به نام خدا

امتحان پایان ترم جبر خطی کاربردی

(۱۸ دی ماه ۱۳۸۹)

۱. فرض کنید تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده باشد

$$T(x,y,z)=(3x+2y-2z, x+2y-z, x+y).$$

(آ) ماتریس $T$ را نسبت به پایه‌ی $\{v_1,v_2,v_3\}$ بیابید، که در آن $v_1=(1,1,0)$، $v_2=(1,0,1)$، و $v_3=(0,1,1)$.

(ب) نشان دهید $T$ وارون‌پذیر است و وارون آن‌را بیابید.

۲. $A^n$ را محاسبه کنید، هرگاه $A=\begin{bmatrix}-7 & 10\\ -5 & 8\end{bmatrix}$.

۳. ماتریس وارون‌پذیر $P$ را بیابید که $P^{-1}AP$ مثلثی باشد، که در آن

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-5 & 3 & 1\\ -4 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 0\end{bmatrix}$، ماتریس وارون‌پذیر $P$ را بیابید که $P^{-1}AP$ به صورت ژردان باشد.

۵. فرض کنید $S\in \mathrm{Hom}(V,W)$ و $T\in \mathrm{Hom}(W,U)$، که در آن $V$، $W$ و $U$ فضاهای برداری متناهیا تولید شده روی میدان $F$ هستند و $\dim V=n$ و $\dim W=m$. ثابت کنید:

$$\max\{0, \mathrm{rank}(T)+\mathrm{rank}(S)-m\}\leq \mathrm{rank}(TS)\leq \min\{\mathrm{rank}(T), \mathrm{rank}(S)\}$$

۶. یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای تولید شده توسط مجموعه‌ی بردارهای زیر در $\mathbb{R}^4$ بیابید.

$$\{(1,1,0,1),(1,0,2,1),(1,2,-2,1),(1,1,-3,1)\}$$

۷. فرض کنید $T\in \mathrm{Hom}(F^n,F^n)$ و $\mathrm{rank}(T)=r$. ثابت کنید تبدیل خطی پوشای $S\in \mathrm{Hom}(F^n,F^r)$ و تبدیل خطی یک به یک $R\in \mathrm{Hom}(F^r,F^n)$ وجود دارد که $T=RS$.

موفق باشید

وقت: ۱۲۰ دقیقه

ارزش امتحان: ۱۴۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)