www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

ارائه کتابها و جزوات رایگان مهندسی عمران

بهترین و برترین مقالات روز عمران

انجمن های تخصصی مهندسی عمران

فروشگاه تخصصی مهندسی عمران

مقدمات معادلات دیفرانسیل
و مسائل مقدار مرزی

جلد اول

ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما

ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس

مرکز نشردانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۳۲۴

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۳۷

Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems
William E. Boyce, Richard C. Diprima
Third Edition
John Wiley & Sons, 1977

مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی
جلد اول
تألیف ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما
ترجمهٔ دکتر محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس
ویراستهٔ دکتر منوچهر وصال

مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۶
چاپ یازدهم ۱۳۸۳
تعداد ۴۰۰۰
حروفچینی: عبدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ: مازیار

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

بویس، ویلیام — Boyce, William E.
مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی / ویلیام ا. بویس، ریچارد ک. دیپریما؛ ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶ــ.
ج. : مصور، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۳۲۴: ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۳۷)
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Elementary differential equations.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
نمایه.
ج. ۱ (چاپ یازدهم: ۱۳۸۳). — ISBN 964-01-0324-7
۱. معادله‌های دیفرانسیل. ۲. مسأله‌های مقدار مرزی. الف. دیپریما، ریچارد Diprima Richard C. ب. سلطانپور، محمدرضا، ۱۳۱۴ــ ، مترجم. ج. شمس، بیژن، ۱۳۱۰ــ ، مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی. هـ. عنوان.
۷م۹ب/QA۳۷۱ — ۵۱۵/۳۵
۱۳۶۷
کتابخانهٔ ملی ایران — ۱۷۷ـ ۶۸م

فهرست

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه
۳.۶ توابع پله‌ای	۳۰۹
۱.۳.۶ یك معادلهٔ دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته	۳۱۷
۴.۶ توابع ضربه‌ای	۳۲۱
۵.۶ انتگرال تلفیقی	۳۲۷
۶.۶ بحث کلی وخلاصه	۳۳۳
۷. دستگاههای معادلات مرتبهٔ اول	۳۳۷
۱.۷ مقدمه	۳۳۷
۲.۷ حل دستگاههای خطی با روش حذفی	۳۴۵
۳.۷ یادآوری مبحث ماتریسها	۳۵۲
۴.۷ دستگاههای معادلات جبری‌خطی؛ استقلال‌خطی، مقادیرویژه، بردارهای ویژه	۳۶۵
۵.۷ نظریهٔ اساسی دستگاههای معادلات خطی مرتبهٔ اول	۳۷۹
۶.۷ دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت	۳۸۶
۷.۷ مقادیر ویژهٔ مختلط	۳۹۶
۸.۷ مقادیر ویژهٔ مکرر	۴۰۲
۹.۷ ماتریسهای اساسی	۴۱۰
۱۰.۷ دستگاههای خطی ناهمگن	۴۱۷
جوابهای مسائل	۴۲۵
واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی	۴۷۹
واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی	۴۸۴
فهرست راهنما	۴۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

یادداشت مترجمان

این کتاب ترجمهٔ هفت فصل اول از یازده فصل کتاب مقدمات معادلات دیفرانسیل ومسائل مقدارمرزی تألیف ویلیام ا. بویس وریچارد ک. دیپریما است. چون هفت فصل اول شامل موادی است که در دانشگاههای ایران به عنوان درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی تدریس می‌شود، به ترجمه درآمد. امیدواریم این کتاب برای دانشجویان و خوانندگان علاقه‌مند به آشنایی با مقدمات معادلات دیفرانسیل مفید باشد.

محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس

پیشگفتار

درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی وسیله‌ای است بسیار عالی برای اینکه دانشجو بتواند ارتباط بین ریاضیات محض و علوم فیزیکی یا مهندسی را درك کند. پیش از آنکه مهندس یا دانش‌پژوهی بتواند با اعتماد به‌کاربرد معادلات دیفرانسیل بپردازد، باید به‌روشهای حل آنها تسلط پیداکند، و حداقل از نظریهٔ زیربنایی این مبحث اطلاع مجملی داشته باشد. از سوی دیگر، آگاهی براینکه چگونه ضرورت حل مسائلی خاص، انگیزهٔ پژوهشهای مجردتری شده است، برای یك دانشجوی ریاضیات محض غالباً بسیار سودمند است.

این کتاب را از دید شخصی که کارش ریاضیات کاربسته است و ممکن است هم به‌قسمتهای نظری و هم به‌جنبه‌های عملی بسیار علاقه‌مند باشد نوشته‌ایم، یعنی با دیدی بینابین نظری‌وعملی. بنابراین درصدد بوده‌ایم که نظریهٔ مقدماتی کامل ودقیق (اما نه مجرد) معادلات دیفرانسیل را با مطالب قابل توجهی دربارهٔ روشهایی که در بسیاری ازکاربردهای گوناگون سودمندی آنها به‌ثبوت رسیده‌است ترکیب کنیم. توجه اصلی به‌روشهایی معطوف بوده است که دارای کاربرد وسیع‌اند و می‌توان آنها را به‌مسائل خارج از محدودهٔ این کتاب نیز تعمیم داد. تأکید می‌شودکه این روشها دارای‌ساختاری مرتب و منظم‌اند، وتنها یك کلکسیون متنوع از شگردهای ریاضی نامرتبط نمی‌باشند. البته در برخی از موارد، دانشجو تشخیص می‌دهد که بسیاری از مسائل را نمی‌توان با روشهای تحلیلی مقدماتی به‌گونه‌ای رضایت‌بخش حل کرد. ازاین‌رو موضوعاتی را دربارهٔ جنبه‌های کیفی جوابها و روشهای عددی تقریب آنها مورد بحث قرارداده‌ایم.

هنگامی که با مسئله‌ای مواجه شویم که جواب آن به‌آسانی پیدا نشود، سؤالاتی ازقبیل وجود ویکتایی جواب مطرح می‌شود. برای پاسخ به‌این سؤالات قضایای مربوطه را، البته نه به‌عامترین صورت آن، بیان می‌کنیم، و مفاد آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. به‌ویژه، به‌بررسی تفاوتهایی‌که بین معادلات خطی و غیرخطی، و مسائل مقدارمرزی وشرایط اولیه وجود دارد می‌پردازیم.

گرچه اغلب دانشجویان، در این سطح، قادرندکه اهمیت و کاربردهای قضایای گوناگون مذکوررا به‌خوبی درك‌کنند، اما اثبات آنها دربسیاری ازموارد متضمن مفاهیمی

است، مانند همگرایی یکنواخت، که هنوز با آنها آشنایی ندارند. درچنین وضعیتی ازاثبات آنها صرف‌نظر شده است. چنان‌که در اثبات قضیهٔ اساسی وجود و یکتایی جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول با شرط اولیه از روش تقریبات متوالی استفاده‌کرده ومسائل مربوطه را مورد بحث قرارداده‌ایم و برای اجتناب از وارد شدن در جزئیات تحلیلی دشوارتری، تا اندازه‌ای از راه شهودی رفته‌ایم.

این کتاب رااساساً برای دانشجویانی نوشته‌ایم که دورهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال را مطابق برنامه‌های معمول در دو و یا سه نیمسال گذرانده‌اند؛ قسمت اعظم کتاب در خور توانایی چنین دانشجویانی است. درفصل هفتم، «دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول»، آشنایی با جبرماتریسی مفید است، گرچه دربارهٔ ماتریسها طی دوبند به‌اختصار اطلاعات لازم برای مطالعهٔ بقیهٔ فصل را آورده‌ایم. بندهایی‌که بـا ستاره مشخص شده است، محتملاً مستلـزم قدرت استدلال ریاضی بیشتر (نه معلومات بیشتر) است.

چون غـالباً در دانشجویان این احساس وجود داردکـه دروس وکتب معـادلات دیفرانسیل به «کتاب آشپزی» شبیه‌اند، از این‌روکوشش خاصی در مبارزه بـا این تمایل به‌کار برده‌ایم. هرجا ممکن بوده است معلومات قبلی دانشجو را به‌کار گرفته‌ایم و او را به‌طرح روشی برای حل مسائل تازه هدایت کرده‌ایم. علاوه براین، دربحث‌کاربردها معمولاً طرز تشکیل معادلات مربوطه را دقیقاً بیان کرده‌ایم. برای یك کتـاب مقدماتی نمی‌توان ایجاز را جزو محسنات اولیه به شمار آورد، وماکوشش‌کرده‌ایم وضوح را براختصار مقدم داریم. امید است‌که سهولت مطالعه، نقصان ظرافت را جبران‌کند.

گرچه مندرجات‌کتاب را با مراجعه به‌فهرست می‌توان به‌خوبی‌بررسی‌کرد، دراینجا برخی از ویژگیهای آن را بیان می‌کنیم. فصل اول مقدمهٔ مختصری است براصطلاحات و تاریخچهٔ معادلات دیفرانسیل. فصل دوم به معادلات مرتبهٔ اول اختصاص دارد. تفاوت بین معادلات خطـی و غیرخطـی را در سه بند نخست بررسی کرده‌ایم. سپس به‌بحث دربارهٔ روشهای مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل پرداخته‌ایم وکاربردآنها را در دینامیك جمعیت، اختلاط، رشد و استهلاك، هندسه، و مکانیك، مشتمل بر حرکت مستقیم‌الخط جسم با جـرم متغیر، بیان‌کرده‌ایم. در پایان فصل قضیهٔ پیکار را دربارهٔ وجود و یکتایی شرح داده‌ایم.

فصلهای سوم تا هفتم به معـادلات دیفرانسیل خطی اختصاص دارند. در فصل سوم معادلات خطی مرتبهٔ دوم را بررسی می‌کنیم. مفاهیم مجموعه‌های اساسی جواب، استقلال خطی، وانطباق همراه با روشهای حل، مورد تأکید قرارگرفته است. مثالها را ازارتعاشات مـکانیکی وشبکه‌های الکتریکی انتخاب کرده‌ایم. مطالب این فصل درفصل پنجم به‌معادلات خطی مراتب بالاتر تعمیم یافته است. درفصل چهارم‌که به‌سریهای توانی جواب اختصاص دارد، نشان می‌دهیم‌که طبقه‌بندی نقاط به‌عنوان عادی، غیرعادی منظم، یا غیرعادی غیرمنظم یك تقسیم‌بنـدی ضروری و طبیعی است نه دلخواه. از معادلهٔ اویلر به عنوان مدلی برای حالت‌کلیتر معادلاتی‌که دارای نقطهٔ غیرعادی منظم‌اند استفاده‌کرده‌ایم. بحث در حالتهای دشوارتر راکه درآنها ریشه‌های معادلهٔ شاخص برابرند، یا تفاضل آنها عدد صحیح‌است، با

شکلهای مناسبی از معـادلهٔ بسل تـوضیح داده‌ایم. در فصل ششم بـه معرفی تبدیل لاپلاس پرداخته‌ایم و فوایدآن را در حل مسائل مقدار اولیه‌که در آنها تابع نیرو پیوستهٔ قطعه‌ای یا ضربه‌ای است تأکیدکرده‌ایم. درفصل هفتم به‌بررسی‌دستگاههای معادلات خطی مرتبهٔ اول اختصاص دارد. دو بند نخست بهمعرفی دستگاهها و حل آنها به‌روشهای حذفی می‌پردازد و بدون اطلاعی از ماتریسها می‌توان آن را مطالعه‌کرد. دربقیهٔ فصل از نماد بردار-ماتریس استفاده کرده‌ایم. بـدین‌سان ارتباط نزدیك بین مبحث یك معادلهٔ تنهـا و مبحث دستگاهها روشن می‌شود. کاربردهای متعددی با تأکید برتحلیل شبکه‌های الکتریکی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

در فصلهای هشتم و نهم مسائلی راکـه با روشهای پیش نمی‌توان حل کرد، به‌ویژه مسائل غیرخطی‌را بررسی کرده‌ایم. درفصل هشتم روشهای عددی گسسته حل‌مسائل‌مقداراولیه مورد توجه و دقت قـرارگرفته‌اند. دامنهٔ این بحث از روش خط مماس اویلر تا روشهای پیش‌بینی و تصحیح رونگه-کوتا[1] و آدامس-مولتون[2] را شامل می‌شود، که آنها را توضیح داده و مقایسه‌کرده‌ایم. تأکید و توجه بسیاری براصول حاکم برروشهای عددی، پیرایش آنها ودرنظرگرفتن نوع، منبع‌وکنترل خطاها به‌عمل آمده‌است. فصل نهم مقدمه‌ای برنظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل است و در آن بر مسائل پایداری دستگاههای آزاد تأکید شده است. موضوعات این فصل را با کاربردهای‌آن در اکولوژی درمواردی‌که متضمن تنازع انواع وروابط صیاد-صید می‌باشند توضیح داده وتوجیه‌کرده‌ایم. نقاط بحرانی دستگاههای خطی را طبقه‌بندی کرده‌ایم و دستگاههای تقریباً خطی را بـه وسیلهٔ مقایسه با یك دستگاه خطی مجاورآن بررسی کرده‌ایم. روش لیاپونف[3] را از دیدگاه فیزیکی مطرح نموده‌ایم، این فصل را با بررسی مختصری دربارهٔ سیکلهای حدی به‌پایان برده‌ایم.

در دو فصل آخر به‌معادلات با مشتقهای جزئی، سری فوریه، و مسائل مقدار مرزی استورم-لیوویل[4] پرداختـه‌ایم. در فصل دهم، حل معـادلهٔ حـرارت با استفاده از روش جداسازی متغیرها به بحث دربارهٔ خواص اولیهٔ سری فوریه انجامیده است. همین روشها برای حل مسائل مربوط بـه معادلهٔ موج و معادلهٔ پتانسیل به کار رفته‌اند. در فصل یازدهم به‌بررسی مسائل مقدارمرزی استورم-لیوویل درحالتی‌کلیتر، منظم و غیرعادی پرداخته‌ایم. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ این نوع مسائل را مورد بحث قرار داده و با استفاده از سری توابع ویژه روش جداسازی متغیرها را بـه مسائل کلی همگن یا ناهمگن در معادلات با مشتقهای جزئی تعمیم داده‌ایم.

این‌کتاب برای استفاده درکلاس درس دارای انعطاف بسیار زیادی است. ازفصل چهارم به‌بعد فصول ازیکدیگر اساساً مستقل‌اند،گرچه فصل یازدهم دنبالهٔ منطقی فصل دهم است. علاوه براین، دربیشتر فصول موضوعات پایه‌ای را در بندهای اولیه شرح داده‌ایم، وبندهای دیگر به‌تعمیم وکاربردها اختصاص دارد. بدین‌سان معلم برای انتخاب وتنظیم مواد

---

1. Runge-Kutta 2. Adams-Moulton 3. Liapounov
4. Sturm-Liouville

وعمق مطلوب برای هریك از مباحث، حداکثر آزادی و کنترل را دارد.

ما در تدریس خود در رنسلر مشاهده کرده‌ایم که در یك نیمسال بـا سه ساعت درس درهفته می‌توان تقریباً بندهای زیر را تدریس کرد.

۱.۱، ۲.۱	۱.۵ تا ۴.۵
۱.۲ تا ۴.۲، ۹.۲	۱.۷، ۵.۷ تا ۱۰.۷
۱.۳ تا ۸.۳	۱.۸ تا ۷.۸
۱.۴ تا ۵.۴	۱.۱۰ تا ۸.۱۰

ترتیبهای دیگـری نیز ممکن است. مثلاً اگر روشهای عددی در درسهای دیگـر تدریس می‌شود، طبعاً باید به‌جای فصل هشتم بخشهایی از فصل نهم را جایگزین کرد. در درسهایی که توجه بـه‌تحلیل دستگاههاست محتملاً باید فصلهای ششم، هفتم ونهم را مورد تأکید قرار داد. بالاخره اگر دانشجویان در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با معادلات دیفرانسیل آشنا شده‌اند، می‌توان موضوعات مقدماتی در فصلهای دوم وسوم را حذف کرد، وفصلهای دیگر را کاملتر تدریس نمود.

بندها را به‌روش دهدهی شماره‌گذاری کرده‌ایم. قضایا واشکال دریك‌فصل به‌ترتیب شماره‌گـذاری شده‌اند. بدین‌سان قضیهٔ ۷.۳ نمایشگر قضیه هفتم در فصل سوم است؛ اما لزومی ندارد که در بند ۷.۳ باشد. درپایان هرفصل مآخذ ومراجع ذکر شده است. درپایان اکثر بندها مجموعهٔ مسائلی برای دانشجو آورده‌ایم، و جواب همهٔ آنها در پایان‌کتاب داده شده است. برخی از مسائل دشوارتر را با ستاره مشخص کـرده‌ایم. برخی از بندها نیز ستاره دارند، این بندها حاوی موضوعات پیشرفته‌تری می‌باشند، ودانشجوی مبتدی در دور اول مطالعه می‌تواند آنها را حذف کند.[۱]

ویلیام ای. بویس
ریچارد سی. دیپریما
تروی، نیویورك
نوامبر ۱۹۷۶

۱. درترجمهٔ پیشگفتارقسمت مربوط به‌توضیح تغییراتی‌که درچاپ دوم داده شده است وهمچنین سپاسگزاری از افرادی‌که با مؤلفین‌کتاب به‌نحوی همکاری و اظهار علاقه‌کرده‌اند، حذف شده است.ـــمترجمین.

۱

مقدمه

بسیاری از مسائل مهم و شایان توجه در مهندسی، علوم تجربی، و علوم اجتماعی را چون به صورت ریاضی بیان کنیم، به تعیین تابعی منجر می‌شود که باید در معادله‌ای که شامل مشتقهای این تابع مجهول است صدق کند. چنین معادلـه‌ای را معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند. محتملاً آشناترین مثال قانون نیوتن است:

$$m\frac{d^{۲}u(t)}{dt^{۲}}=F\left[t,\ u(t),\ \frac{du(t)}{dt}\right] \qquad (۱)$$

که در آن $u(t)$ موضع نقطهٔ مادی تحت اثر نیروی F را نشان می‌دهد، این نیرو به‌نوبهٔ خود می‌تواند تابعی از زمان t، ازموضع $u(t)$ و از سرعت $du(t)/dt$ باشد. برای تعیین حرکت یك نقطهٔ مادی تحت اثرنیروی مفروض F، لازم است تابع u راکه درمعادلهٔ (۱) صدق‌کند، بیابیم. اگر F نیروی ناشی از ثقل باشد، آنگاه

$$m\frac{d^{۲}u(t)}{dt^{۲}}=-mg \qquad (۲)$$

با انتگرال‌گیری معادلهٔ (۲) خواهیم داشت

$$\frac{du(t)}{dt}=-gt+c_{۱}$$

$$u(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+c_{۱}t+c_{۲} \qquad (۳)$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت‌اند. برای‌آنکه $u(t)$ کاملاً معین شود لازم است دو شرط اضافی، مانند موضع و سرعت نقطه در یك لحظهٔ مفروض، مشخص گردد. از این شرایط برای تعیین ثابتهای c_1 و c_2 استفاده می‌شود.

برای‌آنکه شرح و بسط نظریهٔ معادلات دیفرانسیل به‌طور منظم بیان شود، مفیداست که انواع گوناگون معادلات طبقه‌بندی شود. یکی از رایجترین طبقه‌بندیها مبتنی است بر اینکــه آیا تابع مجهول به‌یك متغیر مستقل بستگی دارد و یا به‌چند متغیر مستقل. در حالت اول فقط مشتقهای معمولی در معــادلهٔ دیفرانسیل وجود دارند، و آن را معادلهٔ دیفرانسیل معمولی می گویند. درحالت دوم مشتقها، مشتقهای جزئی‌اند، ومعادله را معادلهٔ با مشتقهای جزئی می‌نامند.

علاوه برمعادلهٔ (۱) دومثال دیگر برای معادلات دیفرانسیل معمولی می‌آوریم. یکی

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t) \qquad (۴)$$

است که درآن $Q(t)$ بار یك خازن با ظرفیت C، مقاومت R، و ضریب خودالقائی L، در مداری با ولتاژ $E(t)$ است، و دیگری معادله‌ای است‌که قانون کاهش مقدار $R(t)$ از یك مادهٔ رادیو اکتیو مانند رادیوم را برحسب زمان t بیان می کند،

$$\frac{dR(t)}{dt}=-kR(t) \qquad (۵)$$

که درآن k ثابت معلومی است. نمونه‌های اصلی معادلات با مشتقهای جزئی عبارتند از معادلهٔ پتانسیل

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0 \qquad (۶)$$

معادلهٔ انتشار یا حرارت

$$\alpha^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad (۷)$$

و معادلهٔ موج

$$a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2} \qquad (۸)$$

دراینجا α^2 و a^2 مقادیری ثابت‌اند. معادلهٔ پتانسیل، معادلهٔ انتشار، و معادلهٔ موج درمسائل گوناگونی در زمینه‌های الکتریسیته و مغناطیس، کشسانی و مکانیك سیالات پدید می‌آیند. هریك ازآنها مبین یك پدیدهٔ مشخص فیزیکی است (به‌نام آنها توجه شود)، وهریك نمایندهٔ طبقهٔ وسیعی ازمعادلات با مشتقهای جزئی است. گرچه توجه اصلی ما به‌معادلات دیفرانسیل معمولی معطوف است، اما معادلات با مشتقهای جزئی را نیز درنظر خواهیم گرفت، به‌ویژه

سه معادلهٔ مهم مزبور را درفصول ۱۰ و ۱۱ بررسی خواهیم کرد.

۱۰۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

مرتبهٔ یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی عبارت است از، بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در آن معادله. بدین‌سان معادلات (۱) و (۴) بند پیش معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم‌اند، و معادلهٔ (۵) یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول است. به‌طور کلی، معادلهٔ

$$F[x, u(x), u'(x), \cdots, u^{(n)}(x)] = 0 \qquad (1)$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ nام است. معادلهٔ (۱) نمایشگر یك رابطه بین متغیرمستقل x و مقادیر تابع u و نخستین n مشتق آن u' ، u'' ، ...، $u^{(n)}$ می‌باشد. از لحاظ سهولت و رعایت علامت گذاری متداول در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی، $u(x)$ را با y، و $u'(x)$ ، $u''(x)$ ، ... ، $u^{(n)}(x)$ را به‌ترتیب با y' ، y'' ، ... ، $y^{(n)}$ نشان می‌دهیم. بدین‌سان معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

به‌عنوان مثال،

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \qquad (3)$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ سوم برای $y = u(x)$ است. گاهی حروف دیگر نیز به‌جای y به‌کار خواهد رفت، که معنی آن ازمتن عبارت روشن می‌شود.

همواره فرض می کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مفروض را بتوان برحسب بالاترین مشتق موجود حل کرد و نوشت

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (4)$$

ما فقط به بررسی معادلاتی به صورت (۴) می‌پردازیم. این نکته اساساً برای اجتناب از ابهامی است که می‌تواند پیش آید، زیرا یك معادله به صورت (۲) ممکن است با چندین معادله به‌صورت (۴) متناظر باشد. مثلاً معادلهٔ

$$y'^2 + xy' + 4y = 0$$

به‌دو معادلهٔ زیر منجر می گردد

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y}}{2} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 16y}}{2}$$

جواب. البته نوشتن معادله به صورت (۴)، بدان معنی نیست که لزوماً تابع $y = \phi(x)$ که درآن صدق کند، وجوددارد. درواقع، این یکی ازمسائلی است که می‌خواهیم مورد بررسی قرار دهیم. مقصود از جواب معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (۴) در فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ تابعی است مانند ϕ به‌طوری‌که دارای مشتقهای ϕ'، ϕ''، ...، $\phi^{(n)}$ باشد،

و به‌ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\phi^{(n)}(x)=f[x,\ \phi(x),\ \phi'(x),\ \ldots,\ \phi^{(n-1)}(x)] \tag{۵}$$

تابع f درمعادلهٔ (۴) را همواره یك تابع با مقدارحقیقی فرض می‌کنیم، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود، و همواره می‌خواهیم جوابهای با مقدار حقیقی $y=\phi(x)$ را بیابیم.

