بسمه تعالی

جبر خطی ۱

تمرینهای درس مبانی ماتریسها و جبر خطی

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

تمرین های درس مبانی ماتریسها و جبر خطی سری دوم

۱) فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ماتریسهای مربعی باشند بطوریکه $\sum_{i=1}^{k} A_i A_i^T = 0$.
نشان دهید $A_i = 0$ برای هر $i = 1, 2, \cdots, k$.

۲) برای هر ماتریس مربعی A با شرط $A^2 = 0$، نشان دهید که $rank(A) \leq \frac{n}{2}$.

۳) برای هر ماتریس $A_{m\times k}$ نشان دهید ماتریس $(I_{m\times m} + AA^T)$ وارون پذیر است.

۴) فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ است و فرض کنید

$$W = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

نشان دهید $\dim W = n(n - rank(A))$.

۵) فرض کنید برای هر $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ تعریف کنیم

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

عضو $h(x)$ را در $\mathbb{R}_2[x]$ بدست آورید بطوریکه

$$\forall g(x) \in \mathbb{R}_2[x], \quad < h(x), g(x) >= g(0).$$

۶) فرض کنید $T : V \to V$ یک تبدیل خطی روی میدان F باشد و برای هر زیر فضای W از V داشته باشیم $T(W) \subseteq W$. نشان دهید

$$\exists\, \lambda \in F : \forall\, v \in V, \;\; T(v) = \lambda v.$$

۷) نشان دهید

$$rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B),$$
$$rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}.$$

۸) برای ماتریسهای وارون پذیر A و B ثابت کنید

$$adj(AB) = adj(B)adj(A),$$
$$adj(A^T) = (adj A)^T,$$
$$adj(adj A) = (\det A)^{n-2} A.$$

۹) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی و A ماتریس آن باشد. نشان دهید

$$A = A^T \iff \forall u, w \in \mathbb{R}^n, \quad < T(u), w >=< u, T(w) > .$$

۱۰) فرض کنید ماتریس A با یک ماتریس بالا مثلثی متشابه است. اگر $tr(A^2) = 0$ نشان دهید A پوچتوان است.

۱۱) نشان دهید هر ماتریس بالا مثلثی، جمع یک ماتریس خودتوان و یک ماتریس وارون پذیر است.

۱۲) نشان دهید اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس پوچتوان باشد آنگاه $C_A(x) = x^n$. در مورد $m_A(x)$ چه می توان گفت؟

۱۳) نشان دهید برای هر $r \in \mathbb{R} \setminus \{۰\}$ داریم $C_{rA}(x) = r^n C_A(\frac{x}{r})$ که A یک ماتریس $n \times n$ است.

۱۴) در مساله ی ۱۳ اگر A وارون پذیر باشد نشان دهید

$$C_{A^{-۱}}(x) = \frac{(-x)^n}{\det A} C_A(\frac{۱}{x}).$$

۱۵) اگر ماتریسهای A و B متشابه باشند و $f(x)$ یک چندجمله ای باشد. نشان دهید $f(A)$ و $f(B)$ متشابه هستند.

۱۶) یک پایه ی متعامد یکه برای فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای زیر در $\mathbb{C}^۳$ بیابید.

$$\{(i,i,i),(۰,i,i),(۰,۱,i)\}.$$

۱۷) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و $u,v \in V$. نشان دهید

(الف) u و v متعامد هستند اگر و تنها اگر $||v+u|| = ||v-u||$.

(ب) $u+v$ و $u-v$ متعامد هستند اگر و تنها اگر $||v|| = ||u||$.

(ج) $< u,v >= \frac{۱}{۴}(||u+v||^۲ + ||u-v||^۲)$.

۱۸) نشان دهید که اگر $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ آنگاه هر مقدار ویژه ی AA^* حقیقی و نامنفی است.

۱۹) قرار دهید $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$. در اینصورت کدامیک از توابع زیر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^۲$ را مشخص می کند:

$$f,g : \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(u,v) = v^*Au, \quad g(u,v) = v^*Bu.$$

۲۰) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و $T : V \to V$ یک تبدیل خطی باشد به طوری که $T^۲ = T$. ثابت کنید $V = ker(T) \oplus Im(T)$.

۲۱) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و $T : V \to V$ یک تبدیل خطی باشد به طوری که $rank(T^۲) = rank(T)$. ثابت کنید

$$ker(T) \cap Im(T) = \{۰\}.$$

۲۲) فرض کنید V و W فضاهای برداری با تولید متناهی روی میدان F باشند. نشان دهید که اگر $S,T : V \to W$ تبدیل های خطی باشند که $ker(T) = ker(S)$، آنگاه تبدیل خطی وارون پذیر $R : W \to W$ وجود دارد که $S = RT$.

۲۳) فرض کنید رتبه ی ماتریس $A \in M_n(F)$ برابر با ۱ باشد. نشان دهید اسکالر $\lambda \in F$ وجود دارد که $A^۲ = \lambda A$.