

به نام خدا  
 امتحان میان ترم جبر خطی کاربردی  
 (۲۲ آبان ماه ۱۳۸۹)

۱. دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

(۱۵ نمره)

۲. فرض کنید

$$U = \text{spann}\{(1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9)\}$$

$$W = \text{spann}\{(1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1)\}$$

زیرفضاهای  $\mathbb{R}^5$  باشند. پایه‌هایی برای  $U$ ،  $W$ ،  $U + W$ ، و  $U \cap W$  بیابید.

(۲۰ نمره)

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس‌های وارون‌پذیر  $P$  و  $Q$  را طوری بیابید که  $PAQ$  ماتریس تحویل یافته‌ی سطری پلکانی و ستونی پلکانی باشد.

(۲۰ نمره)

۴. فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{R})$  و  $A^k = 0$ . نشان دهید

(ب) به ازای هر  $a, b \in \mathbb{R}$  که در آن  $a \neq 0$ ، ماتریس  $aI + bA$  وارون‌پذیر است.

(پ) ماتریس  $a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_{k-1}A^{k-1}$  به ازای هر  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$  که در

آن  $a_0 \neq 0$ ، وارون‌پذیر است.

(۱۵ نمره)

موفق باشید

وقت: ۹۰ دقیقه

ارزش امتحان: ۷۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)