به‌آسانی با جایگذاری مستقیم می‌توان تحقیق کرد که معادلهٔ مرتبهٔ اول

$$\frac{dR}{dt}=-kR \tag{۶}$$

دارای جواب

$$R=\phi(t)=ce^{-kt},\quad -\infty<t<\infty \tag{۷}$$

است، که در آن c مقدار ثابت دلخواهی است. به‌همین طریق دیده می‌شود که توابع $y_1(x)=\cos x$ و $y_2(x)=\sin x$ به‌ازای همهٔ مقادیر x جوابهای معادلهٔ

$$y''+y=0 \tag{۸}$$

هستند. مثال نسبتاً پیچیده‌تری تحقیق این نکته است که تابع $\phi_1(x)=x^2\ln x$ یك‌جواب معادلهٔ زیر است

$$x^2y''-3xy'+4y=0\qquad x>0 \tag{۹}$$

داریم

$$\phi_1(x)=x^2\ln x$$

$$\phi_1'(x)=x^2\frac{1}{x}+2x\ln x=x+2x\ln x$$

$$\phi_1''(x)=1+2x\frac{1}{x}+2\ln x=3+2\ln x$$

با جایگزینی درمعادلهٔ دیفرانسیل (۹) به‌دست می‌آید

$$x^2(3+2\ln x)-3x(x+2x\ln x)+4(x^2\ln x)=$$
$$3x^2-3x^2+(2-6+4)x^2\ln x=0$$

که نشان می‌دهد $\phi_1(x)=x^2\ln x$ یك جواب معادلهٔ (۹) است. همچنین می‌توان تحقیق کرد که $\phi_2(x)=x^2$ یك‌جواب دیگر این معادله است، و آن را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

سؤالی که ممکن است به‌ذهن آید این است که آیا معادلات (۶)، (۸)، و (۹) علاوه برجوابهای مزبور، می‌توانند جوابهای دیگری نیز داشته باشند. سؤال دیگری که امکان دارد حتی قبل از آن مطرح شود عبارت است از: هنگامی که معادله به‌صورت (۴) داده

شده است، چگونه می‌توان دانست کــه این معادله اصلاً دارای جوابی هست؟ این مسئلهٔ وجود جواب است. نه همهٔ معادلات دیفرانسیل دارای جواب‌اند، و نه مسئلهٔ وجود به طور محض ریاضی‌است. اگر مسئلهٔ فیزیکی معنی‌داری را به‌طور صحیح به‌صورت ریاضی با یك معادلهٔ دیفرانسیل بیان‌کنیم، آنگاه این مسئلهٔ ریاضی باید دارای جوابی‌باشد. از این لحاظ مهندس ویا فیزیکدان نظارتی براعتبار فرمول‌بندی ریاضی خود دارد.

دومین سؤال آنکه فرض کنیم معادله دارای یك جواب است، آیا دارای جوابهای دیگری نیز هست؟ واگر چنین است، چه نوع شرایط اضافی باید مشخص شود، تا به‌تعیین یك جواب خاص بینجامد؟ این مسئلهٔ یکتایی است. توجه شود که برای معادلهٔ مرتبهٔ اول (۶) یك دستهٔ نامتناهی جواب متناظر بــه امکانات نامتناهی انتخاب ثابت c در معادلهٔ (۷) وجود دارد. اگر R به‌ازای یك مقدار t مشخص باشد، این شرط مقدار c را معین می‌کند، اما هنوز نمی‌دانیم که معادلهٔ (۶) دارای جوابهای دیگری که دراین شرط اخیر صدق کنند، هست یا نه. مسائل وجود و یکتایی، مسائلی دشوارند، بحث دربارهٔ آنها و مسائل مربوطه به‌تدریج مطرح خواهد شد.

سومین سؤال، که بیشتر جنبهٔ عملی دارد، عبارت‌است‌از: معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت (۴) داده شده است، چگونه واقعاً جوابی برای آن به‌دست می‌آوریم؟ روشن است که اگر برای معادلهٔ مفروض جوابی بیابیم، همزمان با آن مسئلهٔ وجود جواب را نیز پاسخ گفته‌ایم. از طرف دیگر، بدون شناخت نظریــهٔ وجــود ممکن است، مثلاً، از کامپیوتر برای یافتن تقریب عددی «جوابی» اقدام کنیم و حال آنکه معادله اصلاً دارای جوابی نباشد. حتی هنگامی که بدانیم جوابی وجــود دارد، ممکن است این جواب قابل بیان برحسب توابع مقدماتی، یعنی توابع چند جمله‌ای، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، و هذلولی نباشد. متأسفانه وضع بیشتر معادلات دیفرانسیل چنین است. در هرصورت، پیش از آنکه به مسائل دشوار بپردازیم کسب مهارت در بخشی از نظریهٔ مقدماتی معادلات دیفرانسیل معمولی ازضروریات اولیه است.

معادلات خطی وغیرخطی. یك طبقه بندی اساسی در معادلات دیفرانسیل معمولی برطبق خطی و یا غیرخطی بودن آنها انجام می‌گیرد. معادلهٔ دیفرانسیل

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

را خطی گوینــد، هرگاه F تابعی خطی از متغیرهای y، y'، ...، $y^{(n)}$ باشد. بدین‌سان صورت کلی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبهٔ n چنین است

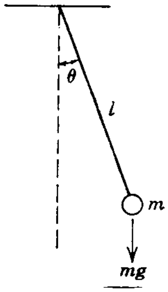
$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x) \qquad (10)$$

معادلات (۲)، (۴) و (۵) دربند پیش و معــادلات (۶)، (۸)، و (۹) در این بند معادلات خطی‌اند. معادله‌ای که به‌صورت (۱۰) نباشد، معادله‌ای است **غیرخطی**. معادلهٔ (۳) بدعلت جملهٔ yy' غیرخطی است. یك مسئلهٔ سادهٔ فیزیکی کــه بــه یك معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی می‌انجامد، مسئلهٔ آونگ است. اگر l طول آونگ باشد، زاویهٔ θ که آونگ درهر لحظه با

امتداد شاغول می‌سازد (شکل ۱.۱) در معادلهٔ غیرخطی

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{11}$$

صدق می‌کند.



شکل ۱.۱

نظریهٔ ریاضی وروشهای حل معادلات خطی توسعه و گسترش بسیار یافته‌اند. برعکس، درمورد معادلات غیرخطی وضع رضایت بخش نیست. برای حل معادلات غیرخطی روش کلی در دست نداریم، و نظریهٔ وابسته به‌این معادلات نیز بسیار پیچیده‌تر از نظریهٔ معادلات خطی است. خوشبختانه بسیاری ازمسائل مهم به‌معادلات دیفرانسیل معمولی خطی، یا اقلاً، درتقریب اول به‌معادلات دیفرانسیل معمولی خطی می‌انجامند. مثلاً، در مورد مسئلهٔ آونگ، اگر زاویه θ کوچك باشد، آنگاه $\sin\theta \cong \theta$ و به‌جای معادلهٔ (۱۱) می‌توان معادلهٔ خطی زیر را در نظر گرفت

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{12}$$

از طرف دیگر، پدیده‌های فیزیکی مهمی، مانند جریان درلامپ الکترونی، وجود دارندکه درآن نمی‌توان معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر آن را بامعادلهٔ خطی تقریب کرد، زیرا غیرخطی بودن آن اساسی است.

دریك کتاب مقدماتی طبیعی است کــه بحث معادلات خطی مورد تأکید قرار گیرد. بنابراین بخش اعظم این کتاب به معادلات خطی و روشهای گوناگون حل آنها اختصاص یافته است. اما فصول ۸ و ۹، و بخش قابل توجهی از فصل ۲، به معادلات غیرخطی تعلق دارد. در سراسرکتاب کوشش شده است، کــه نشان دهیم چرا معادلات غیــرخطی عموماً دشوارترند، و چرا بسیاری از روشها که در حل معادلات خطی مفیدند، در مورد معادلات غیرخطی به‌کار نمی‌روند.

۲.۱ نگاهی به تاریخ

بدون آنکه چیزی دربارهٔ معــادلات دیفرانسیل و روشهای حل آنها بــدانیم، بحث راجع

به تاریخ و گسترش این شاخهٔ مهم از ریاضیات دشوار است. علاوه بر این، رشد نظریهٔ معادلات دیفرانسیل با رشد عمومی ریاضیات درهم بافته شده است ونمی‌تواند از آن جدا شود. دراین شرح مختصر فقط می‌خواهیم به‌ذکر بعضی از ریاضیدانان مشهور قرن هفدهم و هیجدهم که تحقیقات مهمی در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل داشته‌اند بپردازیم. دراین باره از بررسی تاریخی مختصری که اینس[1] در ضمیمهٔ الف کتاب[2] مفصل و موثق خود دربارهٔ معادلات دیفرانسیل آورده است پیروی می‌کنیم.

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل در همان زمان آغاز حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌وسیلهٔ آیزك نیوتن[3] و گوتفرید ویلهلم لایبنیتز[4] درقرن هفدهم پدیدآمده است، چنان‌که اینس آورده است:

> با وجود این،اطلاع مبهم ما از تولد وکودکی دانش معادلات دیفرانسیل به‌روز تاریخی یازدهم نوامبر ۱۶۷۵ تمرکز می‌یابد، دراین روز لایبنیتز برای اولین بار معادلهٔ
>
> $$\int y\,dy=\frac{1}{2}y^2$$
>
> راروی‌کاغذ نوشت،مقصود حل یك معادلهٔ دیفرانسیل ساده که‌خود حائزاهمیتی‌نبوده‌است نیست،آنچه دراین لحظهٔ بزرگ انجام شد، ابداع ابزار پرتوان علامت انتگرال بود.

گرچه نیوتن درنظریهٔ معادلات دیفرانسیل، به‌این عنوان، نسبتاً کارزیادی انجام نداده است، اما توسعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال وتوضیح اصول بنیادی مکانیك اساس گسترش وکاربردهای این نظریه را فراهم ساخت، این کار در قرن هیجدهم و بیش از همه به‌وسیلهٔ اویلر[5] انجام گرفت. نیوتن معادلات مرتبهٔ اول را طبق صورتهای $dy/dx=f(x)$، $dy/dx=f(y)$ و $dy/dx=f(x,y)$ طبقه‌بندی کرد. درمورد معادلهٔ اخیرهنگامی که $f(x,y)$ یك چندجمله‌ای از x و y است، روش حلی با استفاده از سری به‌دست داد. وی نسبت به‌انتقاد بسیار حساس بود و درنتیجه نسبت به‌انتشار بسیاری از اکتشافات خود سستی می‌کرد.

لایبنیتز، نتایج بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقلاً گرچه اندکی بعداز نیوتن، به‌دست آورد. علامت‌گذاریهای جدید که برای مشتق (dy/dx) و انتگرال به‌کار می‌بریم، از لایبنیتز می‌باشند. او روش جدا کردن متغیرها (بند ۲.۴) و روشهای حل معادلات همگن مرتبهٔ اول (بند ۲.۷) ومعادلات مرتبهٔ اول خطی (بند ۲.۱) را به‌دست آورد. وی مکاتبات پرباری را با ریاضیدانان دیگر به‌ویژه برادران برنولی[6] ادامه داد. درجریان این مکاتبات بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل در اواخر قرن هفدهم حل شدند.

---

1. Ince

۲. فهرست منابع درپایان هرفصل آمده است.

3. Isaac Newton (1642–1727)

4. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

5. Euler

6. Bernoulli

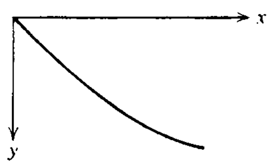
بعداز نیوتن و لایبنیتز نوبت بــه برادران برنولی می‌رسد، یاکوب[1]، و یوهان[2]، و دانیل[3] فرزند یوهان. اینان سه‌تن از هشت عضو خانوادهٔ برنولی‌اند که همه درعصر خود ریاضیدان و دانشمند برجسته‌ای بوده‌اند. با استفاده از حساب دیفرانسیل‌وانتگرال بسیاری از مسائل مکانیك را به‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل بیان‌کرده و حل نمودند. یکی از مسائلی (۱۶۹۶-۱۶۹۷) که هر دو برادر دربارهٔ آن به‌تحقیق پرداختند، و موجب برخورد زیادی بین آنها شد، مسئلهٔ خم با کوتاهترین زمان[4]، تعیین خم با سریعترین‌فرود است. در مسئلهٔ ۱۳، بند ۱۰.۲، خواهیم دیدکه این مسئله (شکل ۲.۱) به‌معادلهٔ مرتبهٔ اول غیرخطی

$$y[1+(y')^2]=c$$

که در آن c مقداری ثابت است منجر می‌شود. نیوتن نیز این مسئله را در ۱۶۹۷ حل کرد. روایت مشکوکی حاکی است که نیوتن این مسئله را (به عنوان مجادله) درعصر یك روز خسته‌کننده در ضرابخانه شنید، و همان شب بعداز شام‌آن را حل کرد. حل مسئله را بدون ذکر نام منتشر کرد، اما یوهان برنولی با دیدن‌آن با شگفتی فریاد برآورد: «من شیررا از پنجه‌اش می‌شناسم». معادلهٔ مشهوربرنولی درمکانیك سیالات ازدانیل است. در ۱۶۹۰ یاکوب برنولی حل معادلهٔ دیفرانسیلی راکه به‌صورت دیفرانسیلی $(b^2y^2-a^3)^{1/2}dy=a^{3/2}dx$ نوشته شده است منتشرکـرد. امـروز این یك تمرین ساده است، امـا در آن ایام معادلـهٔ $y'=[a^3/(b^2y^2-a^3)]^{1/2}$ را به صورت دیفرانسیلی درآوردن، وبیان آنکه انتگرال[5] دوطرف جز در مقدار ثابت اختلافی ندارند، گامی بــزرگ بود. چنان‌که، مثلاً، یوهان برنولی می‌دانست‌که $ax^p\,dx=d[ax^{p+1}/p+1]$ به‌ازای $p=-1$ بی‌معنی است،اما نمی‌دانست کــه $dx/x=d(\ln x)$. بـا وجود این توانست نشان دهــد کــه معادلـهٔ $dy/dx=y/ax$ (که می‌توان آن را با نوشتن به‌صورت

$$a\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

حل‌کرد) دارای جواب $y^a/x=c$ است، کــه درآن c مقدار ثابت انتگرال‌گیری است (بند ۴.۲).



شکل ۲.۱

1. Jakob (1654–1705) 2. Johann (1667–1748)
3. Daniel (1700–1782) 4. brachistochrone

۵. به‌نظر می‌رسدکه یاکوب برنولی، نخستین‌کسی است‌که اصطلاح انتگرال را به‌کاربرده‌است.

دراواخر قرن هفدهم بیشتر روشهای مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول (فصل ۲) شناخته شده بود، وتوجه بـه معادلات دیفـرانسیل معمولی مرتبهٔ بالاتـر، و معادلات بامشتقهای جزئی تمرکز یافته بود. ریاضیدان ایتالیایی، یاکوپو ریکاتی[1]، معادلاتی به صورت $f(y, y', y'')=0$ ، (مسئلهٔ ۲، بند ۱.۳) را درنظر گرفت. وی نیز معادلـهٔ غیرخطی مهمی را کـه بـه معادلـهٔ ریکاتی $dy/dx=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2$ معروف است، البته نه بدین‌کلیت، موردِ بررسی قرار داد (مسائل ۳۵ و ۳۶، بند ۸.۲).

لئونارد اویلر[2] یکی از بـزرگترین ریاضیدانان تمام ازمنه، نیز درقـرن هیجدهم می‌زیست. او ریـاضیدانی پربار بود، مجموعـهٔ آثار وی را درهفتاد مجلد جمع‌آوری کرده‌اند. با وجود آنکه درهفده سال آخر زندگی خودکور بود، تحقیقاتش را مانند سابق ادامه داد. موضوعی‌که دراینجا شایان توجـه خاص است، کار وی دربیان مسائل مکانیك به زبان ریاضی وبسط روشهـای حل این مسائل ریاضی است. لاگرانژ دربارهٔ اثر اویلر درمکانیك، گفته است «نخستین اثر بزرگی است‌که آنالیز را در دانش حرکت به‌کار گرفته است». اویلرمسائلی ازقبیل امکان تحویل معادلات مرتبهٔ دوم به‌معادلات مرتبهٔ اول با تعویض متغیرهای مناسب را بررسی کرده است. وی مفهوم عامل انتگرال ساز (بند ۶.۲) را معرفی کرد، روش عمومی بررسی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت (فصول ۳ و ۵) را در ۱۷۳۹ بـه دست داد، روش حل به وسیلهٔ سریهـای توانی (فصل ۴) را مورد پژوهش قرار داد، و روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل (بند ۲.۸) را ابداع کرد. وی همچنین تحقیقات مهمی دربارهٔ نظریـهٔ سری فوریه (فصل ۱۰) انجام داد، و بـرای نخستین‌بار نیز نظریهٔ حساب تغییرات را عرضه‌کرد.

بعداً درقرن هیجدهم ریاضیدان بزرگ فرانسوی ژوزف‌ـلویی لاگرانژ[3] وپیرـسیمون لاپلاس[4] تحقیقات مهمی دربارهٔ نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی نمودند، ونخستین بررسی علمی معادلات با مشتقهای جزئی را ارائه‌کردند. محتملاً مشهورترین معادلـهٔ با مشتقهای جزئی درفیزیك ریاضی معادلهٔ پتانسیل $u_{xx}+u_{yy}=0$ است، که درآن اندیسها نمایشگر مشتقهای جزئی‌اند، وبه معادلهٔ لاپلاس نیز معروف است. مکانیك تحلیلی اثر عظیم لاگرانژ حاوی معادلات عمومی حرکت یك دستگاه دینامیکی است، که امروز به معادلات لاگرانژ معروف‌اند. کتاب مکانیك سماوی لاپلاس‌که درپنج مجلد تدوین یافته است، عنوان «نیوتن فرانسه» را برای وی تحصیل‌کرد. آخرین مجلدات آن درسالهای ۱۷۸۹ تا ۱۸۲۵ انتشار یافت، وشامل تمام مکانیك آن عصر است. بینش لاگرانژ و لاپلاس در ریاضی در دوفلسفه خلاصه می‌شود. ازنظـر لاپلاس طبیعت اساسی و ذاتی است، و ریاضیات ابـزاری برای شناخت اسرار آن است، اما لاگرانژ ریاضیات را هنری می‌داندکه خود توجیه‌گر خویش

1. Jacopo Riccati (1676–1754)
2. Leonhard Euler (1707–1783)
3. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
4. Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

است. درهرصورت، این دو ریاضیدان پیشرفتهای پردامنه وگسترده‌ای را هم درنظریه وهم درکاربرد ریاضیات به وجود آوردند.

دانشجویی‌که به‌تاریخ ریاضیات (ومعادلات دیفرانسیل) علاقه‌مند باشد، می‌تواند به‌یکی ازکتابهای مربوط به‌گسترش ریاضیات‌که درپایان این فصل فهرست آنها را آورده‌ایم مراجعه‌کند.

درسالهای اخیر، بخشی ازکوشش ریاضیدانان در زمینه‌های معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتقهای جزئی به فراهم‌آوردن نظریه‌ای، عمومی، منتظم ومتقن اختصاص داشته است. هدف یافتن وبسط روشهای مناسب برای بررسی طبقات معادلات دیفرانسیل است، نه آنکه معادلات دیفرانسیل خاصی را حل‌کنیم.

این تاریخچهٔ‌کوتاه را با تبصره‌ای‌که برای دانشجویی‌که با نگرانی، وفور کاربرد اصطلاحات «واضح است‌که...» یا «به‌آسانی می‌توان نشان داد...» را درمتون ریاضی ملاحظه‌کرده است، می‌تواند خوش‌آیند باشد، پایان می‌دهیم. ناتانیل باودیچ[1] ریاضیدان ومنجم آمریکایی‌که در سالهای اوایل ۱۸۰۰ به ترجمهٔ مکانیك سماوی لاپلاس اشتغال داشته است، می‌گوید «هرگز به‌یکی از (کاملاً واضح است)های لاپلاس برنخوردم، مگر آنکه می‌دانستم ساعتها کار شاق درپیش دارم تا این شکاف را پرکرده واین وضوح کامل را بیابم وچگونگی روشنی آن را نشان دهم».

مسائل

۰۱ مرتبهٔ هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید ومعلوم‌کنید که‌کدامیك خطی است.

(الف) $$x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}+x\frac{dy}{dx}+۲y=\sin x$$

(ب) $$(۱+y^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲}+x\frac{dy}{dx}+y=e^x$$

(ج) $$\frac{d^۴y}{dx^۴}+\frac{d^۳y}{dx^۳}+\frac{d^۲y}{dx^۲}+\frac{dy}{dx}+y=۱$$

(د) $$\frac{dy}{dx}+xy^۲=۰$$

(ه) $$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\sin(x+y)=\sin x$$

---

1. Nathaniel Bowditch (1773–1838)

$$\frac{d^{3}y}{dx^{3}}+x\frac{dy}{dx}+(\cos^{2} x)y=x^{3}$$ (و)

۲. درهریك از حالتهای زیر تحقیق کنید که تابع یا توابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است.

(الف) $y''-y=0\ ;\ y_1(x)=e^{x},\ y_2(x)=\cosh x$

(ب) $y'''+2y'-3y=0;\ y_1(x)=e^{-3x},\ y_2(x)=e^{x}$

(ج) $y''''+4y'''+3y=x;\ y_1(x)=\frac{x}{3},\ y_2(x)=e^{-x}+\frac{x}{3}$

(د) $2x^{2}y''+3xy'-y=0,\ x>0;\ y_1(x)=x^{1/2},\ y_2(x)=x^{-1}$

(ه) $x^{2}y''+5xy'+4y=0,\ x>0;\ y_1(x)=x^{-2},\ y_2(x)=x^{-2}\ln x$

(و)

$$y''+y=\sec x,\ 0<x<\frac{\pi}{2};\ y=\phi(x)=(\cos x)\ln\cos x+x\sin x$$

(ز) $y'-2xy=1;\ y=\phi(x)=e^{x^{2}}\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt+e^{x^{2}}$

۳. تعیین کنید برای چه مقـادیری از r، هریك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی به‌صورت $y=e^{rx}$ است.

(الف) $y'+2y=0$ (ب) $y''-y=0$

(ج) $y''+y'-6y=0$ (د) $y'''-3y''+2y'=0$

۴. تعیین کنید برای چه مقـادیری از r، هر یك از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی به‌صورت $y=x^{r}$ به‌ازای $x>0$ است.

