2,5),\ X_3 = (-1,0,1,2) \in \mathbb{R}^4.$$

موفق باشید

وقت: ۹۰ دقیقه

هر سوال ۱۴ نمره دارد

ارزش امتحان: ۷۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)

به نام خدا

امتحان پایان ترم جبر خطی کاربردی

(۱۸ دی ماه ۱۳۸۹)

۱. فرض کنید تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده باشد

$$T(x,y,z) = (۳x+۲y-۲z, x+۲y-z, x+y).$$

(آ) ماتریس T را نسبت به پایه‌ی $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ بیابید، که در آن $v_۱ = (۱,۱,۰)$، $v_۲ = (۱,۰,۱)$، و $v_۳ = (۰,۱,۱)$.

(ب) نشان دهید T وارون‌پذیر است و وارون آن‌را بیابید.

۲. A^n را محاسبه کنید، هرگاه $A = \begin{bmatrix} -۷ & ۱۰ \\ -۵ & ۸ \end{bmatrix}$.

۳. ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-۱}AP$ مثلثی باشد، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} -۵ & ۳ & ۱ \\ -۴ & ۲ & ۱ \\ -۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-۱}AP$ به صورت ژردان باشد.

۵. فرض کنید $S \in \operatorname{Hom}(V,W)$ و $T \in \operatorname{Hom}(W,U)$، که در آن V، W و U فضاهای برداری متناهیا تولید شده روی میدان F هستند و $\dim V = n$ و $\dim W = m$. ثابت کنید:

$$\max\{۰, \operatorname{rank}(T)+\operatorname{rank}(S)-m\} \leq \operatorname{rank}(TS) \leq \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(S)\}$$

۶. یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای تولید شده توسط مجموعه‌ی بردارهای زیر در $\mathbb{R}^۴$ بیابید.

$$\{(۱,۱,۰,۱), (۱,۰,۲,۱), (۱,۲,-۲,۱), (۱,۱,-۳,۱)\}$$

۷. فرض کنید $T \in \operatorname{Hom}(F^n, F^n)$ و $\operatorname{rank}(T) = r$. ثابت کنید تبدیل خطی پوشای $S \in \operatorname{Hom}(F^n, F^r)$ و تبدیل خطی یک به یک $R \in \operatorname{Hom}(F^r, F^n)$ وجود دارد که $T = RS$.

موفق باشید

وقت: ۱۲۰ دقیقه

ارزش امتحان: ۱۴۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)

به نام خدا

امتحان میان ترم جبر خطی کاربردی

(۲۲ آبان ماه ۱۳۸۹)

۱. دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

(۱۵ نمره)

۲. فرض کنید

$$U = \mathrm{spann}\{(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)\}$$

$$W = \mathrm{spann}\{(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)\}$$

زیرفضاهای $\mathbb{R}^5$ باشند. پایه‌هایی برای U، W، $U+W$، و $U\cap W$ بیابید.

(۲۰ نمره)

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q را طوری بیابید که PAQ ماتریس تحویل یافته‌ی سطری پلکانی و ستونی پلکانی باشد.

(۲۰ نمره)

۴. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $A^k = 0$. نشان دهید

(ب) به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، که در آن $a \neq 0$، ماتریس $aI + bA$ وارون‌پذیر است.

(پ) ماتریس $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{k-1} A^{k-1}$، به ازای هر $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$، که در آن $a_0 \neq 0$، وارون‌پذیر است.

(۱۵ نمره)

موفق باشید

وقت: ۹۰ دقیقه

ارزش امتحان: ۷۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)

نمونه سوال میان ترم

۱. پایه‌ای برای فضای تولید شده توسط بردارهای زیردر $\mathbf{R}^4$ بیابید

$$\{1,-1,1,1\},\ \{1,-3,1,1\},\{2,3,-1,2\},\{-4,-13,5,-4\}$$

---

۲. دو پایه‌ی زیر از $\mathbf{R}^4$ را در نظر بگیرید

$B_1=\{(1,1,0),\ (-1,1,0),\ (0,1,2)\}$, $B_2=\{(2,1,0),\ (0,1,0),\ (-1,1,1)\}$

ماتریس تبدیل پایه‌ی P از پایه‌ی B_1 به پایه‌ی B_2 را بیابید. به علاوه ماتریس P^{-1} از B_2 به B_1 را بیابید.

---

۳. به ازای چه مقدار a دستگاه زیر دارای جواب است

$$\begin{cases} -3x+y+5z=4a \\ x+y+z=4 \\ -2x+z=-3 \\ x+y-2z=5 \end{cases}$$

---

۴. اگر $V=\mathrm{Span}\{v_1,\ldots,v_n\}$ و w_1، ...، w_m بردارهایی در V باشند که m>n نشان دهید w_1، ...، w_m وابسته‌ی خطی هستند.

