

به نام خدا
امتحان پایان‌ترم مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی
(هجدهم دی ۱۳۹۳)

۱. دستگاه معادله‌ی خطی همگنی را بیابید که فضای جواب آن توسط بردارهای زیر تولید شود:

$$X_1 = (1, 4, 0, 9), \quad X_2 = (3, 4, -2, 5), \quad X_3 = (1, -2, -1, 2).$$

۲. فرض کنید تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی

$$T(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

داده شده باشد. ماتریس T را نسبت به پایه‌ی $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ بیابید، که در آن $v_1 = (-1, 1, 1)$ ،
 $v_2 = (1, -1, 1)$ و $v_3 = (1, 1, -1)$.

۳. برای ماتریس حقیقی A ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP$ مثلثی باشد، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 1 & -6 \\ -7 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

چندجمله‌ای می‌نیمال A چیست؟

۴. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n روی میدان F ، و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد. اگر λ یک مقدار ویژه با تکرار (جبری) d ، و $e = \dim \ker(T - \lambda \text{id}_V)$ بعد فضای ویژه متناظر λ (تکرار هندسی λ) باشند، آن‌گاه $e \leq d$.

۵. فرض کنید $m(x)$ چندجمله‌ای مینیمال تبدیل خطی $T \in \text{Hom}(V, V)$ ، که در آن V یک فضای برداری با تولید متناهی روی میدان F است. ثابت کنید T وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $m(0) \neq 0$.

۶. فرض کنید $S: V \rightarrow W$ و $T: W \rightarrow U$ ، که در آن V, W, U فضاهای برداری با تولید متناهی روی میدان F هستند. ثابت کنید:

$$\text{rank}(S) \leq \text{rank}(TS) + \text{nul}(T) \quad (\text{الف})$$

$$\text{rank}(TS) \leq \min\{\text{rank}(T), \text{rank}(S)\} \quad (\text{ب})$$

موفق باشید

وقت: ۱۲۰ دقیقه

هر سوال ۲۲ نمره دارد

ارزش امتحان: ۱۳۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)