(الف) $x^{2}y''+4xy'+2y=0$ (ب) $x^{2}y''-4xy'+4y=0$

۵. مرتبهٔ یك معادله با مشتقهای جزئی عبارت است از بالاترین مرتبهٔ مشتق جزئی موجود درآن معادله، همچنین معادله را خطی گویند اگر برحسب تابع مربوطه و مشتقهای آن خطـی باشد. برای هـر یك از معادلات زیر مرتبه، و خطی یا غیرخطی بودن آن را تعیین کنید.

(الف) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ (ب) $\alpha^{2}u_{xx}=u_{t}$

(ج) $a^{2}u_{xx}=u_{tt}$ (د) $u_{xx}+u_{yy}+uu_{x}+uu_{y}+u=0$

(ه) $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$ (و) $u_{t}+uu_{x}=1+u_{xx}$

۶. درمورد هریك ازمعادلات با مشتقهای جزئی زیر تحقیق کنیدکه تابع یا توابع

داده شده جواب معادله است.

(الف)

$$u_{xx}+u_{yy}=0;\ u_1(x,y)=\cos x\cosh y,\ u_2(x,y)=\ln(x^2+y^2)$$

(ب) $$\alpha^2 u_{xx}=u_t;\ u_1(x,t)=e^{-\alpha^2 t}\sin x,\ u_2(x,t)=e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\sin\lambda x$$

λ عددی حقیقی است.

(ج) $$a^2 u_{xx}=u_{tt};\ u_1(x,t)=\sin\lambda x\sin\lambda at,\ u_2(x,t)=\sin(x-at)$$

λ عددی حقیقی است.

۷. درمورد هریك ازمعادلات با مشتقهای جزئی زیر تحقیق‌کنید که تابع داده شده جواب معادله است.

(الف) $$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0;\ u=\phi(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

(ب) $$\alpha^2 u_{xx}=u_t;\ u=\phi(x,t)=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2}e^{-x^2/4\alpha^2 t},\ t>0$$

(ج) $$a^2 u_{xx}=u_{tt};\ u=f(x-at)+g(x+at)$$

که درآن توابع f و g دارای مشتقهای مرتبهٔ اول و دوم‌اند.

مراجع

Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.

Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, Second Edition, Macmillan New York, 1919.

Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Third Edition, Holt, New York, 1964.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, Third Edition, Dover, New York, 1967.

۲

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

۱.۲ معادلات خطی

دراین فصل به‌بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌پردازیم، این معادلات به‌صورت

$$y' = f(x, y) \qquad (۱)$$

می‌باشند، که در آن f تابع مفروضی از دومتغیر است. هرتابع $y=\phi(x)$ را که خود و مشتقش درمعادلهٔ (۱) متحداً صدق کنند یك جواب می‌نامند، و هدف ما بررسی مسئلهٔ وجود این‌گونه توابع، و درصورت وجود طرز یافتن آنها است.

ساده‌ترین نوع معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول آن است که در آن f فقط به x بستگی داشته باشد. دراین‌حالت

$$y' = f(x) \qquad (۲)$$

و باید تابع $y=\phi(x)$ را طوری تعیین کرد که مشتق‌آن، تابع مفروض f باشد. ازحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌دانیم که ϕ تابع اولیهٔ f است، و می‌نویسیم

$$y = \phi(x) = \int^x f(t)dt + c \qquad (۳)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. مثلاً، اگر

$$y' = \sin ۲x$$

آنگاه

$$y = \phi(x) = -\frac{۱}{۲}\cos ۲x + c$$

درمعادلهٔ (۳) و به‌طور کلی‌دراین‌کتاب ازعلامت $\int^x f(t)\,dt$ برای نشان‌دادن‌تابع اولیهٔ تابع f استفاده می‌کنیم، یعنی $F(x) = \int^x f(t)\,dt$ نمایندهٔ خاصی است ازطبقهٔ توابعی‌که مشتق آنها برابر f است. عبارت $F(x)+c$ که در آن c ثابت دلخواهی است شامل همهٔ عضوهای این طبقه می‌باشد.

ما بیش ازاین‌درمعادلات به‌صورت (۲) بحث نمی‌کنیم وفقط به‌دونکته ازویژگیهای مهم معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول اشاره می‌کنیم. اول‌آنکه برای حذف مشتق y وبه‌دست آوردن خود y فقط به‌یك عمل انتگرال‌گیری نیاز داریم. دوم آنکه عبارتی‌که به‌عنوان جواب از عمل انتگرال‌گیری حاصل می‌شود شامل یك ثابت دلخواه است.

اکنون توجه‌خود را به‌معادلهٔ (۱) معطوف می‌کنیم. متأسفانه روش‌کلی‌رضایت‌بخشی برای تعیین جوابهای این معادله دردست نیست. درعوض روشهای متعددی را که هریك دربارهٔ طبقهٔ خاصی از معادلات به صورت (۱) قابل اجراست بیان می‌کنیم. نخست، به‌بررسی معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی

$$y' + p(x)y = g(x) \qquad (۴)$$

می‌پردازیم، که درآن p و g درفاصله‌ای مانند $\alpha < x < \beta$ توابعی پیوسته هستند. دراین بند روشهای حل معادلهٔ (۴) را بررسی‌می‌کنیم. مسائلی‌که بیشترجنبهٔ نظری دارند وبه‌طور کلی متضمن وجود ویکتایی جوابها می‌باشند دربند ۲.۲ مورد بحث قرار خواهندگرفت.

نخست معادلهٔ

$$y' + ay = ۰ \qquad (۵)$$

را که درآن a یك ثابت حقیقی است درنظر می‌گیریم. این معادله را می‌توان با جستجو حل‌کرد. باید یك تابع y پیداکردکه مشتق آن y' مساوی با $(-a)$ برابر خود y باشد. روشن است‌که، $y = e^{-ax}$ این خاصیت را دارد، و نتیجتاً درمعادلهٔ (۵) صدق می‌کند. علاوه براین

$$y = ce^{-ax} \qquad (۶)$$

که درآن c ثابت دلخواهی است نیز همین‌خاصیت را دارد. چون c دلخواه است، رابطهٔ (۶) بینهایت جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل (۵) به دست می‌دهد. طبعاً این سؤال پیش می‌آیدکه آیا برای معادلهٔ (۵) جوابهایی غیرازآنچه از رابطهٔ (۶) حاصل می‌شود وجود

دارد؟ در بند بعد نشان خواهیم داد که جوابهای دیگری وجود نـدارد، اما فعلاً این سؤال همچنان باقی است.

به‌تعبیر هندسی، رابطهٔ (۶) یك خانوادهٔ یك پارامتری از خمها را نمایش می‌دهد، که خمهای انتگرال معادلهٔ (۵) نامیده می‌شوند. درشکل ۱.۲ چند عضو این خانواده به ازای $a=۱$ نشان داده شده است. هرخم انتگرال نمایش هندسی جواب‌متناظر معادلهٔ دیفرانسیل است. مشخص‌کردن یك جواب خاص، با انتخاب یك خم انتگرال خاص از خانوادهٔ یك پارامتری مزبور، هم‌ارز است. غالباً مناسب است که این کار با تعیین یك نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ کـه خم‌انتگرال بـاید از آن بگذرد انجام شود، یعنی باید جواب $y=\phi(x)$ را طوری تعیین‌کرد که

$$\phi(x_\circ) = y_\circ.$$

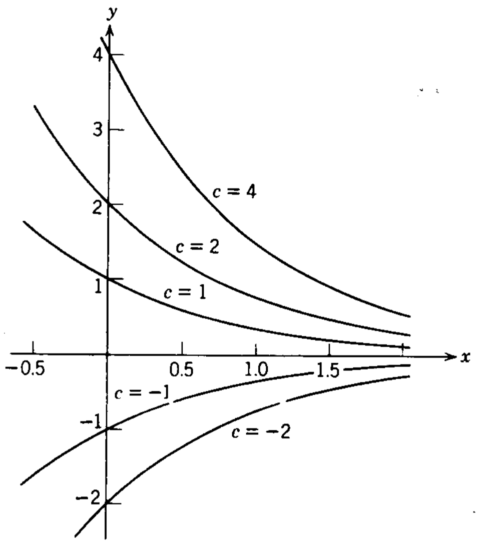
چنین شرطی را شرط اولیه می‌نامند. چون y همان $\phi(x)$ را نشان می‌دهد، ایـن شرط را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$y=y_\circ \quad \text{در} \quad x=x_\circ.$$

اما، درعمل متداول است که شرط اولیه به‌صورت

$$y(x_\circ)=y_\circ \tag{۷}$$

بیان شود، و مـا دراین‌کتاب معمولاً از همین نماد استفاده می‌کنیم. هر معادلهٔ دیفرانسیل



شکل ۱.۲

مرتبهٔ اول همراه با یك شرط اولیه، یك مسئلهٔ مقدار اولیه[1] را تشکیل می‌دهند.
مثلاً معادلهٔ دیفرانسیل (۵)

$$y'+ay=0\,,$$

و شرط اولیهٔ

$$y(0)=2\,, \tag{۸}$$

یك مسئلهٔ مقدار اولیه است. چنان‌که دربالا اشاره شد همهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۵) از رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آیند. برای پیداکردن جوابی که درشرط اولیهٔ (۸) صدق می‌کند، دررابطهٔ (۶)، $x=0$ و $y=2$ می‌گذاریم. آنگاه $c=2$ وجواب مطلوب عبارت است از

$$y=\phi(x)=2e^{-ax} \tag{۹}$$

این جواب یکتای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مفروض است. به‌طورکلیتر می‌توان نشان دادکه مسئلهٔ مقداراولیهٔ متشکل ازمعادلهٔ دیفرانسیل (۴) وشرط اولیهٔ (۷)، هرگاه ضرایب p و g توابع پیوسته‌ای باشند، دارای جوابی یکتاست. این مطلب دربند بعد مورد بحث قرار می‌گیرد.
اکنون معادلهٔ

$$y'+ay=g(x) \tag{۱۰}$$

را درنظرمی‌گیریم. اگر $a=0$، آنگاه طرف اول معادلهٔ (۱۰) درست مشتق y است، و جواب از رابطهٔ (۳) با قراردادن g به‌جای f به‌دست‌می‌آید. اگر $a\neq 0$، آنگاه طرف اول معادلهٔ (۱۰) ترکیبی از جمله‌هایی است‌که متضمن y و y' می‌باشند. باید دیدکه آیا می‌توان این جمله‌ها را با مشتق تابعی متحدگرفت. به‌عبارت دیگر، آیا می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx}+ay=\frac{d}{dx}(\quad)? \tag{۱۱}$$

اگرچنین باشد، آنگاه معادلهٔ (۱۰) به‌صورت

$$\frac{d}{dx}(\quad)=g(x)$$

درمی‌آید، و می‌توان فوراً آن را با انتگرال‌گیری از دوطرف حل کرد.
بررسی‌مجدد جواب (۶) معادلهٔ (۵) مارا به‌چگونگی عملی‌که بایدانجام‌داد هدایت می‌کند. اگر $y=ce^{-ax}$ را به‌صورت

---

۱. این اصطلاح ناشی از این نکته است‌که اغلب متغیرمستقل، زمان است، شرط اولیه وضعیت را در لحظهٔ ثابتی معین می‌کند، و جواب مسئلهٔ مقدار اولیه، آنچه را که بعداً واقع می‌شود بیان می‌کند.

$$ye^{ax}=c \qquad (۱۲)$$

بنویسیم، و از دوطرف رابطهٔ (۱۲) مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax})=0$$

یا

$$\frac{dy}{dx}e^{ax}+ae^{ax}y=e^{ax}\left(\frac{dy}{dx}+ay\right)=0$$

بدین‌سان، اگر معادلهٔ (۱۰) را در e^{ax} ضرب کنیم، آنگاه می‌توان طرف اول معادلهٔ حاصل را به‌صورت مشتق تابع ye^{ax} نوشت

$$\underbrace{e^{ax}y'+ae^{ax}y}=e^{ax}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y)=e^{ax}g(x) \qquad (۱۳)$$

از معادلهٔ (۱۳) می‌توان انتگرال گرفت، و به‌دست آورد

$$e^{ax}y=\int^{x}e^{at}g(t)\,dt+c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. بنابراین معادلهٔ (۱۰) دارای جواب زیر است

$$y=\phi(x)=e^{-ax}\int^{x}e^{at}g(t)\,dt+ce^{-ax} \qquad (۱۴)$$

بدین‌سان، هنگامی که تابع g داده شده باشد، مسئلهٔ تعیین جواب معادلهٔ (۱۰) به محاسبهٔ تابع اولیه‌ای که در رابطهٔ (۱۴) است می‌انجامد. دشواری این روش بستگی به g دارد، با وجود این، معادلهٔ (۱۴) فرمول صریحی برای جواب $y=\phi(x)$ به دست می‌دهد. اگر شرط اولیه‌ای مشخص شده باشد، ثابت c را می‌توان معین کرد.

مثال ۱. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را بیابید

$$y'+2y=e^{-x} \qquad (۱۵)$$

$$y(0)=3 \qquad (۱۶)$$

از مقایسهٔ معادلات (۱۵) و (۱۰)، دیده می‌شود که در این مسئله $a=2$. بدین‌سان، معادلهٔ (۱۵) را در e^{2x} ضرب می‌کنیم، و درنتیجه

$$e^{2x}y'+2e^{2x}y=e^{2x}e^{-x} \qquad (۱۷)$$

طرف اول معادلهٔ (۱۷) مشتق $e^{2x}y$ است، بنابراین می‌توان آن را به‌صورت

$$(e^{2x}y)'=e^{x} \tag{۱۸}$$

نوشت. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۸) به‌دست می‌آید

$$ye^{2x}=e^{x}+c$$

و بنابراین

$$y=e^{-x}+ce^{-2x} \tag{۱۹}$$

به‌ازای هرمقدار c یك جواب معادلهٔ (۱۵) است. بـرای برقراری شرط اولیهٔ (۱۶)، در معادلهٔ (۱۹)، $x=0$ و $y=3$ می‌گذاریم. از اینجا $c=2$ به دست می‌آید، وبدین‌ترتیب جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۵)، (۱۶) عبارت خواهد بود از

$$y=e^{-x}+2e^{-2x} \tag{۲۰}$$

اکنون برگردیم به‌معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول کلی (۴)

$$y'+p(x)y=g(x)$$

با روشی مشابه آنچه دربالا به‌کار رفت، باید تابع μ را طوری انتخاب‌کردکه اگرمعادلهٔ (۴) در $\mu(x)$ ضرب‌شود، آنگاه طرف اول‌آن به‌صورت مشتق[1] یك تابع $\mu(x)y$ درآید. یعنی، درصورت امکان می‌خواهیم μ را طوری انتخاب‌کنیم‌که

$$\begin{aligned}\mu(x)[y'+p(x)y]&=[\mu(x)y]'\\&=\mu(x)y'+\mu'(x)y.\end{aligned}$$

بدین‌سان $\mu(x)$ باید در

$$\mu(x)\,p(x)y=\mu'(x)y$$

صدق‌کند. موقتاً فرض‌کنیم‌که $\mu(x)>0$، خواهیم داشت

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=p(x)$$

چون $\mu'(x)/\mu(x)$ مشتق $\ln\mu(x)$ است، داریم

$$\ln\mu(x)=\int^{x}p(t)\,dt$$

---

۱. هرتابع μ که دارای این خاصیت باشد، عامل‌انتگرال‌سازنامیده می‌شود. دربند ۶.۲ بحث مشروحتری دربارهٔ عاملهای انتگرال‌ساز خواهیم داشت.

و بالاخره

$$\mu(x)=\exp\left[\int^x p(t)\,dt\right] \qquad (۲۱)$$

دیده می‌شود که $\mu(x)$ به‌صورتی که بـا رابطهٔ (۲۱) تعریف شده است، واقعاً مثبت است. علاوه براین، چون $\int^x p(t)\,dt$ فقط بـا تقریب یك ثابت جمعی دلخواه معین شده است، $\mu(x)$ نیز فقط با تقریب یك ثابت ضربی دلخواه معین خواهد شد.

اکنون چون معادلهٔ (۴) را در $\mu(x)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$[\mu(x)y]'=\mu(x)g(x)$$

بنابراین

$$\mu(x)y=\int^x \mu(s)g(s)\,ds+c$$

یا

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)\,ds+c\right] \qquad (۲۲)$$

که درآن $\mu(x)$ از رابطهٔ (۲۱) به‌دست می‌آید. رابطهٔ (۲۲) فرمول صریح جواب معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول کلی(۴) را که درآن p و g توابعی پیوسته‌اند بـه‌دست می‌دهد. دراینجا بـه‌دوبارانتگرال گیری نیاز داریم، یکی برای بـه‌دست آوردن $\mu(x)$ از رابطهٔ (۲۱)، و دیگری برای تعیین y از رابطهٔ (۲۲). از ثابت دلخواه c می‌توان بـرای برقراری شرط اولیه استفاده کرد.

دربارهٔ روشی که برای حل معادلهٔ (۴) بیان شد، دو نکتهٔ اضافی را باید مورد توجه قـرارداد. اولاً قبل از محاسبهٔ سازهٔ انتگرال کنندهٔ μ از رابطهٔ (۲۱)، لازم است اطمینان حاصل کرد که معادلهٔ دیفرانسیل دقیقاً به‌صورت (۴) باشد، به‌ویژه، ضریب y' باید برابر ۱ باشد. ثانیاً، پس‌از تعیین $\mu(x)$ وضرب درمعادلهٔ (۴) باید مطمئن شد که جمله‌های‌شامل y، حقیقتاً مشتق $\mu(x)y$ هستند. این خود آزمـونی از صحت محاسبهٔ μ است. البته، هنگامی که جواب y به‌دست آمد، می‌توان صحت محاسبات را نیز با جایگزین کردن آن درمعادلهٔ دیفرانسیل و شرط اولیه بررسی کرد.

مثال ۲. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیررا بیابید

$$y'-2xy=x\,,\quad y(0)=1 \qquad (۲۳)$$

برای این معادله تابع μ عبارت است از

$$\mu(x)=\exp\left(-\int^x 2t\,dt\right)=e^{-x^2}$$

پس

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

به‌طوری که

$$(e^{-x^2}y)' = xe^{-x^2}$$

بنابراین

$$ye^{-x^2} = \int^x te^{-t^2}\,dt + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

و بالاخره

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

برای برقراری شرط اولیهٔ $y(0) = 1$ باید c را برابر ۳/۲ اختیار کرد. پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مزبور چنین است

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2} \qquad (24)$$

مثال ۳. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را بیابید

$$y' - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1 \qquad (25)$$

مانند مثال پیش $\mu(x) = e^{-x^2}$، و

$$ye^{-x^2} = \int^x e^{-t^2}\,dt + c \qquad (26)$$

به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ c مناسب است حد پایین انتگرال‌گیری[1] را همان نقطهٔ اولیهٔ $x = 0$ انتخاب کنیم. آنگاه، با ضرب رابطهٔ (۲۶) در e^{x^2} خواهیم داشت

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}$$

شرط اولیه $y(0) = 1$ مستلزم آن است که $c = 1$، و از این‌رو

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} \qquad (27)$$

---

۱. انتخاب حد پایین انتگرال‌گیری در واقع اهمیتی ندارد، زیرا اختلاف بین $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$ و $\int_b^x e^{-t^2}\,dt$ فقط مقدار ثابتی است که می‌توان آن را با c جمع کرد.

جواب مسئلهٔ داده شده می‌باشد.

توجه‌شود که انتگرال تابع $e^{-t^{2}}$ درحل مثال ۳ را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی بیان کرد. از اینجا این نکته روشن می‌شود که ممکن است به ناچار جواب حتی یك مسئلهٔ بسیار ساده به‌صورت انتگرال باقی بماند. اما، تابع

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^{2}}\,dt \qquad (28)$$

که به تابع خطا مشهور است، به‌طور گسترده‌ای جدول‌بندی شده ومی‌توان آن را به‌عنوان یك تابع شناخته شده درنظر گرفت. بنابراین از نظرمحاسباتی، رابطهٔ (۲۷) عبارت کاملاً رضایت بخشی برای جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۵) است. در واقع این عبارت به اندازهٔ جواب $y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{x^{2}}$ مربوط به‌مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۳) رضایت بخش است. معمولاً برای محاسبهٔ $e^{x^{2}}$ به‌ازای مقدار مفروض x به جدول مراجعه می‌شود (یا از ماشین حساب الکترونیکی استفاده می‌شود)، و محاسبهٔ $erf(x)$ نیز با مراجعه به‌جدولی دیگر به‌همان سادگی به‌دست می‌آید.

شق دیگر، به‌کاربردن عبارت انتگرالی مانند رابطهٔ (۲۷) برای آغاز محاسبات عددی جواب مسئلهٔ مقدار اولیه است. به ازای هرمقدار داده شدهٔ x، انتگرال در رابطهٔ (۲۷)، یك انتگرال معین است، و می‌توان مقدار آن را با روشهای عددی مانند دستور سیمپسون، به‌دست آورد. با تکرار انتگرال‌گیری عددی به‌ازای مقادیر مختلف x می‌توان جدولی از مقادیر جواب y تشکیل داد. روشهای عددی دیگری نیز وجود داردکه در آنها برای محاسبهٔ مقادیر تقریبی جواب به ازای مجموعهٔ مفروضی از مقادیر x مستقیماً از خود معادلهٔ دیفرانسیل استفاده می‌شود، این روشها را درفصل ۸ مورد بحث قرارمی‌دهیم.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۶ معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

۱. $y'+3y=x+e^{-2x}$ ۲. $y'-2y=x^{2}e^{2x}$

۳. $y'+y=xe^{-x}+1$ ۴. $y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=3\cos 2x,\quad x>0$

۵. $y'-y=2e^{x}$ ۶. $xy'+2y=\sin x,\quad x>0$

درهریك از مسائل ۷ تا ۱۲ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را بیابید.

۷. $y'-y=2xe^{2x},\quad y(0)=1$

۸. $y'+2y=xe^{-2x},\quad y(1)=0$

۹. $y'+y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y(0)=0$

۱۰. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi)=0, \quad x>0$

۱۱. $y'-2y=e^{2x}, \quad y(0)=2$

۱۲. $xy'+2y=\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

۱۳. جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y-x}$$

راهنمایی: x را به‌جای y به‌عنوان تابع درنظر بگیرید.

۱۴. (الف) نشان دهیدکه $\phi(x)=e^{2x}$ یك جواب معادلهٔ

$$y'-2y=0$$

است، و $y=c\phi(x)$ نیز به‌ازای هرمقدار ثابت c جواب این معادله می‌باشد.

(ب) نشان دهیدکه $\phi(x)=1/x$ به‌ازای $x>0$ یك جواب معادلهٔ

$$y'+y^2=0$$

است، اما $y=c\phi(x)$ جواب این‌معادله نیست. توجه شودکه درقسمت (ب) معادله، خطی نیست، درصورتی‌که درقسمت (الف) معادله خطی است.

۱۵. نشان دهیدکه اگر $y=\phi(x)$ یك جواب معادلهٔ

$$y'+p(x)y=0$$

باشد، آنگاه $y=c\phi(x)$ نیز به‌ازای هرمقدار ثابت c جواب است.

۱۶. فرض‌کنیم $y=y_1(x)$ یك جواب معادلهٔ

$$y'+p(x)y=0 \qquad \text{(یك)}$$

و $y=y_2(x)$ یك جواب معادلهٔ

$$y'+p(x)y=g(x) \qquad \text{(دو)}$$

باشد. نشان دهیدکه $y=y_1(x)+y_2(x)$ نیز یك جواب معادلهٔ (دو) است.