نمونه سوال میان ترم

۱- وارون ماتریس زیر را (در صورت وجود) بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

۲- دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+4y+6x=2 \\ x+2y+3z=1 \\ x \qquad +z=3 \\ 2x+4y \quad =8 \end{cases}$$

۳- پایه‌ای برای فضای تولید شده توسط بردارهای زیردر $\mathbf{R}^4$ بیابید

$$\{1,-1,1,1\},\ \{1,-3,1,1\},\{2,3,-1,2\},\{-4,-13,5,-4\}$$

۴-فرض کنید A یک ماتریس n×n باشد به طوری‌که $A^k = 0$ و $A^{k-1} \neq 0$ ، که در آن k عدد صحیح مثبت است. نشان دهید به ازای هر اسکالر $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ که $a_0 \neq 0$ ماتریس $a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{k-1} A^{k-1}$ وارون‌پذیر است.

۵- فرض کنید V یک فضای برداری متناهیاً تولید شده با k مولد روی میدان F باشد. اگر $X_r = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی در V باشد، آن‌گاه بردارهای $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n \in V$ وجود دارند که $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای V است..

نمونه سوال پایان ترم

۱- فرض کنید $T: R^2 \to R^2$ تبدیل خطی باشد به طوری که $T(2,6)=(1,7)$ و $T(-1,2)=(4,1)$. ماتریس T را در پایه‌ی استاندارد بیابید.
(۲۵ نمره)

۲- فرض کنید V و W فضاهای برداری روی میدان F باشند و $\dim W < \infty$. اگر $T: V \to W$ تبدیل خطی یک به یک باشد، نشان دهید
(الف) $\dim V < \infty$.
(ب) تبدیل خطی $T: W \to V$ وجود دارد که $ST=I$.
(۲۵ نمره)

۳- فرض کنید A ماتریس حقیقی زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی A را بیابید. ماتریس وارون‌پذیر P را (در صورت وجود) طوری بیابید که $P^{-1}AP$ ماتریس قطری باشد.
(۲۵ نمره)

۴- فرض کنید A ماتریس حقیقی زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید A یک ماتریس پوچ‌توان است و ماتریس بالا مثلثی مشابه با A و هم‌چنین ماتریس تبدیل پایه را بیابید.
(۲۵ نمره)

۵- ثابت کنید تبدیل خطی $T: V \to V$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای می‌نیمال T به صورت
$m(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)$ باشد، که در آن α_i ها اسکالرهای متمایز هستند.
(۲۵ نمره)

۶- فرض کنید a بردار ثابت ناصفری در F^n (F یک میدان) باشد. نشان دهید تبدیل خطی $T: Mat_n(F) \to F^n$ با ضابطه‌ی $TA = Aa$ پوشا است.
(۲۵ نمره)

نمونه سوال پایان ترم

به پنج سوال از شش سوال زیر جواب دهید (نمره سوالات یکسان است ۲۵ نمره)

۱- قضیه‌ی پوچی به علاوه‌ی رتبه را بیان و ثابت کنید.

۲- نشان دهید ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP$ قطری باشد، که در آن

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس بالا مثلثی B و ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP=B$ ، که در آن

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP=J$ ، که در آن J ماتریس ژردان است و

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس تبدیل خطی $T:R^3 \to R^3$ با ضابطه‌ی $T(x,y,z)=(3x+2y-2z,x+2y-z,x+y)$ را نسبت به پایه‌ی $\{v_1,v_2,v_3\}$ بیابید، که در آن $v_1=(0,1,1)$ ، $v_2=(1,0,1)$ ، $v_3=(1,1,0)$.

۶- فرض کنید $T:V\to W$ یک تبدیل خطی پوشا باشد، که در آن و فضاهای برداری متناهیاً تولید شده هستند. نشان دهید تبدیل خطی $S:W\to V$ وجود دارد که $TS=id_W$.

نمونه سوال میان ترم و پایان ترم

۱- فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه ثابت کنید $A^2=2A-I$ و A^{100} را بیابید.
(۹ نمره)

۲- دستگاه معادله‌ی زیر را به روش خذفی گاوس-ژردان حل کنید

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=1 \\ 7x+4y+5z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

(۱۰ نمره)

۳- اگر سطرهای یک ماتریس A وابسته‌ی خطی باشند، ثابت کنید det(A)=0.

(۹ نمره)

۴- وارون ماتریس زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(۹ نمره)

۵- اگر $T:V\to V$ تبدیل خطی باشد باشد T^2 دارای مقدار ویژه λ^2 باشد، آنگاه ثابت کنید حداقل یکی از مقادیر λ یا $-\lambda$ مقدار ویژه‌ای برای T است. در حالت $\lambda=0$ چه می‌توان گفت.

(۹ نمره)

۶- فرض کنید u_1، u_2 ، .....، u_k بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه‌ی متمایز λ_1، λ_2 ، .....، λ_k از تبدیل خطی $T:V\to V$ باشند. ثابت کنید u_1، u_2 ، .....، u_k مستقل خطی هستند.
(۱۰ نمره)

۷- اگر A و B ماتریسهای مربع بوده و A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید که مقادیر ویژه‌ی AB و BA یکسان هستند.
(۹ نمره)
