

(۱) جواب عمومی معادلات مرتبه اول زیر را بدست آورید:

۱. $2yy' + x = xe^{-y}$
۲. $ydx + (xy + x - e^{-y})dy = 0$
۳. $x(y + x)y' = 2x + y + 1$
۴. $y' = 2\frac{y}{x} + x \tan\left(\frac{y}{x^2}\right)$
۵. $y' = \pi^2 + xe^y, y(0) = 4 \ln \pi$
۶. $(x^2y \ln y + xy^2 - y \sin x)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + y^2 \cos y\right)dy = 0$
۷. $y(2y + 4x^2)dx + x(4y + 3x^2)dy = 0; (\mu = x^\alpha y^\beta)$
۸. $xy' = 2x^2y' \ln(y) - y$
۹. $y' = -4y + 3 - e^{-x}, y(0) = 1$
۱۰. $(y^2 + y + 1)dx + x(x - 3y^2 - 1)dy = 0$
۱۱. $\sqrt{x+y} = e^x(1+y')$
۱۲. $y' \left(\frac{x}{y} - y \sin y\right) = 1$
- ۱۳.

(۲) جواب عمومی معادلات مرتبه دوم زیر را بدست آورید:

۱. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3, x > 0$
۲. $y'' - 2y' + y = e^x \ln(x)$
۳. $x^2y'' - xy' + y = x(\ln x)^{91}$
۴. $xy'' + (x-1)y' - y = x^2e^{-x}$
۵. $x^2y'' + xy' + y = \sin(\ln x), x > 0$
۶. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, x > 0$
- ۷.

(۳) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(۴) به روش ضرایب نامعین جواب خاص معادلات زیر را بدست آورید (نیازی به محاسبه ضرایب نیست):

۱. $y'' + 2y' + 2y = \sinh x \cos x + e^x \sin^2 x + 1$
۲. $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} + \cos(2x) \sinh(x)$
۳. $2y'' - 7y' + 3y = xe^{3x} \cos^2 x \sin^2 x$
۴. $y'' + 4y' + 2y = x^2 e^x + e^{-2x} \cos(x) \sin(2x) \sin(x)$
۵. $y'' + 2y' + 2y = \sinh x \cos x + e^x \sin^2 x + x^2 - 1$
۶. $y'' + y = \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + xe^x$

(۵) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y' + y = e^{-x} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(۶) الف) تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{s(s+1)}$ را بدست آورید.

ب) فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $[0, +\infty)$ پیوسته و از رتبه‌ی نمایی بوده و $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $g''(x)$ در $[0, +\infty)$ پیوسته‌ی قطعه‌ای باشند. همچنین فرض کنید تبدیل لاپلاس $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب برابر $F(s)$ و $G(s)$ بوده و $f(0) = 1$ ، $g(0) = 3$ و $g'(0) = 8$. مطلوبست محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس تابع زیر بر حسب توابع $F(s)$ و $G(s)$.

$$h(x) = xe^{9x}(f'(x) + g''(x)).$$

(۷) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y = e^x(u_1(x) - u_2(x)) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(۸) برای تابع $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$ با شرط $f(t+2) = f(t)$ نشان دهید که

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{s}{4}\right).$$

(۹) تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

$$f(x) = \int_0^x e^{2x} e^{-t} \cos^2(2t) dt, \quad g(x) = x U_{\frac{1}{4}}(x) \sin(x).$$

(۱۰) نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \frac{e^{-ax} \cos(bx) - e^{-px} \cos(qx)}{x}$ برابر با $F(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{(s+p)^2 + q^2}{(s+a)^2 + b^2}$ می باشد.

(۱۱) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌ی زیر را حل کنید

$$y'' - 2y' + y = xe^x \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(۱۲) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلات زیر را حل کنید:

$$(i) y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (ii) f'(x) = x + \int_0^x f(x-u) \cos(u) du, \quad f(0) = 1.$$

(۱۳) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$y'' + y = t(1 - U_\pi(t)), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(۱۴) لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2(1 + e^{-\frac{\pi}{2}S})}{S^2 - 2S + 5} \right]$$

(۱۵) لاپلاس وارون زیر را بیابید

$$\mathcal{L}^{-1} [\ln(1 - 2s^{-2})]$$

(۱۶) تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را به دست آورید.

$$F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + 4s + 5}$$

(۱۷) تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را بیابید هرگاه

$$f(x) = \int_0^{2x} e^{2(x-u)} \sin u du.$$

(۱۸) ثابت کنید که تساوی زیر برقرار است:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{S(S-1)}} \right] = \frac{2e^x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$$

۱۹) یک جواب خصوصی برای معادله انتگرال زیر به دست آورید.

$$2e^{-x}y'(x) = e^{-x}y(x) + 1 - \int_0^x e^{-t}y'(t)dt, \quad y(0) = 1$$

۲۰) جواب معادله دیفرانسیل $y'' - y = f(x)$ را با شرط اولیه $y(0) = y'(0) = 0$ بدست آورید که در آن

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

۲۱) با استفاده از روش مقدار ویژه—بردار ویژه جواب عمومی دستگاه ناهمگن زیر را بیابید

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

۲۲) با استفاده از روش تغییر پارامتر جواب عمومی دستگاه خطی زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z + t \\ \frac{dy}{dt} = x + z + e^{-t} \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

۲۳) جواب عمومی دستگاه معادلات زیر را بیابید

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} X.$$

۲۴) دستگاه ناهمگن زیر را حل کنید.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X + e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

۲۵) با استفاده از روش سری‌های توانی، جواب عمومی معادله‌ی زیر را به صورت سری توانی حول $x_0 = 1$ نمایش دهید

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

۲۶) یک جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌های توانی حول $x_0 = 2$ بدست آورید

$$x^2 y'' + (x - 2x^2)y' + (x^2 - x - 1)y = 0.$$

(۲۷) به روش سری‌های توانی جواب معادله دیفرانسیل زیر را تا پنج جمله اول به دست آورید

$$y'' + 2xy = x, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$