۱۷. روش زیر را برای حل معادلهٔ خطی‌کلی مرتبهٔ اول

$$y'+p(x)y=g(x) \qquad \text{(یك)}$$

درنظر می‌گیریم.

(الف) اگر $g(x)$ متحد با صفر باشد، نشان دهیدکه جواب معادله عبارت است از

$$y=A\exp\left[-\int^{x}p(t)\,dt\right] \qquad \text{(دو)}$$

که درآن A ثابت است.

(ب) اگر $g(x)$ متحد با صفر نباشد، فرض می‌کنیم که جواب آن به‌صورت

$$y=A(x)\exp\left[-\int^{x}p(t)\,dt\right] \qquad \text{(سه)}$$

باشد، و A دراینجا تابعی از x است. در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده این مقدار را به‌جای y بگذارید و نشان دهیدکه $A(x)$ باید درشرط زیرصدق کند

$$A'(x)=g(x)\exp\left[\int^{x}p(t)\,dt\right] \qquad \text{(چهار)}$$

(ج) $A(x)$ را از معادلهٔ (چهار) بیابید. آنگاه آن را به‌جای $A(x)$ در رابطهٔ (سه) قرار دهید و y را تعیین کنید. تحقیق کنید جوابی‌که با این روش به‌دست آمده است با رابطهٔ (۲۲) درمتن مطابقت دارد. این روش به‌روش تغییر پارامترها موسوم است، و در بند ۲.۶.۳ درارتباط با معادلات خطی مرتبهٔ دوم‌دقیقاً مورد بحث قرار خواهدگرفت.

۱۸. با استفاده از روش مسئلهٔ ۱۷ هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

(الف) $y'-2y=x^2e^{2x}$ (ب) $y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=3\cos 2x,\ \ x>0$

۲۰۲ بحث دیگری از معادلات خطی

دربند ۱.۲ نشان دادیم‌که چگونه جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول را می‌توان ساخت. دراینجا به‌بررسی چند مسئله که بیشتر جنبهٔ نظری دارند می‌پردازیم. نخست قضیهٔ اساسی را بیان می‌کنیم، این قضیه شرایطی را که تحت آن مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مربوط به‌معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول دارای یك و فقط یك جواب است به‌دست می‌دهد. بقیهٔ این بند به‌بررسی برخی از نتایج این قضیه اختصاص یافته است.

قضیهٔ ۱.۲. اگرتوابع p و g روی فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ که حاوی نقطهٔ $x=x_0$ است پیوسته باشند، آنگاه تابع یکتایی مانند $y=\phi(x)$ وجود دارد که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'+p(x)y=g(x) \qquad (1)$$

به‌ازای $\alpha < x < \beta$ صدق می‌کند، و شرط اولیهٔ

$$y(x_\circ) = y_\circ \qquad (۲)$$

را که درآن $y_\circ$ مقدار اولیهٔ دلخواهی است که از پیش داده شده است برقرار می‌کند.

اثبات این قضیه اساساً درضمن بحث بند پیش‌که به فرمول

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)\,ds + c\right] \qquad (۳)$$

جواب عمومی معادله!

با

$$\mu(x) = \exp\int^x p(t)\,dt \qquad (۴)$$

انجامید، آمده است. اگر فرض‌کنیم‌که معادلهٔ (۱) دارای جوابی باشد، بررسی بند ۱.۲ نشان می‌دهدکه باید جواب مزبور به صورت (۳) باشد. دیده می‌شود که چون p به ازای $\alpha < x < \beta$ پیوسته است، در نتیجه μ در این فاصله تابعی معین، مشتق پذیر و مخالف صفر است. با این توجیه معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \qquad (۵)$$

نوشت. چون μ و g پیوسته‌اند، تابع μg دارای تابع اولیه است، و رابطهٔ (۳) از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود. فرضی‌که در اول کردیم، یعنی وجود حداقل یك جواب بـرای معادلهٔ (۱)، اکنون باگذاشتن عبارت y ازرابطهٔ (۳) درمعادلهٔ دیفرانسیل محقق‌می‌شود. سرانجام، شرط اولیهٔ (۲) مقدار c را به طور یکتا معین می‌کند، بدین‌سان اثبات کامل می‌شود. چون رابطهٔ (۳) شامل همهٔ جـوابهای معادلهٔ (۱) است، بـه طور معمول آن را جواب عمومی معادلهٔ (۱) می‌نامند.

باید جنبه‌های متعددی از قضیهٔ بالا مورد توجه قرارگیرد. نخست این قضیه مبین‌آن است که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده جوابی دارد و نیز مسئلهٔ مزبور فقط یك جواب دارد. به‌عبارت دیگر، قضیهٔ مزبور هم وجود و هم یکتایی مسئلهٔ مقداراولیهٔ (۱) و (۲) را نشان می‌دهد. دیگر آنـکه جـواب $y = \phi(x)$ تـابعی مشتق پـذیر است، و در واقـع چـون $y' = -p(x)y + g(x)$، مشتق $y' = \phi'(x)$ پیوسته است. بـالاخره، جواب مزبور در سراسر فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ که درآن ضرایب p و g پیوسته‌اند درمعادلهٔ دیفرانسیل (۱) صدق می‌کند. این بدان معنی است که اگر نقاطی یافت شوندکه p یا g درآنها ناپیوسته باشند، جواب مزبور فقط دراین نقاط ممکن است معتبر نباشد. بدین‌سان فقط بـا مشخص کردن نقاط ناپیوستگی p و g مقداری اطلاعات کیفی دربارهٔ جواب به‌دست می‌آید.

به‌عنوان مثال مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را درنظرمی‌گیریم

$$xy' + ۲y = ۴x^۲ \qquad (۶)$$

$$y(۱)=۲ \tag{۷}$$

مانند بند ۱.۲ عمل می‌کنیم، و معادلهٔ (۶) را به‌صورت

$$y'+\frac{۲}{x}y=۴x \tag{۸}$$

می‌نویسیم، و به‌جستجوی جوابی دریك فاصلهٔ حاوی $x=۱$ می‌پردازیم. چون ضرایب معادلهٔ (۸) بجز در $x=۰$ پیوسته‌اند، بنابرقضیهٔ ۱.۲ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده حداقل در فاصلهٔ $۰<x<\infty$ معتبر است. برای یافتن جواب، نخست $\mu(x)$ را حساب می‌کنیم

$$\mu(x)=\exp\left(\int^x \frac{۲}{t}\,dt\right)=e^{۲\ln x}$$
$$=x^۲ \tag{۹}$$

چون معادلهٔ (۸) را در $\mu(x)=x^۲$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$x^۲y'+۲xy=۴x^۳$$

یا

$$(x^۲y)'=۴x^۳$$

پس $x^۲y=x^۴+c$، و

$$y=x^۲+\frac{c}{x^۲} \tag{۱۰}$$

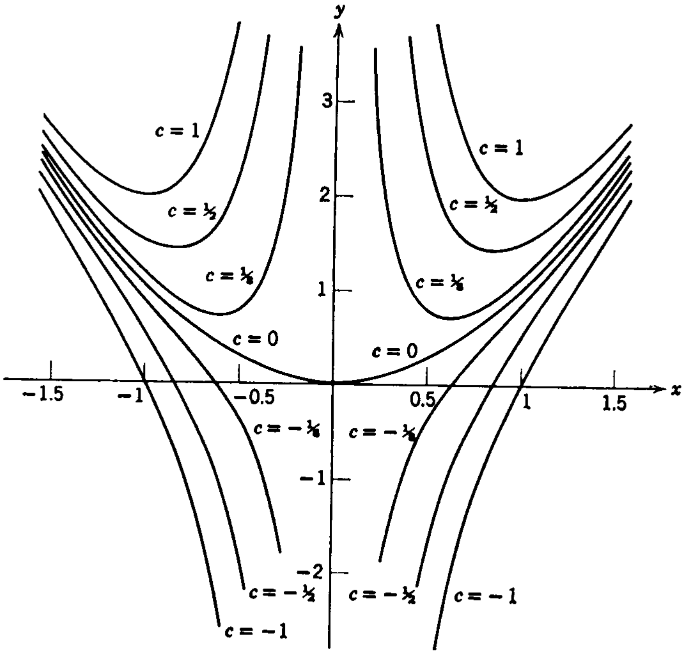
که در آن c دلخواه است، جواب عمومی معادلهٔ (۶) می‌باشد. خمهای انتگرال معادلهٔ (۶) به‌ازای چند مقدار c درشکل ۲.۲ رسم شده است. برای برقراری شرط اولیهٔ (۷)، لازم است که $c=۱$ باشد، بدین‌سان جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۶) و (۷) عبارت است از

$$y=x^۲+\frac{۱}{x^۲} \tag{۱۱}$$

دیده می‌شود که جواب (۱۱) هنگامی که $x\to ۰$، بی‌کران می‌شود. این چندان شگفت‌آور نیست، زیرا $x=۰$ نقطهٔ ناپیوستگی ضریب y درمعادلهٔ دیفرانسیل (۸) است. اما، اگر شرط اولیهٔ (۷) به‌صورت

$$y(۱)=۱ \tag{۱۲}$$

تغییرکند، آنگاه از رابطهٔ (۱۰) نتیجه می‌شود که $c=۰$. بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۶)، (۱۲)



شکل ۲۰۲

$$y = x^{۲} \tag{۱۳}$$

خواهد بود که وقتی $x \to ۰$ کاملا خوش‌رفتار است. این‌مثال نشان می‌دهد که قضیهٔ ۱۰۲ مدعی آن نیست که جواب مسئلهٔ مقدار اولیه حتماً باید درنقاط ناپیوستگی توابع p و g غیرعادی شود، بلکه قضیهٔ مزبور مبین آن است که جواب درنقاط دیگری نمی‌تواند غیر عادی گردد.

وضعیت جوابهای مسائل مقدار اولیه برای معادلات خطی مرتبهٔ اول در همسایگی نقاط ناپیوستگی p و g ازآنچه در بحث بالا به نظرمی‌رسد پیچیده‌تر است. بررسی نسبتاً مبسوطی ازاین امکانات درمسائل ۹ تا ۱۲ و ۱۵ به عمل‌آمده است، بحث مشروحتری در فصل ۴ در ارتباط با معادلات خطی مرتبهٔ دوم خواهد آمد.

گاهی، معادلات غیر خطی را می‌توان با تعویض متغیر به‌معادلهٔ خطی برگرداند و آن را حل کرد. نوعی از این معادلات به معادلهٔ برنولی مشهور است (مسائل ۱۶ و ۱۷ را ببینید).

مسائل

در هریك ازمسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را بیابید.

۰۱. $y' + (۱/x)y = \sin x, \quad x > ۰$

۰۲. $x^{۲}y' + ۳xy = (\sin x)/x, \quad x < ۰$

۳. $y'+(\operatorname{tg} x)\, y=x\sin ۲x\,, \quad -\pi/۲<x<\pi/۲$

۴. $xy'+۲y=e^{x}, \quad x>۰$

درهریك ازمسائل ۵ تا ۸ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را بیابید. فاصله‌ای را که درآن جواب معتبر است معین کنید.

۵. $xy'+۲y=x^{۲}-x+۱\,, \quad y(۱)=\frac{۱}{۲}$

۶. $xy'+y=e^{x}\,, \quad y(۱)=۱$

۷. $y'+(\operatorname{cotg} x)y=۲\csc x\,, \quad y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$

۸. $xy'+۲y=\sin x\,, \quad y(\pi)=\frac{۱}{\pi}$

درهریك از معادلات مسائل ۹ تا ۱۲ حداقل یك ضریب در $x=۰$ ناپیوسته است. هر معادله را به ازای $x>۰$ حل کنید و وضعیت جواب را هنگامی‌که $x\to ۰$ به ازای مقادیر مختلف ثابت انتگرال‌گیری بررسی‌کنید. چند عضو ازخانوادهٔ خمهای انتگرال را رسم کنید.

۹. $y'+\left(\frac{۲}{x}\right)y=\frac{۱}{x^{۲}}$ ۱۰. $y'-\left(\frac{۱}{x}\right)y=x$

۱۱. $y'-\left(\frac{۱}{x}\right)y=x^{۱/۲}$ ۱۲. $y'+\left(\frac{۱}{x}\right)y=\frac{(\cos x)}{x}$

۱۳. (الف) نشان دهید‌که جواب (۳)ی معادلهٔ خطی‌کلی (۱) را می‌توان به‌صورت

$$y=cy_{۱}(x)+y_{۲}(x) \qquad \text{(یك)}$$

نوشت.که درآن c ثابت دلخواهی است. توابع $y_{۱}$ و $y_{۲}$ را مشخص‌کنید.

(ب) نشان دهید‌که $y_{۱}$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'+p(x)\,y=۰ \qquad \text{(دو)}$$

است‌که متناظر به $g(x)=۰$ می‌باشد.

(ج) نشان دهید‌که $y_{۲}$ جواب معادلهٔ خطی‌کامل (۱) است. بعداً خواهیم دید (مثلا، دربند ۶.۳)که جوابهای معادلات خطی مرتبهٔ بالاتر نیز طرحی مشابه رابطهٔ (یك) دارند.

۱۴. نشان دهید‌که اگر a و λ ثابتهای مثبت، و b عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه هرجواب معادلهٔ

$$y'+ay=be^{-\lambda x}$$

دارای این خاصیت است که $y \to 0$ هنگامی که $x \to \infty$.
راهنمایی: حالتهای $a = \lambda$ و $a \neq \lambda$ را جداگانه بررسی کنید.

۱۵. ضرایب ناپیوسته. گاهی درمعادلات دیفرانسیل خطی توابع p و g و یا یکی ازآنها دارای ناپیوستگی جهشی است. اگر x_0 چنین نقطهٔ ناپیوستگیی باشد، آنگاه لازم است که معادله به ازای $x < x_0$ و به ازای $x > x_0$ جداگانه حل‌شود. سپس باید دو جواب را طوری به‌هم پیوند داد که y در x_0 پیوسته شود، این‌کار با انتخاب مناسب ثابتهای دلخواه انجام می‌گیرد. دو مسئلهٔ زیر این وضعیت را روشن می‌کند. درهرحالت به این نکته توجه شود که نمی‌توان y' را نیز در x_0 پیوسته‌ساخت.

(الف) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y' + 2y = g(x), \qquad y(0) = 0$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

(ب) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیررا حل کنید

$$y' + p(x)y = 0, \qquad y(0) = 1$$

که در آن

$$p(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

***معادلات برنولی.** گاهی می‌توان معادلهٔ غیرخطی را با تعویض تابع به معادلهٔ خطی برگرداند. مهمترین طبقهٔ این‌گونه معادلات به صورت

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$$

است، این‌معادلات رامعادلات برنولی می‌نامند(منسوب به‌یاکوب برنولی ۱۶۵۴–۱۷۰۵). درمسائل ۱۶ و ۱۷ این نوع معادلات بررسی می‌شود.

۱۶. (الف) معادلهٔ برنولی را به ازای $n = 0$ و $n = 1$ حل کنید.

(ب) نشان دهیدکه اگر $n \neq 0, 1$، آنگاه باگرفتن $v = y^{1-n}$ معادلهٔ برنولی به معادلهٔ خطی بدل می‌شود. این روش حل را لایبنیتز در ۱۶۹۶ یافته است.

۱۷. با استفاده ازروش مسئلهٔ ۱۶، قسمت (ب) هر‌یك از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

(ب) $y' = \epsilon y - \sigma y^2; \qquad \epsilon > 0, \quad \sigma > 0$

(ج) $y' = \epsilon y - \sigma y^3; \qquad \epsilon > 0, \quad \sigma > 0$

$$y' = \epsilon y - f(x) y^3; \qquad \epsilon > 0 \tag{د}$$

تبصره: معادلهٔ (ب) در بررسی دینامیك جمعیت دارای اهمیت است. معادلهٔ (ج) ، وتعمیم آن (د)، درپایداری ئیدرودینامیکی به کار مـی‌رود. معادلات (ب) و (ج) را نیز می‌توان با روشهای بند ۴.۲ حل کـرد. برای بحث بیشتر دربارهٔ معادلـهٔ (ب) مسئلهٔ ۱۹، بند ۴.۲، مسئلهٔ ۱۱، بند ۹.۲ وبند ۱.۹.را ببینید.

۳.۲ معادلات غیر خطی

در اینجا به بررسی معادلات دیفرانسیلی به صورت

$$y' = f(x, y) \tag{۱}$$

مقید به شرط اولیهٔ

$$y(x_0) = y_0 \tag{۲}$$

می‌پردازیم. معادلهٔ دیفرانسیل (۱) وشرط اولیهٔ (۲) با هم تشکیل یـك مسئلهٔ مقدار اولیه می‌دهند. سؤالات اساسی که باید مورد توجه قرار گیرند عبارتند ازاینکه‌آیا جوابی برای این مسئلهٔ مقدار اولیه وجود دارد؟ آیا چنین جوابی یکتاست؟ جواب درچه فاصله‌ای معین است، وچگونه می‌توان فرمول مناسبی برای جواب ساخت؟ به همهٔ ایـن سؤالات در بند ۱.۲ و ۲.۲ در حالتی کـه معادلهٔ (۱) خطی است بـه‌آسانی پاسخ داده شد. اما، اگر f نسبت به متغیر وابستهٔ y تابعی خطی نباشد، بررسی پیش دیگر به‌کار نمی‌آید. دراین بند چند نوع ازمسائل مقدار اولیهٔ غیرخطی را بـه روشی‌کلی مورد بحث قرار می‌دهیم. بـه ویژه، تفاوتهای مهم متعددی را بین مسئلهٔ غیرخطـی (۱) و (۲) ومسئلهٔ خطـی متشکل از معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + p(x) y = g(x) \tag{۳}$$

وشرط اولیهٔ (۲) مورد توجه قرار خواهیم داد.

علت آنکه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول نسبتاً ساده‌ترند این است‌که فرمولی وجود داردکه جواب چنین معادله‌ای رادرهمهٔ حالتها به دست می‌دهد. برعکس، برای‌حل معادلات غیرخطی مرتبهٔ اول یك چنین روش کلی وجود ندارد. در واقـع، تعیین جـواب $y = \phi(x)$ برای معادلهٔ غیرخطی به روش تحلیلی معمولا دشوار واغلب غیرممکن است.

فقدان روش‌کلی برای جواب معادلهٔ غیر خطی حداقل دارای دو نتیجهٔ مهم است. اول‌آنکه، روشهای تقریب جواب، مانند روش عددی، و اطلاعات کیفی دربـارهٔ جوابها درمعادلات غیرخطی اهمیت‌بیشتری ازمورد معادلات خطی پیدا می‌کنند. مقدمه‌ای بر برخی از این روشها درفصول (۸) و (۹)آمده است. دوم آنکه، برای بررسی سؤالات وجـود ویکتایی جواب باید ازروشهای غیرمستقیم استفاده‌کرد، زیرا عموماً نمی‌توان مستقیماً بـه ساختن جواب پرداخت.

وجود و یکتایی. قضیهٔ اساسی وجود و یکتایی زیرین نظیر قضیهٔ ۱.۲ مربوط به معادلات خطی است. اما، اثبات آن بسیار پیچیده‌تر است، و آن را به بند ۱۱.۲ موکول می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۲. فرض‌کنیم توابع f و $\partial f/\partial y$ درمستطیل $\alpha < x < \beta$، $\gamma < y < \delta$ که حاوی نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ است پیوسته باشند. آنگاه، دریك فاصلهٔ $x_\circ - h < x < x_\circ + h$ مشمول در $\alpha < x < \beta$ یك جواب یکتای $y = \phi(x)$ برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱)،(۲)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_\circ) = y_\circ$$

وجود دارد.

شرایطی که درقضیهٔ ۲.۲ بیان شد برای تضمین وجود و یکتایی جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) ، (۲) دریك فاصله $x_\circ - h < x < x_\circ + h$ کافی است. اما، امکان دارد که تعیین مقدار h دشوار باشد. علاوه براین امکان دارد که حتی اگر f درفرضهای قضیه صدق نکند، بازهم یك جواب یکتا وجود داشته باشد. درواقع، اگر به جای فرض پیوستگی $\partial f/\partial y$ شرایطی ضعیفتر بگذاریم، نتیجهٔ قضیه همچنان برقرارمی‌ماند. به علاوه، می‌توان وجود جواب (اما نه یکتایی آن) راتنها براساس پیوستگی f بدون هیچ گونه فرض اضافی اثبات کرد. اما، صورت فعلی قضیه برای اکثر مقاصد رضایت‌بخش است.

با مثالهایی می‌توان نشان‌داد که برای به دست آوردن نتایج مذکور درقضیه، برخی شرایط مربوط به f ضروری هستند. مثلاً، درمثال زیر می‌بینیم که اگر فرضهای قضیهٔ ۲.۲ نقض شود، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) ، (۲) می‌تواند دارای بیش ازیك جواب باشد.

مثال۱. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را به ازای $x \geqslant \circ$ بیابید

$$y' = y^{1/3}, \quad y(\circ) = \circ \qquad (۴)$$

این مسئله را می‌توان به‌آسانی با روش بند ۴.۲ حل کرد. اما دیده می‌شود که تابع

$$y = \phi(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geqslant \circ$$

در روابط (۴) صدق می‌کند. ازطرف دیگر، تابع

$$y = \psi(x) = \circ$$

نیز یك جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مزبور است. بنابراین مسئله دارای جواب یکتا نیست. این نکته، قضیهٔ وجود و یکتایی را نقض نمی‌کند، زیرا

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{1/3}\right) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

و این تابع درهرنقطه‌ای که y آن صفر باشد، پیوسته وحتی معین نیست. بنابراین قضیه را

در ناحیه‌ای که شامل بخشی از محور x باشد نمی‌توان به‌کار برد. اما به ازای هر نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ که برمحور x واقع نباشد، معادلهٔ دیفرانسیل $y' = y^{1/3}$ دارای جوابی یکتاست که از $(x_\circ , y_\circ)$ می‌گذرد.

فاصلهٔ تعریف. جواب مسئلهٔ خطی (۲) ؛ (۳) . درسراسر هر فاصلهٔ حول $x = x_\circ$ که در آن توابع p و g پیوسته باشند وجود دارد. ازسوی دیگر، برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ غیرخطی (۱) ، (۲) ممکن است به دشواری بتوان فاصله‌ای را که در آن جوابی وجود دارد تعیین کرد. مادامی‌که نقطهٔ $[x , \phi(x)]$ درناحیه‌ای واقع باشدکه در آن فرضهای قضیه برقرارند جواب $y = \phi(x)$ وجود خواهد داشت، اما چون معمولاً $\phi(x)$ دردست نیست، امکان داردکه تشخیص وضع نقطهٔ $[x , \phi(x)]$ نسبت به‌این ناحیه غیرممکن باشد. به هرحال، ممکن است فاصله‌ای که در آن جوابی وجود دارد، ارتباط ساده‌ای با تابع f معادلهٔ (۱) نداشته باشد. مثال زیر این مطلب را روشن می‌کند.

