زیر است

$$c_{r+۱}u_{r+۱} + \cdots + c_n u_n,$$

یعنی $\{u_{r+۱}, \ldots, u_n\}$ همه‌ی جواب‌های دستگاه را تولید می‌کند. این بحث نشان می‌دهد که اگر یک دستگاه همگن m معادله و n مجهول در اختیار داشته باشیم، آنگاه $n-r$ پارامتر دلخواه در جواب دستگاه وجود دارد، که در آن r تعداد سطرهای ناصفر ماتریس R است. r حداکثر m است و $n - m \leq n - r < n$. بنابراین اگر $n > m$، یعنی اگر تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر باشد، آنگاه $۰ < n - m < n - r$ و دستگاه دارای جواب غیربدیهی است. هم‌چنین توجه کنید که اگر $r = n$، آنگاه $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n = ۰$ و در نتیجه دستگاه معادله دارای جواب بدیهی (و یکتای) $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ است.

رتبه‌ی (سطری) ماتریس $A \in M_{m\times n}(F)$ را برابر تعداد سطرهای ناصفر ماتریس تحویل یافته سطری-پلکانی هم‌ارز با A تعریف می‌کنیم و آنرا با $\operatorname{rank}(A)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید رتبه‌ی A برابر تعداد درایه‌های محور و هم‌چنین برابر تعداد ستون‌هایی است که درایه‌های محور در آن‌ها قرار دارند. طبق قضیه‌ی قبل اگر $\operatorname{rank}(A) < n$، آنگاه دستگاه همگن $AX = \mathbf{0}$ دارای بی‌نهایت جواب است.

تمرین

۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

(آ)
$$\begin{cases} x + ۲y + ۳z = ۰ \\ ۳x + ۲y + ۵z = ۰ \\ -۳x + ۲y - z = ۰ \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ = ۰ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ = ۰ \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ + x_۳ + ۴x_۴ = ۰ \end{cases}$$

(پ)
$$\begin{cases} ۳x + ۲y + z + ۵u = ۱ \\ x + y - ۳z + ۲u = ۲ \\ ۶x + y - ۴z + ۳u = ۷ \end{cases}$$

(ت)
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ = ۴ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ = ۵ \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ + x_۳ + ۴x_۴ = ۷ \end{cases}$$

(ث)
$$\begin{cases} ۲w + x + ۳y + z = ۱ \\ ۴w + \quad ۴y + ۸z = ۰ \\ w + x + ۲y + ۳z = ۲ \\ x + y + z = ۲ \end{cases}$$

(ج)
$$\begin{cases} ۲x + y + z = ۴ \\ ۴x + ۲y + z = ۶ \\ ۶x + ۳y + z = -۸ \\ ۸x + ۵y + z = ۱۰ \end{cases}$$

(چ)
$$\begin{cases} ۳x+۲y+z=۱ \\ ۵x+۳y+۳z=۲ \\ ۷x+۴y+۵z=۳ \\ x+y-z=۰ \end{cases}$$

(ح)
$$\begin{cases} ۲x_۱+۴x_۲+۶x_۳=۲ \\ x_۱+۲x_۲+۳x_۳=-۱ \\ x_۱+\quad x_۳=-۳ \\ ۲x_۱+۴x_۲=۸ \end{cases}$$

(خ)
$$\begin{cases} x_۱+x_۲+۲x_۳+۲x_۴+x_۵=۱ \\ ۲x_۱+۴x_۲+۴x_۳+۴x_۴+۳x_۵=۱ \\ ۲x_۱+۲x_۲+۴x_۳+۴x_۴+۲x_۵=۲ \\ ۳x_۱+۵x_۲+۸x_۳+۶x_۴+۵x_۵=۳ \end{cases}$$

۲. دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنید، که در آن A برابر است با

(آ)
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

(پ)
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۴ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

(ت)
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۴ & ۶ & ۲ \\ ۳ & ۶ & ۶ & ۹ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳. دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۶ & ۲ & -۴ & -۸ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & -۲ & -۴ \\ ۲ & -۳ & ۱ & ۴ & -۷ & ۱ \\ ۶ & -۹ & ۰ & ۱۱ & -۱۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \\ x_۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۴ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

۴. به ازای چه مقدار a و b دستگاه‌های زیر دارای جواب هستند

(آ)
$$\begin{cases} 2x+2y+3z=a \\ 4x+8y+12z=-4 \\ 6x+2y-bz=4 \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-3y+az=5 \\ 3x-4y+5z=b \end{cases}$$

۴.۱ ماتریس‌های وارون‌پذیر

ماتریس مربع $n \times n$ را وارون‌پذیر گوییم، هرگاه ماتریس B وجود داشته باشد که

$$AB = BA = I.$$

چنین ماتریس B، در صورت وجود، یکتا است (تمرین ۱ را ببینید) که آن‌را با A^{-1} نشان می‌دهیم. لزومی ندارد که هر ماتریس $n \times n$ دارای وارون ضربی باشد، به عنوان مثال ماتریس **0** وارون ندارد. اگر ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، آن‌را منفرد (یا تکین) گوییم. در این بخش می‌خواهیم روشی را برای یافتن وارون یک ماتریس (در صورت وجود) تشریح کنیم. برای این منظور و اهداف دیگر ابتدا ماتریس‌های مقدماتی را معرفی می‌کنیم. ماتریس مربع E را مقدماتی گوییم، هرگاه با انجام یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی به دست آمده باشد. فرض کنید E_{ij}، ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض جای سطر i و j ماتریس I باشد، در این صورت $E_{ij}A$ ماتریس حاصل از تعویض جای سطر i و j ماتریس A است. به همین صورت اگر $E_i(c)$ ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب سطر iام I در اسکالر ناصفر c باشد، آن‌گاه $E_i(c)A$ ماتریس حاصل از ضرب سطر iام A در c است. در نهایت اگر $E_{ij}(c)$، $i \neq j$، ماتریس مقدماتی به دست آمده از جمع سطر jام با c برابر سطر iام I باشد، آن‌گاه $E_{ij}(c)A$ ماتریس حاصل از جمع سطر jام با c برابر سطر iام A است. بحث بالا نشان می‌دهد که ماتریس‌های مقدماتی وارون‌پذیر هستند و داریم

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \qquad E_i(c)^{-1} = E_i(c^{-1}), \quad E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c).$$

به عنوان مثال فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$