مثال۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$y' = y^{۲} , \quad y(\circ) = ۱ \tag{۵}$$

به آسانی با جایگزینی مستقیم می‌توان تحقیق کرد که تابع

$$y = \frac{۱}{۱ - x} \tag{۶}$$

جواب‌این مسئلهٔ مقدار اولیه است. روشن‌است که این جواب هنگامی‌که $x \to ۱$ بی‌کران می‌شود، وفقط به‌ازای $-\infty < x < ۱$ معتبر خواهد بود. اما درخود معادلهٔ دیفرانسیل نشانه‌ای وجود نداردکه بر اهمیت نقطهٔ $x = ۱$ دلالت کند. علاوه براین، اگر به جای شرط اولیه قراردهیم

$$y(\circ) = ۲ \tag{۷}$$

باز به‌آسانی می‌توان تحقیق کردکه جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۵) که در شرط اولیهٔ (۷) صدق کند، عبارت است از

$$y = \frac{۲}{۱ - ۲x} \tag{۸}$$

و این جواب هنگامی‌که $x \to ۱/۲$ بی‌کران‌می‌شود. این مثال دشواری دیگری ازمسائل مقدار اولیهٔ معادلات غیرخطی را نشان می‌دهد، بدین معنی که، امکان دارد نقاط غیر عادی جواب برحسب شرط اولیه تغییر کنند.

جواب عمومی. معادلات خطی وغیر خطی از جنبهٔ دیگری نیز تفاوت دارند که مربوط به مفهوم جواب عمومی است. برای معادلهٔ مرتبهٔ اول‌می‌توان جوابی یافت که‌شامل یك ثابت دلخواه باشد، و از آن همهٔ جوابهای ممکن با مشخص کردن مقادیر این ثابت

به‌دست می‌آیند. دربارهٔ معادلات غیرخطی ممکن است وضع چنین نباشد؛ حتی اگر بتوان جوابی شامل یك ثابت دلخواه پیداکرد، ممکن است جوابهایی وجود داشته باشند که نتوان آنها را به ازای هیچ مقداری از این ثابت به دست‌آورد. دراین باره مثالهایی در مسائل ۳ و ۶ می‌آوریم. بنابراین واژهٔ «جواب عمومی» را فقط در بحث معادلات خطی به‌کار خواهیم برد.

جوابهای ضمنی. بار دیگر یادآوری می‌کنیم که معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول دارای فرمول صریح[رابطهٔ (۲۲)، بند۲.۱] برای جواب $y=\phi(x)$ می‌باشد. مادامی که‌توابع اولیهٔ لازم را بتوان به دست‌آورد، در هرنقطه مقدار جواب را می‌توان تنها با گذاشتن مقدار مناسب x درفرمول مزبور به دست‌آورد. برای معادلهٔ غیرخطی به ندرت می‌توان چنین جواب صریحی پیداکرد. دربیشتر موارد حداکثر می‌توان مشتق موجود درمعادلهٔ(۱) را حذف کرد و به جای معادلهٔ دیفرانسیل، معادله‌ای فاقد مشتق به‌صورت

$$\psi[x, \phi(x)]=0 \tag{۹}$$

به دست‌آوردکه همه، یا برخی ازجوابهای $y=\phi(x)$ معادلهٔ (۱) درآن صدق می‌کنند. در حالتهای بسیاری از معادلات غیرخطی حتی همین‌کاررا هم نمی‌توان انجام داد. اما، هنگامی که بتوان رابطه‌ای مانند رابطهٔ (۹) بـه دست آورد، معمولاً، آن را فرمول ضمنی جواب معادلهٔ (۱)می‌گویند. هررابطهٔ به صورت (۹) رانیز یك انتگرال (یا انتگرال‌اول) معادلهٔ (۱) می‌نامند.

به عنوان مثال، معادلهٔ غیر خطی سادهٔ

$$y'=-\frac{x}{y} \tag{۱۰}$$

را درنظرمی‌گیریم. با استفاده از روشهای بند بعد، به‌آسانی می‌توان نشان داد کـه تمام جوابهای معادلهٔ (۱۰) درمعادلهٔ جبری

$$x^2+y^2=c^2 \tag{۱۱}$$

که درآن c ثابت دلخواهی است نیزصدق می‌کنند. برای‌تحقیق صحت این گزاره می‌توان ازمعادلهٔ(۱۱) نسبت به x مشتق گرفت وبه‌دست‌آورد $2x+2yy'=0$، یا $y'=-x/y$ که همان معادلهٔ (۱۰) می‌باشد. بنا براین معادلهٔ (۱۱) یك فرمول ضمنی برای جـوابهای معادلهٔ (۱۰) است. به‌ازای $x^2 \leqslant c^2$ ، توابع $y=\phi(x)$ بسیاری وجودداردکه درمعادلهٔ (۱۱) صدق می‌کنند. برخی ازآنها به قرار زیر است

$$y=\phi_1(x)=\sqrt{c^2-x^2} \qquad -c\leqslant x\leqslant c \tag{۱۲}$$

$$y=\phi_2(x)=-\sqrt{c^2-x^2} \qquad -c\leqslant x\leqslant c \tag{۱۳}$$

$$y=\phi_{۳}(x)=\begin{cases}\sqrt{c^{۲}-x^{۲}} & -c\leqslant x\leqslant ۰\\ -\sqrt{c^{۲}-x^{۲}} & ۰<x\leqslant c\end{cases} \qquad (۱۴)$$

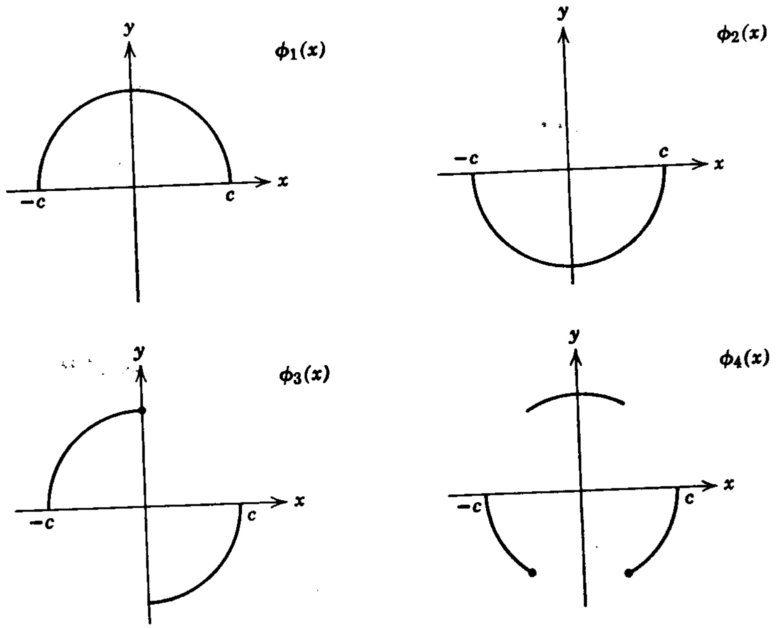
$$y=\phi_{۴}(x)=\begin{cases}-\sqrt{c^{۲}-x^{۲}} & -c\leqslant x\leqslant -c/۲\\ \sqrt{c^{۲}-x^{۲}} & -c/۲<x<c/۲\\ -\sqrt{c^{۲}-x^{۲}} & c/۲\leqslant x\leqslant c\end{cases} \qquad (۱۵)$$

درشکل ۳.۲ نمودار توابع (۱۲) تا (۱۵) را ببینید. اما، از آنها فقط دوتابع، یعنی، توابع (۱۲) و (۱۳) درتمام فاصلهٔ $-c<x<c$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰) صدق می کند. اگر شرط اولیه‌ای نیز داده شده باشد، آنگاه باید هرکدام از توابع $\phi_{۱}$ و $\phi_{۲}$ را که در شرط مزبور صدق می کند وهمچنین مقدار بخصوص c را انتخاب کنیم. مثلا، اگر شرط اولیه عبارت باشد از

$$y(۰)=۳ \qquad (۱۶)$$

آنگاه باید $\phi_{۲}$ راکنارگذاشت، و $\phi_{۱}$ را حفظ نمود ومقدار c را برابر ۳ انتخاب کرد. بنابراین

$$y=\sqrt{۹-x^{۲}},\quad -۳<x<۳ \qquad (۱۷)$$



شکل ۳.۲

يك جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۰) و (۱۶) است. بنا بر قضیهٔ ۲.۲ این مسئله روی فاصلهٔ $۳ > x > ۳-$ جواب دیگری ندارد.

درمثال پیش، به‌علت آنکه رابطهٔ ضمنی (۱۱) نسبت به y ازدرجهٔ دوم بود، جوابهای صریح (۱۲) و (۱۳) به‌آسانی به‌دست آمد. اما، با کمی تأمل دیده می‌شود که رابطهٔ ضمنی (۹)، به‌فرضی که بتوان آن‌را پیداکرد اغلب پیچیده‌تر ازمعادلهٔ (۱۱) است. دراین‌صورت، احتمالاً حل آن (به‌طور تحلیلی) نسبت به y غیر ممکن خواهد بود، وحتی تعیین فواصلی که جوابها در آن وجود دارند ممکن است بسیار دشوار باشد. علاوه براین باید به‌خاطر سپرد که ممکن است جوابهایی از رابطهٔ ضمنی (۹) درمعادلهٔ دیفرانسیل صدق نکنند، و نیز در برخی ازحالتها ممکن است معادلهٔ دیفرانسیل جوابهایی داشته باشد که در رابطهٔ ضمنی مزبور صدق نکنند.

ساختن خمهای انتگرال به‌روش ترسیمی. چون روشی کلی برای به‌دست آوردن جوابهای تحلیلی دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود ندارد ممکن است روشهایی که جوابهای تقریبی یا اطلاعات کیفی دیگری دربارهٔ جوابها به‌دست می‌دهند دارای اهمیت بسیاری باشند. یکی ازاین روشها مبتنی بر تقریب ترسیمی خمهای انتگرال است. درهر نقطه ازصفحهٔ xy که در آن $f(x, y)$ معین باشد، معادلهٔ دیفرانسیل (۱)

$$y' = f(x, y)$$

مقداری برای y' به‌دست می‌دهد، که می‌توان آن را به‌عنوان شیب قطعه خطی که از این نقطه می‌گذرد درنظر گرفت. همهٔ این قطعه خطها به‌طور کلی يك میدان امتدادی برای معادلهٔ دیفرانسیل مزبور تشکیل می‌دهند. خمهای انتگرال عبارتند از خمهایی که درهر نقطه به‌عنصری از میدان امتدادی که به‌آن نقطه وابسته است مماس باشند.

شکل کلی يك خم انتگرال را می‌توان گاهی با رسم عناصر میدان امتدادی درتعداد زیادی نقاط، مجسم کرد. به‌عنوان مثال، معادلهٔ سادهٔ

$$y' = ۴y(۱ - y) \tag{۱۸}$$

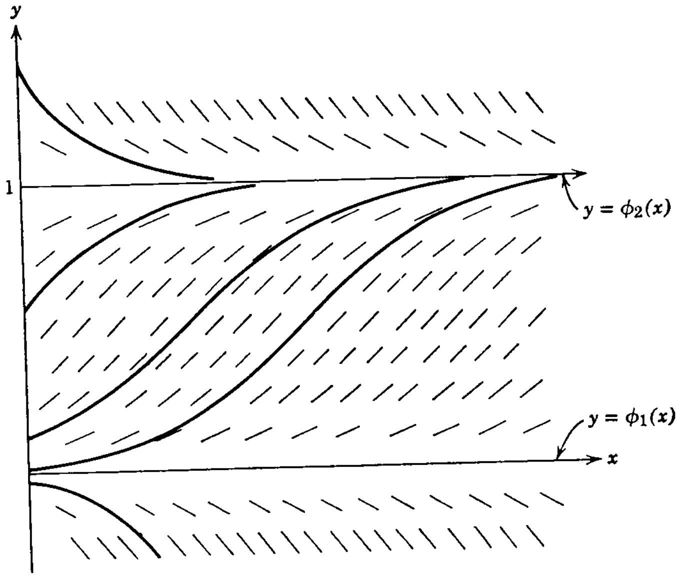
را که درعین حال نوع مهمی از معادلات غیرخطی است درنظر می‌گیریم. ساختن میدان امتدادی، با توجه به‌اینکه طرف دوم معادلهٔ (۱۸) مستقل از x است بسیار ساده می‌شود. بنابراین، عناصر میدان امتدادی در همهٔ نقاط هرخط موازی محور x خود متوازی‌اند. علاوه براین، با جستجو می‌توان برای معادلهٔ (۱۸) دو جواب خصوصی، یعنی جوابهای ثابت $y = \phi_۱(x) = ۰$ و $y = \phi_۲(x) = ۱$ را به‌دست آورد. این جوابهای خصوصی صفحهٔ xy را به‌سه منطقه تقسیم می‌کنند، که درهريك ازآنها y' دارای علامت ثابتی است. در واقع

اگر $y < ۰$، آنگاه $y' < ۰$

اگر $۰ < y < ۱$، آنگاه $y' > ۰$

$$y' < 0 \text{ آنگاه } , y > 1 \qquad \text{اگر}$$

با استفاده از این اطلاعات بـه‌آسانی می‌توان شکل ۴.۲ را کـه نمایشگر میدان امتدادی معادلهٔ (۱۸) است رسم کرد.



شکل ۴.۲

از این طرح بـه‌آسانی می‌توان برخی از خواص کیفی جوابها را استنباط کـرد. نخست، جواب متناظر بەشرط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$ با $1 > y_0 > 0$ را درنظر می‌گیریم. چنین جوابی صعودی است، زیرا درمجاورت نقطهٔ اولیه داریم $y' > 0$. اما، این‌جواب نمی‌تواند از $y = 1$ فراتر رود، زیرا اگر به $y = 1$ برسد، شیب‌آن صفر می‌شود (وصفر باقی می‌ماند). در واقع، جواب مزبور نمی‌تواند به‌ازای هیچ مقدار متناهی x به $y = 1$ برسد، زیرا اگر برسد، از این نقطه بـه‌عنوان نقطهٔ اولیه دو جواب خواهد گذشت [یکی جواب مورد بحث ودیگری جواب $y = \phi_2(x) = 1$] واین با قضیهٔ ۲.۲ درتناقض است. بدین ترتیب هر جوابی‌کـه نقطـهٔ آغاز آن در فاصلهٔ $1 > y > 0$ باشد، هنگامی کـه $x \to \infty$ به $y = 1$ میل می‌کند. به‌همین طریق هرجوابی‌که نقطهٔ آغازآن بالای $y = 1$ باشد، نزولی است و هنگامی‌که $x \to \infty$ به $y = 1$ میل می‌کند. بالاخره، هرجوابی‌کـه نقطهٔ آغاز آن در زیر $y = 0$ باشد بازهم تنزل می‌کند وسرانجام به $-\infty$ میل می‌کند.

معادلهٔ (۱۸) را با روش مذکور دربند ۴.۲، یا تشخیص‌آن به‌عنوان معادلهٔ برنولی (مسائل ۱۶ و ۱۷، بند ۲.۲) می‌توان حل‌کرد. در شکل ۴.۲ چند جواب رسم شده است.

اما، تأکید می‌شود که رفتار کیفی جوابهای معادلهٔ (۱۸) بدون حل آن تعیین شده است. موضوعاتی که در اینجا مطرح شد، با مفاهیم پایداری و ناپایداری جوابهای معادلات دیفرانسیل ارتباط دارند، و در فصل (۹) مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل

۱. برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر، ناحیه‌ای از صفحهٔ xy را بیابیدکه در هرنقطهٔ آن وجود ویکتایی جواب، بنابرقضیهٔ اساسی وجود ویکتایی تضمین می‌شود.

(الف) $y'=\dfrac{x-y}{۲x+۵y}$ (ب) $y'=(۱-x^{۲}-y^{۲})^{۱/۲}$

(ج) $y'=۲xy/(۱+y^{۲})$ (د) $y'=۳(x+y)^{-۲}$

(ه) $y'=\dfrac{\ln|xy|}{۱-x^{۲}+y^{۲}}$ (و) $y'=(x^{۲}+y^{۲})^{۳/۲}$

۲. نشان دهیدکه $y=\phi(x)=(۱-x^{۲})^{-۱}$ یك جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=۲xy^{۲},\quad y(۰)=۱$$

است. درچه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟

۳. نشان دهیدکه $y=\phi(x)=[۲(x+c)]^{-۱/۲}$ که درآن c یك ثابت دلخواه است، در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'+y^{۳}=۰$$

صدق می‌کند. جوابی راکه در شرط اولیهٔ $y(۱)=۲$ صدق می‌کند بیابید. درچه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟ توجه شودکه $y=۰$ نیز یك جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است، اما آن را نمی‌توان از $y=\phi(x)$ به‌ازای مقداری از c به‌دست آورد.

۴. تحقیق کنید که

$$y=\phi(x)=\left[۱+\frac{۲}{۳}\ln(۱+x^{۳})\right]^{۱/۲}$$

یك جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=\frac{x^{۲}}{y(۱+x^{۳})},\quad y(۰)=۱$$

می‌باشد. درچه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟

۵. تحقیق کنید که

$$y=(c^{۲}-۴x^{۲})^{۱/۲},\quad y=-(c^{۲}-۴x^{۲})^{۱/۲}$$

جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = -۴x/y$$

می‌باشند. در چه بخشهایی از صفحهٔ xy این جوابها معتبرند؟ جوابهای خصوصی متناظر به‌نقاط (۴ ، ۰) و (۱− ، ۱) را بیابید.

۶. (الف) تحقیق کنید که $y_1(x) = ۱ - x$ و $y_2(x) = -x^۲/۴$ هر دوجوابهای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = \frac{-x + (x^۲ + ۴y)^{۱/۲}}{۲}, \quad y(۲) = -۱$$

می‌باشند. درچه فواصلی این جوابها معتبرند؟

(ب) توضیح دهید که چرا وجود دوجواب برای مسئلهٔ مزبور با بخش یکتایی قضیهٔ ۲.۲ درتناقض نیست.

(ج) نشان‌دهید که $y = cx + c^۲$ که‌درآن c ثابت دلخواهی‌است‌به‌ازای $x \geqslant -۲c$ درمعادلـهٔ دیفرانسیل قسمت (الف) صدق می‌کند. اگر $c = -۱$ ، شرط اولیه نیز برقرار است، و همان جواب $y = y_1(x)$ بـه‌دست می‌آید. نشان دهید کـه نمی‌توان مقدار c را طوری انتخاب کرد که جواب دوم، $y = y_2(x)$ به‌دست آید.

۷. برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر، میدان امتدادی را طوری بسازید، کـه بتوان رفتار عمومی خانوادهٔ خمهای انتگرال را به‌خوبی تجسم کرد.

(الف) $y' = x^۲ + y^۲$ (ب) $y' = x^۲ - xy + y^۲ - ۱$

(ج) $y' = \dfrac{xy}{۱ + x^۲}$ (د) $y' = \dfrac{۲x - ۳y}{x + y}$

۸. برای هریك از معادلات دیفرانسیل زیر، با درنظر گرفتن میدان امتدادی الگوی کلی خمهای‌انتگرال را معین‌کنید. فرض‌کنیم $y = \phi(x, y_0)$ جواب متناظر به‌شرط اولیهٔ $y(0) = y_0$ باشد. $\lim_{x \to \infty} \phi(x, y_0)$ به‌ازای چه مقادیری از y_0 متناهی است؟ این حد را درهریك از حالتهای مزبور حساب‌کنید.

(الف) $y' = -y(۱ + y^۲)$ (ب) $y' = y(۱ - y^۲)$

(ج) $y' = (۱ - y)(۲ - y)$ (د) $y' = \epsilon y - \sigma y^۲ \quad \sigma > 0, \epsilon > 0$

درهریك از مسائل ۹ تا ۱۲:

(الف) طرح اجمالی میدان امتدادی را رسم‌کنید.

(ب) چند عضوخانوادهٔ خمهای انتگرال رابدون حل معادلهٔ دیفرانسیل رسم‌کنید.

(ج) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را حل‌کنید.

(د) جوابی را کـه در (ج) بـه‌دست آورده‌اید رسم کنید، و آن را با آنچه در

(ب) یافتید مقایسه کنید.

۹. $y' = -۱\ ,\ y(۱) = ۲$ ۱۰. $y' = x + ۱\ ,\ y(\circ) = ۱$

۱۱. $y' + xy = ۱\ ,\ y(۱) = \circ$ ۱۲. $y' - y = ۱ - e^x\ ,\ y(\circ) = \circ$

۴.۲ معادلات جدایی پذیر

اغلب مناسبتر است که معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = f(x\ ,\ y) \qquad (۱)$$

را به‌صورت زیر بنویسیم

$$M(x\ ,\ y) + N(x\ ,\ y)\frac{dy}{dx} = \circ \qquad (۲)$$

این عمل را می‌توان همواره با قراردادن $M(x\ ,\ y) = -f(x\ ,\ y)$ و $N(x\ ,\ y) = ۱$ انجام داد، اما امکان دارد راههای دیگری نیز وجود داشته باشد. در حالتی که M فقط تابع x و N فقط تابع y باشد، آنگاه معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = \circ \qquad (۳)$$

مثلاً، معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^۲}{۱ + y^۲}$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$-x^۲ + (۱ + y^۲)\frac{dy}{dx} = \circ$$

هر معادلهٔ دیفرانسیلی راکه بتوان به‌صورت (۳) نوشت، جدایی پذیر می‌گویند؛ علت این نامگذاری، با نوشتن معادلهٔ (۳) به‌صورت دیفرانسیلی

$$M(x)dx = -N(y)dy \qquad (۴)$$

روشن می‌شود. اکنون فرض کنیم که توابع $H_۱$ و $H_۲$ به‌گونه‌ای باشند که

$$H_۱'(x) = M(x)\ ,\quad H_۲'(y) = N(y) \qquad (۵)$$

آنگاه معادلهٔ (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$H'_1(x)+H'_2(y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{۶}$$

اگر $y=\phi(x)$ تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، آنگاه طبق قاعدهٔ زنجیری داریم

$$H'_2(y)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}H_2[\phi(x)] \tag{۷}$$

درنتیجه. اگر $y=\phi(x)$ جوابی ازمعادلهٔ دیفرانسیل (۳) باشد، آنگاه معادلهٔ (۶) به‌صورت

$$H'_1(x)+\frac{d}{dx}H_2[\phi(x)]=0$$

یا

$$\frac{d}{dx}\{H_1(x)+H_2[\phi(x)]\}=0 \tag{۸}$$

نوشته می‌شود. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۸) به‌دست می‌آید

$$H_1(x)+H_2[\phi(x)]=c \tag{۹}$$

یا

$$H_1(x)+H_2(y)=c \tag{۱۰}$$

که درآن c ثابت دلخواهی‌است. بدین‌سان برای معادلهٔ دیفرانسیل(۳) جواب $y=\phi(x)$ به‌صورت ضمنی (۱۰) به‌دست آمده است. توابع H_1 و H_2 عبارتند از توابعی‌که در معادلات (۵) صدق کنند، یعنی به‌ترتیب توابع اولیهٔ M و N باشند. درعمل جواب (۱۰) معمولاً ازمعادلهٔ (۴) با انتگرال‌گیری ازطرف اول نسبت به x وازطرف دوم نسبت به y به‌دست می‌آید، استدلال بالا این عمل را توجیه می‌کند.

اگر علاوه برمعادلهٔ دیفرانسیل، شرط اولیهٔ

$$y(x_0)=y_0 \tag{۱۱}$$

داده شده باشد، برای تعیین جواب معادلهٔ (۳)که در این شرط صدق‌کند، در معادلهٔ (۱۰) قرار می‌دهیم $x=x_0$ و $y=y_0$. از آنجا

$$c=H_1(x_0)+H_2(y_0) \tag{۱۲}$$

با گذاشتن این مقدار c درمعادلهٔ (۱۰)، وتوجه به‌رابطه‌های

$$H_1(x)-H_1(x_0)=\int_{x_0}^{x}M(t)\,dt\ ,\quad H_2(y)-H_2(y_0)=\int_{y_0}^{y}N(t)dt$$

به‌دست می‌آید

$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt+\int_{y_0}^{y} N(t)\,dt=0 \qquad (۱۳)$$

معادلهٔ (۱۳) جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۳) راکه در شرط اولیهٔ (۱۱) نیز صدق می‌کند، به‌طور ضمنی نمایش می‌دهد. خواننده باید به‌خاطر بسپارد که تعیین جواب به‌صورت صریح، یا حتی تعیین دقیق فاصله‌ای که در آن جواب وجود دارد، عموماً مستلزم آن است که معادلهٔ (۱۳) را نسبت به y به‌عنوان تابعی از x حل کنیم. این عمل ممکن است دشواریهای بزرگی در برداشته باشد.

مثال ۱. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)},\quad y(0)=-1 \qquad (۱۴)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به‌صورت

$$2(y-1)\,dy=(3x^2+4x+2)\,dx$$

نوشت. چون از طرف اول نسبت به y و از طرف دوم نسبت به x انتگرال بگیریم به‌دست می‌آید

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c \qquad (۱۵)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. برای تعیین جوابی که در شرط اولیهٔ مزبور صدق کند، درمعادلهٔ (۱۵) قرار می‌دهیم $x=0$ و $y=-1$، از آنجا $c=3$. بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۴) به‌صورت ضمنی

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+3 \qquad (۱۶)$$

داده می‌شود. برای آنکه جواب را به‌صورت صریح به‌دست آوریم، باید ازمعادلهٔ (۱۶)، y را برحسب x به‌دست آورد. این عمل را دراینجا به‌آسانی می‌توان انجام داد، زیرا معادلهٔ (۱۶) نسبت به y از درجهٔ دوم است، و داریم

$$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \qquad (۱۷)$$

بدین‌سان رابطهٔ (۱۷) برای معادلهٔ دیفرانسیل مزبور دوجواب به‌دست می‌دهد، که فقط یکی از آنها در شرط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند. این جواب متناظر به‌علامت منفی در رابطهٔ (۱۷) است. پس بالاخره جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۴) عبارت است از

$$y=\phi(x)=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \qquad (۱۸)$$

توجه شود کـه اگر اشتباهاً در رابطهٔ (۱۷) علامت مثبت را انتخاب کنیم، دراین صورت برای همان معادلهٔ دیفرانسیل جوابی به‌دست می‌آید که در شرط اولیهٔ $y(0)=3$ صدق

می‌کند. بالاخره، برای تعیین فاصله‌ای که در آن جواب (۱۸) معتبر است، باید به‌تعیین فاصله‌ای که در آن مقدار زیر رادیکال مثبت است بپردازیم. با ترسیم این عبارت به‌عنوان تابعی از x، خواننده می‌تواند نشان دهدکه فاصلهٔ مطلوب $x > -۲$ است.

مثال ۲. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x}{۱+۲y^۲},\quad y(۰)=۱ \tag{۱۹}$$

نخست معادلهٔ دیفرانسیل را به‌صورت

$$\frac{۱+۲y^۲}{y}\,dy=\cos x\,dx \tag{۲۰}$$

می‌نویسیم وچون ازطرف اول نسبت به y و ازطرف دوم نسبت به x انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\ln|y|+y^۲=\sin x+c \tag{۲۱}$$

برای برقراری شرط اولیه، مقادیر $x=۰$ و $y=۱$ را درمعادلهٔ (۲۱) جایگزین می‌کنیم، $c=۱$ به دست می‌آید. ازاین‌رو جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۹) به‌طور ضمنی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\ln|y|+y^۲=\sin x+۱ \tag{۲۲}$$

چون نمی‌توان y را از رابطهٔ (۲۲) به صورت تابع صریحی از x به دست‌آورد، تحلیل بیشتر این مسئله دشوارتر می‌گردد. نکته‌ای‌که به خوبی روشن است این است‌که هیچ جوابی محور x را قطع نمی‌کند، یعنی نقطه‌ای‌که مختص y آن صفر باشد و در رابطهٔ (۲۲) صدق‌کند وجود ندارد. برای درك این مطلب، توجه شودکه طرف اول رابطهٔ (۲۲) به ازای $y=۰$ بینهایت می‌شود، درحالی‌که طرف دوم هیچگاه بینهایت نمی‌شود، ازاین‌رو هیچ نقطه‌ای ازمحور x در رابطهٔ (۲۲) صدق نمی‌کند. بدین‌سان، نتیجه می‌شودکه برای جواب معادلات (۱۹) همواره $y > ۰$ است. درنتیجه، می‌توان برای این مسئله ازعلامت قدرمطلق در رابطهٔ (۲۲) صرف‌نظر کرد. همچنین می‌توان نشان داد که فاصلهٔ تعریف جواب مسئلهٔ مقداراولیهٔ (۱۹) تمام محور x، $-\infty < x < \infty$ می‌باشد. درمسئلهٔ ۲۰ طرز اثبات آن را می‌بینیم.

درمثال ۱ تعیین y به عنوان تابعی صریح از x ومشخص‌کردن دقیق فاصله‌ای‌که جواب مزبور درآن وجود دارد دشوار نبود. اما، این یك وضعیت استثنایی است، واغلب لازم می‌آیدکه جواب را به همان صورت ضمنی مانند مثال ۲ رها کنیم. بدین‌ترتیب، در مسائل این بند وبندهای ۵.۲ تا ۸.۲، اصطلاح «معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل‌کنید» بدان

معنی است کـه اگر دشوار نباشد جواب را به صورت صریحی به دست آوریم، و درغیر این‌صورت یك فرمول ضمنی برای جواب بیابیم.

مسائل

هریك‌ازمعادلات مسائل ۱ تا ۸ را حل کنید. نواحی صفحهٔ xy راکه درآنها شرایط قضیهٔ اساسی وجود ویکتایی برقرارند بیابید.

۱. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y}$

۲. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$

۳. $y'+y^2\sin x=0$

۴. $y'=1+x+y^2+xy^2$

۵. $y'=(\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

۶. $xy'=(1-y^2)^{1/2}$

۷. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$

۸. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{1+y^2}$

جواب هریك ازمسائل مقدار اولیهٔ ۹ تا ۱۴ را بـه صورت صریح بیابید، وفاصلهٔ تعریف جواب را (حداقل به طور تقریب) تعیین کنید.

۹. $\sin 2x\,dx+\cos 3y\,dy=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

۱۰. $x\,dx+ye^{-x}\,dy=0, \quad y(0)=1$

۱۱. $\dfrac{dr}{d\theta}=r, \quad r(0)=2$

۱۲. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{y+x^2y}, \quad y(0)=-2$

۱۳. $\dfrac{dy}{dx}=xy^3(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0)=1$

۱۴. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{1+2y}, \quad y(2)=0$

۱۵. معادلهٔ زیر را درفاصلهٔ $-1<x<1$ حل کنید

$$y^2(1-x^2)^{1/2}\,dy=\sin^{-1}x\,dx$$

۱۶. معادلهٔ زیر راکه درآن a، b، c و d مقادیر ثابت‌اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+b}{cy+d}$$

۰۱۷ معادلهٔ زیر را که در آن a، b، c و d مقادیر ثابت‌اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay+b}{cy+d}$$

۰۱۸* نشان دهید که معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{x-y}$$

جدایی‌پذیر نیست؛ اما اگر به جای y متغیر جدید v را که با رابطهٔ $v=y/x$ تعریف شده‌است بگذاریم، آنگاه معادله نسبت به x و v جدایی‌پذیر است. جواب معادلهٔ داده شده را با این روش بیابید.

۰۱۹ (الف) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y'=\epsilon y$ ، $y(0)=y_0$ را که در آن ϵ ثابت مثبتی است حل کنید. نشان دهید که حد جواب $y=\phi(x)$ هنگامی که $x\to\infty$ دارای وضعیت زیر است

$$\lim_{x\to\infty}\phi(x)=\infty \quad \text{اگر}\ y_0>0\ ،$$

$$\lim_{x\to\infty}\phi(x)=0 \quad \text{اگر}\ y_0=0\ ،$$

$$\lim_{x\to\infty}\phi(x)=-\infty \quad \text{اگر}\ y_0<0\ ،$$

(ب) اکنون فرض کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل را با افزودن جملهٔ $-\sigma y^2$ که در آن σ عدد مثبت (کوچك) است تغییر دهیم. با استفاده از تجزیه به‌کسرهای ساده مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y'=\epsilon y-\sigma y^2,\quad y(0)=y_0$$

نشان دهید که دراینجا حد $y=\phi(x)$ ، هنگامی‌که $x\to\infty$ ، دارای وضعیت زیر است

$$\lim_{x\to\infty}\phi(x)=\frac{\epsilon}{\sigma} \quad \text{اگر}\ y_0>0\ ،$$

$$\lim_{x\to\infty}\phi(x)=0 \quad \text{اگر}\ y_0=0\ ،$$

نشان دهید که اگر $y_0<0$ ، آنگاه هنگامی که x به یك مقدار متناهی که به y_0 بستگی دارد می‌گراید، $\phi(x)$ بی‌کران می‌شود. معادلهٔ غیرخطی قسمت (ب) درکاربردهای بسیاری دارای اهمیت است (بندهای ۹.۲ و ۱۰.۹ را ببینید). توجه شود که این معادله یك معادلهٔ برنولی است، ومی‌توان آن را با روش مسئلهٔ ۱۶ دربند ۲.۲ حل کرد.

۰۲۰* مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۹) مثال ۲ را دوباره درنظر می‌گیریم. طرف دوم معادلهٔ دیفرانسیل را با $f(x,y)$ نشان می‌دهیم، ومشاهده می‌کنیم که

$$|f(x,y)|=\left|\frac{y}{1+2y^2}\right||\cos x|$$

(الف) با پیدا کردن مقادیر ماکزیمم و مینیمم $y/(1+2y^2)$، نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر y داریم

$$\left|\frac{y}{1+2y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و بنابراین به‌ازای همهٔ مقادیر x و y خواهیم داشت $|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(ب) با به‌کار بردن نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید که فاصلهٔ تعریف جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۹) عبارت است از $-\infty<x<\infty$.

۵.۲ معادلات کامل

نخست معادلهٔ

$$\psi(x,y)=c \tag{۱}$$

را که در آن c مقدار ثابتی است درنظر می‌گیریم. با فرض اینکه معادلهٔ (۱)، y را به‌طور ضمنی به‌عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x معین می‌کند، از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم به دست می‌آید[1]

$$\psi_x(x,y)+\psi_y(x,y)y'=0 \tag{۲}$$

معادلهٔ (۲) معادلهٔ دیفرانسیلی است که جواب آن به وسیلهٔ معادلهٔ (۱) معین می‌شود. برعکس. معادلهٔ دیفرانسیل

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0 \tag{۳}$$

را درنظر می‌گیریم. اگر بتوان تابع ψ را طوری تعیین کرد که

$$\psi_x(x,y)=M(x,y),\quad \psi_y(x,y)=N(x,y) \tag{۴}$$

و $\psi(x,y)=c$ به طور ضمنی $y=\phi(x)$ را به‌عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x معین کند، آنگاه

$$\begin{aligned}M(x,y)+N(x,y)y'&=\psi_x(x,y)+\psi_y(x,y)y'\\&=\frac{d}{dx}\psi[x,\phi(x)]\end{aligned} \tag{۵}$$

۱. اندیسها مشتقهای جزئی نسبت به‌آن متغیر را نشان می‌دهند.

درنتیجه معادلهٔ (۳) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d}{dx}\psi[x\,,\,\phi(x)]=0 \qquad (۶)$$

دراین حالت معادلهٔ (۳) را معادلهٔ دیفرانسیل کامل می گویند. جواب معادلهٔ (۳)، یا معادلهٔ هم‌ارز آن (۶)، به صورت ضمنی با معادلهٔ (۱)

$$\psi(x\,,\,y)=c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است معین می گردد.

درعمل معادلهٔ دیفرانسیل (۳) را اغلب به‌صورت متقارن دیفرانسیلی زیر می نویسند

$$M(x\,,\,y)dx+N(x\,,\,y)dy=0 \qquad (۷)$$

مثال ۱. معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}=0$$

با جستجو می توان دید که طرف اول، مشتق x^2y^3 است. بدین‌سان معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3)=0$$

وجواب به صورت ضمنی $x^2y^3=c$ و صریح $y=kx^{-2/3}$ به دست می آید.

دراین مثال ساده تشخیص آنکه معادلهٔ دیفرانسیل مزبور کامل است آسان بود، درواقع با توجه به‌اینکه طرف اول مشتق x^2y^3 است جواب به‌آسانی بدست آمد. امکان دارد که درمورد معادلات پیچیده‌تر نتوان به این طریق عمل کرد. قضیهٔ زیر روش منظمی برای تشخیص کامل بودن یك معادلهٔ دیفرانسیل را فراهم می‌سازد.

قضیهٔ ۲.۳. فرض کنیم توابع M ، N ، M_y و N_x در ناحیهٔ مستطیلی[1] $R: \alpha<x<\beta\,,\,\gamma<y<\delta$ پیوسته باشند. آنگاه معادلهٔ (۳)

$$M(x\,,\,y)+N(x\,,\,y)y'=0$$

در R یك معادلهٔ دیفرانسیل کامل است اگر وفقط اگر

$$M_y(x\,,\,y)=N_x(x\,,\,y) \qquad (۸)$$

درهرنقطهٔ R برقرار باشد. یعنی، شرط لازم وکافی برای وجود یك تابع ψ که درمعادلات (۴)

---

۱. ضرورتی ندارد که ناحیهٔ R مستطیلی باشد، بلکه تنها باید همبستهٔ ساده باشد. برای بحث درمعنای این اصطلاح مسئلهٔ ۱۶ را ببینید.

$$\psi_x(x, y)=M(x, y), \quad \psi_y(x, y)=N(x, y)$$

صدق کند، آن است که معادلهٔ (۸) به ازای M و N برقرار باشد.

اثبات این قضیه شامل دوقسمت است. نخست نشان می‌دهیم که اگر یک تابع ψ وجود داشته باشد به طوری که معادلات (۴) برقرار باشند، آنگاه معادلهٔ (۸) نیز برقرار است. با محاسبهٔ M_y و N_x ازمعادلات (۴) داریم

$$M_y(x, y)=\psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y)=\psi_{yx}(x, y) \qquad (۹)$$

چون M_y و N_x پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که ψ_{xy} و ψ_{yx} نیز پیوسته می‌باشند، بنابراین متساویند[1] ومعادلهٔ (۸) برقرار می‌گردد.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر M و N درمعادلهٔ (۸) صدق کنند، آنگاه معادلهٔ (۳) کامل است. برای اثبات یک تابع ψ که درمعادلات (۴)

$$\psi_x(x, y)=M(x, y), \quad \psi_y(x, y)=N(x, y)$$

صدق کند می‌سازیم. با انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ اول (۴) نسبت به x، با فرض ثابت بودن y، به دست می‌آید

$$\psi(x, y)=\int^x M(t, y)\,dt+h(y) \qquad (۱۰)$$

h تابع دلخواهی از y است، ونقش مقدار ثابت دلخواه را ایفا می‌کند. اکنون باید نشان دهیم که می‌توان همواره $h(y)$ را طوری انتخاب کرد که $\psi_y=N$. ازمعادلهٔ (۱۰) داریم

$$\psi_y(x, y)=\frac{\partial}{\partial y}\int^x M(t, y)\,dt+h'(y)$$

$$=\int^x M_y(t, y)\,dt+h'(y)$$

با قراردادن $\psi_y=N$ و استخراج $h'(y)$ خواهیم داشت

$$h'(y)=N(x, y)-\int^x M_y(t, y)\,dt \qquad (۱۱)$$

برای آنکه بتوان $h(y)$ را ازمعادلهٔ (۱۱) تعیین کرد، ضروری است که طرف دوم معادله، علیرغم ظاهرش، فقط تابع y باشد. برای اثبات این مطلب می‌توان از آن نسبت به x مشتق گرفت و به دست آورد

$$N_x(x, y)-M_y(x, y)$$

---

۱. فرض پیوستگی ضروری است، زیرا درغیر این صورت ψ_{xy} و ψ_{yx} همواره مساوی نیستند. موارد استثنا توابع بخصوصی می‌باشند که بندرت به آنها برمی‌خوریم.

که با توجه بـه معادلهٔ (۸) صفر است. بنابراین برخلاف شکل ظاهری آن، طـرف دوم معادلهٔ (۱۱) در واقع به x بستگی ندارد، و با یك انتگرال‌گیری $h(y)$ به دست می‌آید. چون $h(y)$ را درمعادلهٔ (۱۰) بگذاریم، جواب معادلات (۴) به صورت

$$\psi(x\,,\,y)=\int^{x} M(t\,,\,y)\,dt+\int^{y}\left[N(x\,,\,s)-\int^{x} M_{s}(t\,,\,s)\ dt\right]ds \quad (۱۲)$$

به دست می‌آید.

باید توجه داشت‌که این‌اثبات شامل روشی برای محاسبهٔ $\psi(x\,,\,y)$ و درنتیجه حل معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۳) می‌باشد. معمولاً بهتر است به جای اینکه‌کوشش‌کنیم معادلهٔ (۱۲) را به خاطر بسپاریم، درهرمـورد مستقیماً این روش را به‌کار گیریم. همچنین بایـد توجه داشت‌که جواب به‌صورت ضمنی به‌دست آمده است. مانند بند پیش امکان داردکـه بتوان ویا نتوان جواب را به صورت صریح به دست آورد.

مثال ۲. معادلهٔ زیر را حل‌کنید

$$(y\cos x+۲xe^{y})+(\sin x+x^{۲}e^{y}+۲)y'=۰ \quad (۱۳)$$

روشن است‌که

$$M_{y}(x\,,\,y)=\cos x+۲xe^{y}=N_{x}(x\,,\,y)$$

ومعادلهٔ داده شده کامل است. بنابراین تابع $\psi(x\,,\,y)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\psi_{x}(x\,,\,y)=y\cos x+۲xe^{y}$$

$$\psi_{y}(x\,,\,y)=\sin x+x^{۲}e^{y}+۲$$

با انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ اول خواهیم داشت

$$\psi(x\,,\,y)=y\sin x+x^{۲}e^{y}+h(y) \quad (۱۴)$$

از $\psi_{y}=N$ به دست می‌آید

$$\psi_{y}(x\,,\,y)=\sin x+x^{۲}e^{y}+h'(y)=\sin x+x^{۲}e^{y}+۲$$

پس

$$h'(y)=۲$$

و

$$h(y)=۲y$$

دراینجا می‌توان ثابت انتگرال‌گیری را حذف‌کرد، زیرا هرجواب این معادلهٔ دیفرانسیل برای منظور ما کافی است، ونیازی به عامترین جواب آن نیست. باگذاشتن عبارت $h(y)$ درمعادلهٔ (۱۴) خواهیم داشت

$$\psi(x\,,\,y)=y\sin x+x^{۲}e^{y}+۲y$$

بنابراین جواب معادلهٔ اصلی به صورت ضمنی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$y\sin x+x^{۲}e^{y}+۲y=c \qquad (۱۵)$$

مثال ۳. معادلهٔ زیر را حل کنید

$$(۳x^{۲}+۲xy)+(x+y^{۲})y'=۰ \qquad (۱۶)$$

در اینجا

$$M_y(x\,,\,y)=۲x\,,\quad N_x(x\,,\,y)=۱$$

وچون $M_y \neq N_x$، معادلهٔ داده شده کامل نیست. برای آنکه ببینیم این معادله را نمی‌توان با روش بالا حل کرد، به جستجوی یك تابع ψ می‌پردازیم به‌طوری‌که

$$\psi_x(x\,,\,y)=۳x^{۲}+۲xy\,,\quad \psi_y(x\,,\,y)=x+y^{۲} \qquad (۱۷)$$

با انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ اول به دست می‌آید

$$\psi(x\,,\,y)=x^{۳}+x^{۲}y+h(y) \qquad (۱۸)$$

که در آن تابع دلخواه h فقط به y بستگی دارد. برای آنکه معادلهٔ دوم (۱۷) نیز برقرار گردد، ψ_y را ازمعادلهٔ (۱۸) محاسبه می‌کنیم وآن را برابر با N قرار می‌دهیم

$$\psi_y(x\,,\,y)=x^{۲}+h'(y)=x+y^{۲}$$

یا

$$h'(y)=x+y^{۲}-x^{۲} \qquad (۱۹)$$

چون طرف دوم معادلهٔ (۱۹) هم به x و هم به y بستگی دارد، بنابـراین تعیین $h(y)$ از معادلهٔ (۱۹) غیرممکن است. بنابراین نمی‌توان تـابع $\psi(x\,,\,y)$ را طوری تعیین‌کرد که درهر دومعادلهٔ (۱۷) صدق کند.

مسائل

تعیین‌کنید که‌آیا هریك از معادلات‌مسائل ۱ تا ۱۲ کامل است یا نه. اگرکامل باشد، جواب آن را بیابید.

۱. $(۲x+۳)+(۲y-۲)y'=۰$

۲. $(۲x+۴y)+(۲x-۲y)y'=۰$

۳. $(۹x^{۲}+y-۱)-(۴y-x)y'=۰$

۴. $(۲xy^{۲}+۲y)+(۲x^{۲}y+۲x)y'=۰$

۵. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ax+by}{bx+cy}$

۶. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ax-by}{bx-cy}$

۷. $(e^x \sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$

۸. $(e^x\sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy=0$

۹. $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$

۱۰. $\left(\dfrac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x-2)dy=0,\quad x>0$

۱۱. $(x\ln y+xy)dx+(y\ln x+xy)dy=0;\quad x>0,\quad y>0$

۱۲. $\dfrac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\dfrac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$

۱۳. درهریك ازمعادلات زیر مقدار b را طوری تعیین کنیدکه معادله کامل باشد، و سپس به‌ازای این مقدار b معادله را حل کنید.

(الف) $(xy^2+bx^2y)\,dx+(x+y)x^2\,dy=0$

(ب) $(ye^{2xy}+x)\,dx+bxe^{2xy}\,dy=0$

۱۴. معادلهٔ دیفرانسیل کامل زیر را درنظر می‌گیریم

$$M(x\,,\,y)\,dx+N(x\,,\,y)\,dy=0$$

به جای انتگرال گیری از $M=\psi_x$ کـه درمتن آمـده است، نخست ازمعادلـهٔ $\psi_y=N$ انتگرال بگیرید ویك فرمول ضمنی $\psi(x\,,\,y)=c$ نظیر رابطهٔ (۱۲) برای جواب بیابید.

۱۵. نشان دهیدکه هرمعادلهٔ جدایی‌پذیر، یعنی معادله‌ای به صورت

$$M(x)+N(y)y'=0$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل کامل است.

۱۶*. دراین مسئله بـه توضیح علت لـزوم قیدی دربـارهٔ ناحیهٔ R درقضیهٔ ۳.۲ می‌پردازیم. معادلهٔ دیفرانسیل زیر را درنظر می‌گیریم

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0\,,\quad (x\,,\,y)\neq(0\,,\,0)$$

(الف) نشان دهیدکه درهمهٔ نقاط به استثنای مبدأ داریم $M_y-N_x=0$.

(ب) نشان دهیدکه، معادلهٔ داده شده را به جز در $(0\,,\,0)$ می‌توان به‌صورت

$$d[\mathrm{tg}^{-1}(y/x)]=0$$

ویا درمختصات قطبی به‌صورت زیر نوشت

$$d\theta = 0$$

(ج) اکنون جواب معادلـهٔ داده شده را درناحیهٔ R' (شکل ۵.۲ را ببینید) داخل مربع محدود به ۲ $= |x|$ و ۲ $= |y|$ وخارج دایـرهٔ ۱ $= x^2 + y^2$ درنظـر می‌گیریم. شرط کامل بودن درهمهٔ نقاط این ناحیه برقرار است. ازقسمت (ب) به دست می‌آید

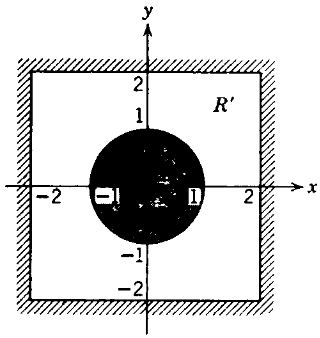
$$\psi(x, y) = \mathrm{tg}^{-1}(y/x) = c$$

یا

$$\theta = c$$

که درآن c ثـابت دلخواهی است. اما، عبارت $\psi(x, y)$ تك مقداری نیست، وبنابراین تابعی را تعریف نمی‌کند. مثلاً، $\psi(1, 1) = (\pi/4) + 2n\pi$، که درآن n می‌تواند هرعدد صحیحی باشد. بنابراین با وجودآنکه درتمام ناحیهٔ R' معادلات (۸) صادقند، هیچ تابع ψ وجود نداردکه معادلات (۴) را در R' برقرارکند. توضیح‌آنکه R'، ناحیه‌ای ازنوع مناسب نیست، وفرضی که دربارهٔ ناحیهٔ R درقضیه گنجانده شده است دقیقاً به‌منظور حذف نواحی مانند R' است. اما در واقع لزومی نداردکـه R ناحیهٔ مستطیلی باشد، بلکه کافی است R تنها به یك خم بستهٔ پیوسته‌ای که‌خود را قطع نکند محدود باشد. این‌گونه نواحی را همبستهٔ ساده می‌نامند.

نواحی همبستهٔ ساده را همچنین می‌توان بـه عنوان ناحیه‌هایی که از تغییرشکل یك ورقهٔ دایره‌ای لاستیکی کاملاً مرتجع دراثر کشیدن بدون ایجاد پارگی به دست می‌آیند، یا ناحیه‌هایی‌که دایره با تغییرشکل پیوسته به‌آنها تبدیل می‌شود، تصورکرد. به‌عبارت دیگر، نواحی همبستهٔ ساده، نواحی بدون سوراخ می‌باشند. این مطالب در شاخه‌ای از ریاضیات موسوم به توپولوژی بررسی می‌شوند.



شکل ۵.۲

۶.۲ عامل انتگرال‌ساز

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روشهای بند ۵.۲ را دربارهٔ مسائل طبقهٔ وسیعتری تعمیم داد. معادله‌ای به صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$M(x\,,\,y)\,dx+N(x\,,\,y)\,dy=0 \qquad (1)$$

اگر این معادله کامل نباشد، سعی می‌کنیم یك تابع μ، که می‌تواند به x و y هردو بستگی داشته باشد، طوری انتخاب کنیم که معادلهٔ

$$\mu(M\,dx+N\,dy)=0 \qquad (2)$$

کامل باشد. تابع μ را عامل انتگرال‌ساز می‌نامند. بنابراین می‌توان معادلهٔ (۲) را با روشهای بند ۵.۲ حل کرد، وجوابهای آن درمعادلهٔ اصلی (۱) نیز صدق خواهند کرد. این روش تعمیم روشی است که در بند ۱.۲ دربارهٔ معادلات خطی بیان شد.

برای بررسی امکان اجرای این روش، یادآوری می‌کنیم که با توجه به بند ۵.۲، معادلهٔ (۲) کامل است اگر وفقط اگر

$$(\mu M)_y=(\mu N)_x \qquad (3)$$

چون M و N توابع داده شده‌ای می‌باشند، عامل انتگرال‌ساز μ باید درمعادلهٔ با مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول

$$M\mu_y-N\mu_x+(M_y-N_x)\mu=0 \qquad (4)$$

صدق کند. اگر بتوان یك تابع μ که درمعادلهٔ (۴) صدق کند به دست آورد، آنگاه معادلهٔ (۲) کامل خواهد بود. بدین‌سان جواب معادلهٔ (۲) بااستفاده از روش بند ۵.۲ به‌صورت ضمنی

$$\psi(x\,,\,y)=c$$

به دست خواهد آمد. این رابطه معرف جواب معادلهٔ (۱) نیز می‌باشد. زیرا می‌توان عامل انتگرال‌ساز μ را ازجمله‌های معادلهٔ (۲) حذف کرد.

معادلهٔ با مشتقهای جزئی (۴) می‌تواند بیش ازیك جواب داشته باشد. اگر چنین بود، هریك ازجوابها را می‌توان به‌عنوان عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ (۱) به‌کار برد. درمثال ۳، این امکان عدم یکتایی عامل انتگرال‌ساز را توضیح داده‌ایم.

متأسفانه، معادلهٔ (۴) که باید عامل انتگرال‌ساز را به دست دهد معمولاً حداقل به همان دشواری معادلهٔ اصلی (۱) است. بنابراین، هرچند عاملهای انتگرال‌ساز اصولاً ابزارهای نیرومندی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشند اما درعمل فقط درحالتهای خاص می‌توان آنها را به‌دست آورد. برخی ازاین حالتها درمثالهای زیر و مسائل ۱۰ و ۱۱ درپایان این بند مشخص شده‌اند.

مثال ۱. تحقیق کنید که $\mu(x\,,\,y)=(xy^2)^{-1}$ یك عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ

دیفرانسیل

$$(y^2+xy)\,dx-x^2\,dy=0 \tag{5}$$

است، وآنگاه جواب آن را بیابید.

چون $M(x\,,\,y)=y^2+xy$ ، و $N(x\,,\,y)=-x^2$ ، درنتیجه

$$M_y(x\,,\,y)=2y+x \text{ ، و } N_x(x\,,\,y)=-2x$$

پس معادلهٔ داده شده کامل نیست. برای نشان دادن آنکه $\mu(x\,,\,y)=(xy^2)^{-1}$ یك‌عامل انتگرال‌ساز این معادلـه است، معادلـهٔ (۵) را در $\mu(x\,,\,y)$ ضرب می‌کنیم، بدین‌سان به دست می‌آید

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کردکـه این معادلـه کامل است. بـا روش بند ۵.۲ جواب آن به‌صورت ضمنی زیر به‌دست می‌آید

$$\ln|x|+\frac{x}{y}=c\,; \quad x\neq 0\,, \quad y\neq 0 \tag{6}$$

توجه شودکه $y=0$ نیز یك جواب معادلهٔ (۵) است، اما از رابطهٔ (۶) به‌دست *نمی‌آید*.

مثال ۲. مهمترین دو حالتی‌که درآن بـه‌آسانی می‌توان عاملهای انتگرال ساز را به‌دست آورد، هنگامی است کـه μ به‌جای آنکه تابع هردو متغیر x و y باشد، فقط تابع یکی از آنها باشد. اکنون دربارهٔ M و N شرایط لازم را طـوری تعیین می‌کنیم کـه μ عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ $M\,dx+N\,dy=0$ فقط تابع x باشد.

با فرض آنکه μ فقط تابعی از x باشد، خواهیم داشت

$$(\mu M)_y=\mu M_y\,, \quad (\mu N)_x=\mu N_x+N\frac{d\mu}{dx}$$

بدین‌سان، از تساوی $(\mu M)_y$ با $(\mu N)_x$ لازم می‌آیدکه

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{M_y-N_x}{N}\mu \tag{7}$$

اگر $(M_y-N_x)/N$ فقط تابعی از x باشد، آنگاه یك عامل انتگرال‌ساز μ که فقط تابع x است وجود خواهد داشت، علاوه براین $\mu(x)$ را می‌توان ازحل معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول (۷) به‌دست آورد.

به‌روش مشابهی می‌توان به تعیین شرطی پرداخت کـه تحت آن عامل انتگرال ساز معادلهٔ (۱) فقط تابع y باشد (مسئلهٔ ۱۰ را ببینید).

مثال ۳. یك عامل انتگرال‌ساز برای معادلهٔ

$$(۳xy+y^۲)+(x^۲+xy)\frac{dy}{dx}=۰ \qquad (۸)$$

بیابید، وآنگاه معادله را حل کنید.

با محاسبهٔ مقدار $(M_y-N_x)/N$ به‌دست می‌آید که

$$\frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N(x,y)}=\frac{۳x+۲y-(۲x+y)}{x^۲+xy}=\frac{۱}{x}$$

بدین‌سان، بنابر مثال ۲، یك عامل انتگرال ساز μ وجود دارد که فقط تابع x است، و در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{\mu}{x}$$

صدق می‌کند. پس

$$\mu(x)=x \qquad (۹)$$

با ضرب معادلهٔ (۸) دراین عامل انتگرال‌ساز خواهیم داشت

$$(۳x^۲y+xy^۲)+(x^۳+x^۲y)\frac{dy}{dx}=۰ \qquad (۱۰)$$

کــه یك معادلــهٔ کامل است. جواب آن به‌آسانی با روش بند ۵.۲ به‌صورت ضمنی زیر به‌دست می‌آید

$$x^۳y+\frac{۱}{۲}x^۲y^۲=c \qquad (۱۱)$$

توجه شودکه می‌توان معادلهٔ درجهٔ دوم (۱۱) را حل کرد و y را برحسب x به‌دست‌آورد. خواننده می‌تواند تحقیق‌کندکه مانند مثال ۱، $\mu(x,y)=۱/xy(۲x+y)$ نیزیك عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ (۸) است. اگر این عامل انتگرال‌ساز را به‌کار ببریم همان جواب، اما با دشواری بیشتر، به‌دست می‌آید (مسئلهٔ ۱۲ را ببینید).

مسائل

نشان دهیدکه معادلات مسائل ۱ تا ۳ کامل نیستند، اما باضرب در عامل انتگرال‌ساز داده شده کامل می‌شوند. آنگاه معادلات را حل کنید.

۰۱. $x^۲y^۳+x(۱+y^۲)y'=۰;\quad \mu(x,y)=۱/xy^۳$

۲. $\left(\frac{\sin y}{y}-۲e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+۲e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=۰\,;$

$\mu(x\,,y)=ye^{x}$

۳. $y\,dx+(۲x-ye^{y})\,dy=۰\,;\quad \mu(x\,,y)=y$

درهریك از مسائل ۴ تا ۹ یك عامل انتگرال‌ساز بیابید، و معادله را حل کنید.

۴. $(۳x^{۲}y+۲xy+y^{۳})\,dx+(x^{۲}+y^{۲})\,dy=۰$

۵. $y'=e^{۲x}+y-۱$

۶. $dx+\left(\frac{x}{y}-\sin y\right)dy=۰$

۷. $y\,dx+(۲xy-e^{-۲y})\,dy=۰$

۸. $e^{x}\,dx+(e^{x}\operatorname{cotg} y+۲y\csc y)\,dy=۰$

۹. $\left(۳x+\frac{۶}{y}\right)+\left(\frac{x^{۲}}{y}+۳\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=۰$

۱۰. نشان دهیدکه اگر $(N_x-M_y)/M=Q$ و Q فقط تابع y باشد، آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل

$$M+Ny'=۰$$

دارای یك عامل انتگرال‌ساز به‌صورت زیر است

$$\mu(y)=\exp\int^{y}Q(t)\,dt$$

۱۱*. نشان دهیدکه اگر $(N_x-M_y)/(xM-yN)=R$ و R فقط به‌مقدار xy بستگی داشته باشد، آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل

$$M+Ny'=۰$$

دارای یك عامل انتگرال‌ساز به‌صورت $\mu(xy)$ است. یك فرمول کلی برای این عامل انتگرال‌ساز بیابید.

۱۲*. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۳xy+y^{۲})+(x^{۲}+xy)y'=۰$$

را با استفاده از عامل انتگرال ساز

$$\mu(x\,,y)=[xy(۲x+y)]^{-۱}$$

حل کنید. تحقیق کنید که این جواب همان جوابی است که در مثال ۳ با عامل انتگرال‌ساز دیگری به‌دست آمده است.

۷.۲ معادلات همگن

دونوع اصلی معادلات مرتبهٔ اول غیرخطی که می‌توان آنها را مستقیماً با انتگرال‌گیری حل کرد عبارتنداز معادلات جدایی‌پذیر ومعادلات کامل. در بند ۶.۲ کاربرد عاملهای انتگرال‌ساز را برای حل برخی از انواع معادلات با تبدیل آنها به‌معادلات کامل مورد بحث قرار دادیم. دراین بند به‌معرفی روش دیگری می‌پردازیم، و آن تعویض متغیرهاست، که گاهی با استفاده از آن‌معادلهٔ دیفرانسیل ساده می‌شود وبدین‌سان حل آن ممکن (یا آسانتر) می‌گردد. به‌طورکلی از ترکیبات متغیرها که درمعادله تکرار شده‌اند، یا ازویژگیهای دیگر ساختمان معادله به‌تبدیل مناسب پی می‌بریم.

مهمترین طبقهٔ معادلات که می‌توان برای آن قاعدهٔ صریحی وضع کرد، طبقهٔ معادلات دیفرانسیل همگن[1] است. معادله‌ای به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=f(x\,,\,y)$$

را هنگامی همگن می‌گویند که در آن تابع f به‌طور جداگانه بستگی به x و y نداشته و فقط تابعی از نسبت x/y یا y/x باشد. پس معادلات همگن به‌صورت زیر می‌باشند

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{۱}$$

مثالهای زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{2}+2xy}{x^{2}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{2}+2\frac{y}{x} \qquad \text{(الف)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\ln x-\ln y+\frac{x+y}{x-y}=\ln\frac{1}{y/x}+\frac{1+(y/x)}{1-(y/x)} \qquad \text{(ب)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{3}+2xy}{x^{2}} \qquad \text{(ج)}$$

بدین‌سان (الف) و (ب) همگن‌اند، زیرا طرف دوم هریك ازآنها را می‌توان به‌صورت تابعی از y/x بیان کرد، وچون (ج) را نمی‌توان به‌این صورت نوشت ازاین‌رو همگن نیست. معمولاً باجستجو به‌آسانی می‌توان تشخیص دادکه معادله همگن است یانه، درمورد

---

۱. واژهٔ همگن دربررسی معادلات دیفرانسیل به‌معانی گوناگونی به‌کار می‌رود. خواننده باید در هر مورد معنی مناسب آن را تشخیص دهد.

معادلات پیچیده‌تر می‌توان از ملاك مذکور در مسئلهٔ ۱۵ استفاده‌کرد.

از شکل معادلهٔ همگن به‌این نکته پی می‌بریم که ممکن است با درنظر گرفتن متغیر جدید[1] v که نمایشگر نسبت y/x است معادله ساده شود. بدین‌سان

$$y=xv \tag{۲}$$

و معادلهٔ (۱) به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=F(v) \tag{۳}$$

در می‌آید. چون v را به‌عنوان متغیر وابستهٔ جدید (به‌جای y) درنظر می‌گیریم، باید آن را تابع x فرض‌کرد و به‌جای dy/dx در معادلهٔ (۳) عبارت مناسبی برحسب v قرارداد. از رابطهٔ (۲) مشتق می‌گیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

وازآنجا معادلهٔ (۳) به‌صورت

$$x\frac{dv}{dx}+v=F(v) \tag{۴}$$

درمی‌آید. نکتهٔ شایان‌توجه درمعادلهٔ (۴) آن است‌که شکل تابع F هرچه باشد، متغیرهای x و v را همواره می‌توان جداکرد ونوشت

$$\frac{dx}{x}=\frac{dv}{F(v)-v} \tag{۵}$$

چون معادلهٔ (۵) را حل‌کنیم و در آن y/x را به‌جای v بگذاریم جواب معادلهٔ اصلی به‌دست می‌آید.

بدین‌سان هر معادلهٔ همگن را می‌توان با تعویض متغیر (۲) به‌معادله‌ای که در آن متغیرها جدا می‌شوند تبدیل‌کرد. البته درعمل ممکن است نتوان انتگرال لازم برای حل معادلهٔ (۵) را به‌روشهای مقدماتی محاسبه‌کرد. علاوه براین، امکان داردکه یك معادلهٔ همگن به‌یکی از طبقه‌هایی‌که قبلاً بررسی شد نیز تعلق داشته باشد، مثلاً،کامل یاحتی خطی باشد. دراین حالتها برای یافتن جواب روشهای متعددی دراختیار داریم.

مثال. معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل‌کنید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{2}+2xy}{x^{2}} \tag{۶}$$

---

۱. این روش را اولین بار لایبنیتز درسال ۱۶۹۱ به‌کاربرد.

با نوشتن این معادله به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^{2}+2\frac{y}{x}$$

دیده می‌شود که همگن است. این معادله، نه کامل است و نه درآن متغیرها جدا می‌شوند و نه دارای عامل انتگرال‌ساز واضحی است. بدین‌سان به‌تعویض متغیر (۲) متوجه می‌شویم، و معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$x\frac{dv}{dx}+v=v^{2}+2v$$

ازآنجا

$$x\frac{dv}{dx}=v^{2}+v$$

و با جداکردن متغیرها

$$\frac{dx}{x}=\frac{dv}{v(v+1)}$$

طرف دوم را به‌کسرهای ساده بسط می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+1}\right)dv$$

از هردو طرف انتگرال می‌گیریم، حاصل می‌شود

$$\ln|x|+\ln|c|=\ln|v|-\ln|v+1|$$

که درآن c ثابت دلخواهی است. ازآنجا، باترکیب لگاریتمها وگرفتن آنتی‌لگاریتم از دوطرف، به‌دست می‌آید

$$cx=\frac{v}{v+1}$$

بالاخره، چون y/x را به‌جای v قراردهیم، جواب معادلهٔ (۶) به‌صورت

$$cx=\frac{y/x}{(y/x)+1}=\frac{y}{y+x}$$

به‌دست می‌آید، که چون آن را نسبت به y حل‌کنیم، خواهیم داشت

$$y=\frac{cx^{2}}{1-cx}$$

گاهی لازم می‌آید کـه هم متغیر مستقل و هم متغیر وابسته را تغییر دهیم. مثلاً در مسائل ۹، ۱۰ و ۱۱ برای آنکه معادله همگن شود باید هر دو متغیر را تعویض کرد و پس از آن بار دیگر به‌تعویض تابع پرداخت تا جواب مسئله به‌دست آید.

مسائل

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۸ همگن‌اند، و جواب آنها را بیابید.

۱. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$

۲. $۲y\,dx-x\,dy=۰$

۳. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^۲+xy+y^۲}{x^۲}$

۴. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^۲+۳y^۲}{۲xy}$

۵. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{۴y-۳x}{۲x-y}$

۶. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{۴x+۳y}{۲x+y}$

۷. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+۳y}{x-y}$

۸. $(x^۲+۳xy+y^۲)\,dx-x^۲\,dy=۰$

۹. (الف) جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲y-x}{۲x-y}$$

(ب) جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲y-x+۵}{۲x-y-۴}$$

راهنمایی: برای تبدیل معادلـهٔ قسمت (ب) به‌معادلـهٔ قسمت (الف)، جایگزینی مقدماتی به‌صورت $x=X-h$ ، $y=Y-k$ را درنظرمی‌گیریم. ثابتهای h و k راطوری‌انتخاب می‌کنیم که معادله برحسب متغیرهای X و Y همگن شود.

۱۰. معادلهٔ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{۴x+۳y+۱۵}{۲x+y+۷}$ را حل کنید. راهنمایی مسئلهٔ ۹ قسمت (ب) را ببینید.

۱۱. معادلهٔ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+۳y-۵}{x-y-۱}$ را حل کنید. راهنمایـی مسئلـهٔ ۹ قسمت (ب) را ببینید.

۱۲. جواب معادلهٔ

$$(3xy+y^2)\,dx+(x^2+xy)\,dy=0$$

را با روش این بند بیابید، و آن را با جوابی که به‌روشهای دیگر در مثال ۳ و مسئلهٔ ۱۲ بند ۶.۲ به‌دست آمده است مقایسه کنید.

*۱۳. نشان دهید که اگر

$$M(x\,,\,y)\,dx+N(x\,,\,y)\,dy=0$$

یك معادلهٔ همگن باشد، آنگاه دارای عامل انتگرال‌ساز زیراست

$$\mu(x\,,\,y)=\frac{1}{xM(x\,,\,y)+yN(x\,,y)}$$

*۱۴. با به‌کاربردن نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۳ هریك از معادلات زیر را حل کنید

(الف) معادلهٔ مسئلهٔ ۲. (ب) معادلهٔ مسئلهٔ ۴.

*۱۵. نشان دهید که معادلهٔ $y'=f(x\,,\,y)$ همگن است، اگر $f(x\,,\,y)$ به‌گونه‌ای باشد که

$$f(x\,,\,tx)=f(1\,,\,t)$$

که درآن t یك پارامتر حقیقی است. با استفاده ازاین نکته همگنی هریك از معادلات زیر را بررسی کنید.

(الف) $y'=\dfrac{x^3+xy+y^3}{x^2y+xy^2}$ (ب) $y'=\ln x-\ln y+\dfrac{x+y}{x-y}$

(ج) $y'=\dfrac{(x^2+3xy+4y^2)^{1/2}}{x+2y}$ (د) $y'=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

۸.۲ مسائل گوناگون

این بند شامل مجموعه‌ای از مسائل است. ۳۲ مسئلهٔ اول را می‌توان با روشهای بندهای پیش حل کرد. این مسائل را به‌منظور کسب مهارت خواننده در تشخیص روش یا روشهای قابل اجرا در مورد معادلهٔ داده شده‌ای آورده‌ایم. در پایان چند مسئله که مستلزم روشهای خاصی می‌باشند آمده است، این روشها درمورد برخی از انواع معادلات به‌کار می‌روند. به‌ویژه، مسائل ۳۵ و ۳۶ مربوط به‌معادلهٔ ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴) است.

۱. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3-2y}{x}$

۲. $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3+3y^2-x}\,,y(0)=0$ ۳.

$(x+e^y)\,dy-dx=0$ ۴.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$ ۵.

$x\frac{dy}{dx}+xy=1-y\,,\ y(1)=0$ ۶.

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3}$ راهنمایی: فرض کنید $u=x^2$. ۷.

$x\frac{dy}{dx}+2y=\frac{\sin x}{x}\,,\quad y(2)=1$ ۸.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+1}{x^2+2y}$ ۹.

$(3y^2+2xy)\,dx-(2xy+x^2)\,dy=0$ ۱۰.

$(x^2+y)\,dx+(x+e^y)\,dy=0$ ۱۱.

$\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{1+e^x}$ ۱۲.

$x\,dy-y\,dx=(xy)^{1/2}\,dx$ ۱۳.

$(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0\,,\quad y(2)=3$ ۱۴.

$(e^x+1)\frac{dy}{dx}=y-ye^x$ ۱۵.

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x^2}$ ۱۶.

$\frac{dy}{dx}=e^{2x}+3y$ ۱۷.

$(2y+3x)\,dx=-x\,dy$ ۱۸.

$x\,dy-y\,dx=2x^2y^2\,dy\,,\quad y(1)=-2$ ۱۹.

$y'=e^{x+y}$ ۲۰.

۲۱. $xy' = y + xe^{y/x}$

۲۲. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$

۲۳. $xy' + y - y^2 e^{2x} = 0$

۲۴. $2 \sin y \cos x \, dx + \cos y \sin x \, dy = 0$

۲۵. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$

۲۶. $(2y + 1)\, dx + \left(\dfrac{x^2 - y}{x}\right) dy = 0$

۲۷. $(\cos 2y - \sin x)\, dx - 2 \operatorname{tg} x \sin 2y \, dy = 0$

۲۸. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

۲۹. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

۳۰. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$

۳۱. $(x^2 y + xy - y)\, dx + (x^2 y - 2x^2)\, dy = 0$

۳۲. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

۳۳. نشان دهید که هر معادلهٔ به‌صورت

$$y = G(p)$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، می‌توان به‌طریق زیر حل کرد.

(الف) نسبت به x مشتق می‌گیریم،

(ب) با حل معادلهٔ قسمت (الف) x را به‌صورت تابعی از p به‌دست می‌آوریم.
این رابطه و معادلهٔ اصلی $y = G(p)$ ، جواب را به‌صورت پارامتری نشان می‌دهند.

۳۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y - \ln p = 0$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، با روش مسئلهٔ ۳۳ حل کنید. این معادله را مستقیماً نیز

حل کنید، و تحقیق کنید که هردو جواب یکی است.

۳۵. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$$

مشهور به معادلهٔ ریکاتی است. فرض کنیم که یك جواب خصوصی y_1 این معادله معلوم باشد. جواب عمومیتری را که شامل یك ثابت دلخواه است، می‌توان با تبدیل زیر به‌دست آورد

$$y=y_1(x)+\frac{1}{v(x)}$$

نشان دهید که $v(x)$ در معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول

$$\frac{dv}{dx}=-(q_2+2q_3y_1)v-q_3$$

صدق می‌کند. توجه شود که $v(x)$ تنها شامل یك ثابت دلخواه است.

۳۶. با استفاده از روش مسئلهٔ ۳۵ و جواب خصوصی داده شده، هریك از معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

(الف) $y'=1+x^2-2xy+y^2;\quad y_1(x)=x$

(ب) $y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2;\quad y_1(x)=1/x$

(ج) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos^2 x-\sin^2 x+y^2}{2\cos x};\ y_1(x)=\sin x$

۲.۹ کاربردهای معادلات مرتبهٔ اول

معادلات دیفرانسیل اصولاً به‌علت امکان استفاده از آنها در پژوهش مسائل بسیار گوناگون درعلوم فیزیك، زیست شناسی، و اجتماعی مورد توجه غیر ریاضیدانان می‌باشند. در این خط مشی می‌توان بدون توجه به‌حوزهٔ خاص کاربرد، سه مرحله تشخیص داد.

نخست لازم است که وضعیت طبیعی را به‌عبارت ریاضی برگردانیم. برای این‌کار عموماً دربارهٔ آنچه‌اتفاق می‌افتد فرضیاتی می‌شود که ظاهراً باپدیدهٔ مشاهده شده‌سازگارند. مثلاً، مشاهده شده است که میزان ازبین‌رفتن مواد رادیواکتیو بامقدار مادهٔ موجود متناسب است، میزان عبور حرارت از یك جسم گرمتر به‌یك جسم سردتر با اختلاف دما متناسب است، حرکت اجسام در فضا طبق قوانین حرکت نیوتن انجام می‌گیرد، و میزان رشد جمعیتهای مجزای حشرات با جمعیت موجود متناسب است. هریك از این گزاره‌ها متضمن یك میزان تغییر (مشتق) می‌باشند، و در نتیجه هنگامی‌که با عبارت ریاضی بیان شوند،

به‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل درمی‌آیند.

این نکتهٔ مهم را باید درنظرداشت که تقریباً همیشه معادلات ریاضی فرایند واقعی را فقط به‌طور تقریب توصیف می‌کنند، زیرا این معادلات مبتنی بر تجربیات‌اند که نتیجهٔ آنها تقریبی است. مثلاً، حرکت اجسامی که سرعت آنها با سرعت نور قابل مقایسه باشد، از قوانین نیوتن پیروی نمی‌کند، جمعیتهای حشرات به‌علت محدودیتهای احتمالی منابع تغذیه دارای رشد نامتناهی بدان صورت که گفته شد نیستند، و در انتقال حرارت عوامل دیگری به‌غیراز اختلاف‌دما مؤثرند. علاوه‌براین، هنگامی که‌یك مسئلهٔ فیزیکی‌را به‌صورت ریاضی فرمول بندی می‌کنیم، اغلب لازم می‌آیدکه به‌جای فرایندی منفصل به‌طور مجازی فرایند پیوسته‌ای را درنظر بگیریم. به‌عنوان مثال، دریك جمعیت حشره تغییر تعداد آنها کمیتی است منفصل، اما اگر جمعیت بزرگ باشد، به‌نظر معقول است که آن را به‌عنوان متغیری پیوسته درنظر بگیریم وحتی دربارهٔ مشتق آن بحث‌کنیم. ازسوی دیگرمی‌توان این دیدگاه را پذیرفت‌که معادلات ریاضی دقیقاً بیانگر عمل مدل ساده‌ای است که به‌منظور دربرداشتن مهمترین جنبه‌های فرایند واقعی ساخته (یا تصور) شده است.

به‌هرحال، هنگامی‌که مسئله به‌صورت ریاضی فرمول بندی شد اغلب بامسئلهٔ حل یك یا چند معادلهٔ دیفرانسیل مواجه می‌شویم. درصورت عدم امکان حل، مسئلهٔ تعیین بیشترین خاصیتهای جواب مطرح می‌شود. ممکن است اتفاقاً مسئله از لحاظ ریاضی کاملاً دشوار باشد، و اگر چنین باشد، دراین مرحله به‌منظور راهیابی به‌مسئله از لحاظ ریاضی‌تقریبات دیگری در دستور قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال، امکان دارد به‌جای یك معادلهٔ غیرخطی به‌طور تقریب یك معادله خطی گذاشته شود، یا به‌جای تابعی با تغییرات بطیی مقدارمتوسط آن درنظرگرفته شود. طبعاً، هرتقریبی از این نوع را باید از دیدگاه طبیعی نیز مورد بررسی قرار داد، تا اطمینان حاصل شود که این مسئلهٔ ریاضی ساده شده بازهم جنبه‌های اصلی فرایند طبیعی مورد پژوهش را منعکس‌کند. در همین مرحله با شناخت نزدیکی از طبیعت مسئله، می‌توان تقریبات ریاضی معقولی را به‌دست‌آورد، تا مسئلهٔ ریاضی بهتر قابل تحلیل‌گردد. این ارتباط متقابل بین درك پدیدهٔ طبیعی‌وشناخت‌روشهای ریاضی ومحدودیتهای آنها به‌بهترین وجه خصیصهٔ ریاضیات‌کاربسته را نشان می‌دهد، و درساختن مدلهای‌ریاضی موفقیت‌آمیز برای فرایندهای پیچیدهٔ طبیعی ضروری است.

بالاخره، پس ازآنکه جواب (یا حداقل اطلاعاتی دربارهٔآن) به‌دست آمد، باید برحسب اصطلاحات متنی‌که مسئله را مطرح کرده است تعبیر شود. به ویژه، همواره باید بررسی‌کردکه‌آیا جواب ریاضی به دست‌آمده از لحاظ طبیعی هم به نظر معقول است. این‌کار حداقل مستلزم آن است‌که جواب وجود داشته باشد، یکتا باشد، ونسبت به‌داده‌های مسئله پیوسته باشد. اهمیت قید اخیر در این است‌که ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط اولیه اغلب درنتیجهٔ اندازه‌گیری‌کمیتهای طبیعی به دست‌آمده‌اند وازاین‌رو درآنها امکان خطاهای‌کوچك وجود دارد. اگر این خطاهای‌کوچك در جواب مسئلهٔ ریاضی متناظر تغییراتی بزرگ (یا ناپیوسته) به وجودآورندکه درطبیعت مشاهده نشده‌اند، بایدارتباط

مدل ریاضی را با مسئلهٔ طبیعی مجدداً مورد بررسی قرار داد. البته، این نکته‌که جواب ریاضی به نظر معقول باشد، صحت آن را تضمین نمی‌کند. اما، اگر با مشاهدات دقیق دستگاه طبیعی مزبور به طور جدی ناسازگار باشد، بدان علت است که یا در حل مسئلهٔ ریاضی خطاهایی صورت گرفته و یا این مدل ریاضی بسیار ناهنجار است.

درمثالهای این بند و بند بعد نمونهٔ کاربردهایی آمده است که به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول منجر می‌گردد.

مثال ۱ (تجزیهٔ اتم رادیواکتیو). ایزوتوپ رادیواکتیو توریم ۲۳۴ به میزان متناسب با مقدار موجود تجزیه می‌شود. اگر ۱۰۰ میلی‌گرم این ماده دریك هفته به۸۲٫۰۴ میلی‌گرم تقلیل یافته باشد، عبارتی تعیین کنیدکه مقدار موجود در هرزمان را به‌دست‌دهد. همچنین زمان لازم را برای اینکه مادهٔ اولیه به نصف تقلیل یابد، بیابید.

فرض‌کنیم $Q(t)$ مقدار توریم ۲۳۴ موجود درهرزمانt باشد،که در آن Q برحسب میلی‌گرم و t برحسب‌روز است. مشاهدهٔ فیزیکی‌که توریم ۲۳۴ به میزان متناسب بامقدار موجود تجزیه می‌شود بدان معنی است که میزان تغییر برحسب زمان، یعنی dQ/dt، با Q متناسب است. بنابراین Q درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt}=kQ \qquad (۱)$$

صدق می‌کند، که در آن ضریب تناسب k ثابتی است منفی و بایدآن را تعیین‌کرد. اکنون به جستجوی جوابی ازمعادلهٔ (۱) می‌پردازیم که درشرط اولیهٔ

$$Q(۰)=۱۰۰ \qquad (۲)$$

و همچنین درشرط

$$Q(۷)=۸۲٫۰۴ \qquad (۳)$$

صدق کند. معادلهٔ (۱) را می‌توان به عنوان یك معادلهٔ خطی یا با جداکردن متغیرها حل کرد، وجواب عمومی آن عبارت است از

$$Q(t)=ce^{kt} \qquad (۴)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. ازشرط اولیهٔ (۲) به دست می‌آید $c=۱۰۰$، بنابراین

$$Q(t)=۱۰۰e^{kt} \qquad (۵)$$

و برای آن که شرط (۳) برقرار گردد، $t=۷$ و $Q=۸۲٫۰۴$ را دررابطهٔ (۵) می‌گذاریم؛ به دست می‌آید

$$۸۲٫۰۴=۱۰۰e^{۷k}$$

و بنابراین

$$k=\frac{\ln ۰٫۸۲۰۴}{۷}=-۰٫۰۲۸۲۸(\text{روز})^{-۱} \qquad (۶)$$

بدین‌سان ضریب‌کاهش k تعیین گردید. چون این مقدار k را در رابطهٔ (۵) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$Q(t)=۱۰۰e^{-۰٫۰۲۸۲۸t}\ \text{میلی‌گرم} \qquad (۷)$$

که مقدار $Q(t)$ را درهرزمان به دست می‌دهد.

مدت زمانی که جرمی به نصف مقدار اولیه تقلیل می‌یابد، نیمه عمر مادهٔ مزبور نام دارد. گیریم τ زمانی باشد که $Q(t)$ برابر ۵۰ میلی‌گرم است. دراین صورت، از رابطهٔ (۵) داریم

$$۵۰=۱۰۰e^{k\tau}$$

یا

$$k\tau=-\ln ۲ \qquad (۸)$$

رابطهٔ (۸) بین ضریب‌کاهش و نیمه عمر نه‌تنها برای توریم ۲۳۴ معتبر است بلکه درمورد هرماده‌ای‌که ازمعادلهٔ دیفرانسیل (۱) تبعیت‌کند نیز صادق است، وچون به جای k مقدار آن را ازرابطهٔ (۶) قراردهیم درمورد توریم ۲۳۴ خواهیم داشت

$$\tau=\frac{\ln ۲}{۰٫۰۲۸۲۸}\cong ۲۴٫۵\ \text{روز} \qquad (۹)$$

مثال ۲ (ربح مرکب). فرض‌کنیم‌که $S_۰$ مبلغ پولی باشدکه با نرخ بهرهٔ ۶ درصد به بانك سپرده شده است. مقدار سرمایهٔ $S(t)$ پس ازمدت t سال بستگی به تعداد دفعاتی داردکه بهره به‌آن اضافه شده است. دراین مثال به بررسی تأثیر تعداد دفعات اضافه‌شدن بهره می‌پردازیم.

اگر بهره یك بار درسال به سرمایه اضافه شود. آنگاه

$$S(t)=S_۰(۱+۰٫۰۶)^{t}$$

اگر بهره دوباردرسال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t)=S_۰\left[\left(۱+\frac{۰٫۰۶}{۲}\right)\left(۱+\frac{۰٫۰۶}{۲}\right)\right]^{t}=S_۰\left(۱+\frac{۰٫۰۶}{۲}\right)^{۲t}$$

و به طورکلی اگربهره k باردرسال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t)=S_۰\left(۱+\frac{۰٫۰۶}{k}\right)^{kt} \qquad (۱۰)$$

اکنون این وضعیت را با یك مدل ریاضی با فرض آنکه بهره بــه طور پیوسته بــه

سرمایه اضافه می‌شود تقریب می‌زنیم. با این فرض می‌توان قانون رشد سرمایه را به صورت معادلهٔ دیفرانسیل

$$S'(t) = ۰٫۰۶\, S(t)$$

نوشت. جواب این معادله، همراه با شرط اولیهٔ $S(۰) = S_۰$ عبارت است از

$$S(t) = S_۰ e^{۰٫۰۶t} \qquad (۱۱)$$

توجه شود که چون $k \to \infty$ طرف دوم رابطهٔ (۱۰) به طرف دوم رابطهٔ (۱۱) میل می‌کند. درستون دوم جدول ۲.۱ مقادیر $S(t)/S_۰$ راکه به ازای مقادیرمختلف t ازرابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آید درج کرده‌ایم. مقادیر $S(t)/S_۰$ درستون سوم وچهارم از رابطهٔ(۱۰) با استفاده از $k = ۴$ و $k = ۳۶۵$ به ترتیب متناظر با اضافه‌کردن بهره هرسه ماه یك بار و روزانه به دست آمده‌اند.

نتایج جدول نشان می‌دهدکه تعداد دفعاتی که بهره به سرمایه اضافه می‌شود در بیشتر حالتها اهمیت چندانی ندارد. مثلاً، بعد ازیك دورهٔ ده ساله، اختلاف بین اضافه‌کردن بهره به‌سرمایه هرسه ماه یك‌بار و به‌طور پیوسته کمتراز نیم درصد می‌باشد، یعنی درحدود ۸ ریال در ۱۰۰۰ ریال یا درحدود ۸٫۰ ریال درسال است. به‌ازای نرخهای بالاتر این اختلاف بیشتر خواهد بود، والبته، هنگامی‌که $S_۰$ بسیار بزرگ باشد حتی تفاوتهایی که به‌صورت درصد بسیارکوچك‌اند می‌توانند قابل توجه باشند. به‌هر حال اگر فاصلهٔ زمانی زیاد باشد (چند قرن یا بیشتر)، دراین صورت این تفاوت بزرگ خواهد بود.

از جدول نیز دیده می‌شودکه نرخ واقعی بهرهٔ سالانه درمورد اضافه‌کردن بهره هر سه ماه یك‌بار برابر۱۴٫۶ درصد و درمورد روزانه یا پیوسته برابر۱۸٫۶ درصد می‌باشد. دربسیاری ازبانکها نرخ واقعی سالانه‌ای رایج است‌که حتی از ۱۸٫۶ درصد متناظر به اضافه شدن بهره به‌طور پیوسته، بالاتر است. برای این‌کار نرخ بهرهٔ روزانه را براساس سال‌اسمی ۳۶۰ روزمحاسبه می‌کنند وسپس اضافه‌کردن بهره را درطول سال واقعی‌تقویمی منظور می‌نمایند. با استفادهٔ ازاین روش برای‌نرخ ۶درصد وصرف‌نظر ازکبیسه‌ها، خواهیم داشت

$$S(t) = S_۰ \left(۱ + \frac{۰٫۰۶}{۳۶۰}\right)^{۳۶۵t} \qquad (۱۲)$$

نتایج حاصل ازرابطهٔ (۱۲) درستون‌آخر جدول ۱.۲ آمده است. دراین روش، نرخ‌واقعی سالانه ۶٫۲۷درصد است. درحدود دقت محاسبات موجود می‌توان همین‌نتیجه را باضرب عامل ۳۶۵/۳۶۰ درنرخ واقعی متناظر به فرض اضافه شدن بهره به طور پیوسته به دست آورد. بدین‌سان ۶٫۲۷ = (۳۶۵/۳۶۰) × ۶٫۱۸. درمورد نرخهای بهرهٔ بالاتر این اثر شدیدتراست، مثلاً، یك نرخ بهرهٔ سالانه ۷٫۵۰ درصد درحالت اضافه‌شدن به‌طورپیوسته، نرخ واقعی بهره برابر ۷٫۷۹درصد وبا استفاده از رابطهٔ (۱۲) نرخ بیشتر ۷٫۹۰ درصد را به‌دست می‌دهد.

جدول ۱۰۲

سالها	$S(t)/S_۰$ ازرابطهٔ (۱۱)	$S(t)/S_۰$ ازرابطهٔ (۱۰) $k=۴$	$k=۳۶۵$	$S(t)/S_۰$ ازرابطهٔ (۱۲)
۱	۱٫۰۶۱۸	۱٫۰۶۱۴	۱٫۰۶۱۸	۱٫۰۶۲۷
۲	۱٫۱۲۷۵	۱٫۱۲۶۵	۱٫۱۲۷۵	۱٫۱۲۹۴
۵	۱٫۳۴۹۹	۱٫۳۴۶۹	۱٫۳۴۹۸	۱٫۳۵۵۵
۱۰	۱٫۸۲۲۱	۱٫۸۱۴۰	۱٫۸۲۲۰	۱٫۸۳۷۳
۲۰	۳٫۳۲۰۱	۳٫۲۹۰۷	۳٫۳۱۹۸	۳٫۳۷۵۶
۴۰	۱٫۱۰۲۳ $\times$ ۱۰	۱٫۰۸۲۸ $\times$ ۱۰	۱٫۱۰۲۱ $\times$ ۱۰	۱٫۱۳۹۵ $\times$ ۱۰
۸۰	۱٫۲۱۵۱ $\times$ ۱۰^{۲}	۱٫۱۷۲۶ $\times$ ۱۰^{۲}	۱٫۲۱۴۶ $\times$ ۱۰^{۲}	۱٫۲۹۸۴ $\times$ ۱۰^{۲}
۲۰۰	۱٫۶۲۷۵ $\times$ ۱۰^{۵}	۱٫۴۸۸۸ $\times$ ۱۰^{۵}	۱٫۶۲۶۰ $\times$ ۱۰^{۵}	۱٫۹۲۰۸ $\times$ ۱۰^{۵}
۴۰۰	۲٫۶۴۸۹ $\times$ ۱۰^{۱۰}	۲٫۲۱۶۵ $\times$ ۱۰^{۱۰}	۲٫۶۴۳۹ $\times$ ۱۰^{۱۰}	۳٫۶۸۹۵ $\times$ ۱۰^{۱۰}

مثال ۳ (اختلاط). مخزنی درزمان $t=۰$، حاوی $Q_۰$ پونـد نمك محلول در ۱۰۰ گالن آب است. فرض کنیم که آبی‌که ۱/۴ پوند درگالن نمك دارد باسرعت ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌شود، ومحلول خوب بـه‌هم زده شده با همان سرعت از مخزن خارج می‌شود. عبارتی که مقدار نمك $Q(t)$ موجود درمخزن را درزمان t نشان می‌دهد بـه‌دست آورید.

میزان تغییر نمك موجود درمخزن درزمان t، یعنی $Q'(t)$ باید برابر تفاضل مقدار نمك وارده ومقدارنمکی کدخارج می‌شود باشد. میزان ورودنمك برابر

$$\frac{۱}{۴}\text{lb/gal}\times ۳\text{gal/min}$$

است. میزان خـروج نمك برابر است بـا $(Q(t)/۱۰۰)\text{lbs/gal}\times ۳\ \text{gal/min}$. بدین‌سان فرایند مزبور ازمعادلهٔ دیفرانسیل

$$Q'(t)=\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۱۰۰}Q(t) \qquad (۱۳)$$

تبعیت می‌کند. معادلهٔ (۱۳) خطی است و جواب آن عبارت است از

$$Q(t)=۲۵+ce^{-۰٫۰۳t} \qquad (۱۴)$$

که درآن c ثابت دلخواهی است. شرط اولیهٔ

$$Q(\text{۰})=Q_\text{۰} \qquad (\text{۱۵})$$

مستلزم آن است که $c=Q_\text{۰}-\text{۲۵}$ ، از آنجا

$$Q(t)=\text{۲۵}(\text{۱}-e^{-\text{۰٫۰۳}t})+Q_\text{۰}e^{-\text{۰٫۰۳}t} \qquad (\text{۱۶})$$

جملهٔ دوم طرف دوم رابطهٔ (۱۶) نمایشگر آن قسمت از نمك اولیه است که درزمان t در مخزن باقی‌مانده است. این جمله باگذشت زمان با خارج شدن محلول اولیه ازمخزن بسیار کوچك می‌شود. جملهٔ اول طرف دوم رابطهٔ (۱۶) مقدار نمکی راکــه دراثر این جریان در زمان t درمخزن به‌وجود آمده است نشان می‌دهد. هنگامی‌که t بزرگ شود، این جمله به‌مقدار ثابت ۲۵ پوند نزدیك می‌شود. ازلحاظ فیزیکی نیز روشن است که حد Q هنگامی که محلول اولیه به‌تدریج جای خودرا به‌محلول وارده باغلظت ۱/۴ پوند بر گالن می‌دهد برابر همین مقدار است.

مثال ۴ (اپیدمی). برای اپیدمیها نظریهٔ ریاضی مبسوطی وجود داردکــه براساس نکات‌کلی زیر است. فرض‌کنیم جامعه‌ای از n عضو تشکیل شده که شامل p نفر مبتلا و q نفر دیگر درمعرض ابتلا می‌باشند، و $n=p+q$. ازطرف دیگر،فرض‌کنیم x نسبت‌افراد بیمار و y نسبت افراد سالم باشد. در این صورت $x=p/n$ ، $y=q/n$ و $x+y=\text{۱}$. اگر n بزرگ باشد می‌توان x و y را بــه‌عنوان متغیرهای پیوسته درنظرگرفت، درایــن صورت میزان شیوع بیماری برابر dx/dt خواهد بــود. براساس این فرض معقول‌کــه بیماری دراثر تماس بین افراد بیمار وسالم جامعه شیوع پیدا می‌کند، dx/dt بــا تعداد این تماسها متناسب خواهد بود. اگر افراد هردوگروه آزادانه بین هم در حرکت باشند، تعداد تماسها به نوبــهٔ خود متناسب بــا حاصل‌ضرب x و y می‌شود. بدین‌سان به معادلــهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt}=\beta xy$$

یا

$$\frac{dx}{dt}=\beta x(\text{۱}-x) \qquad (\text{۱۷})$$

می‌رسیم، که درآن β ضریب تناسب و مثبت است. شرط اولیهٔ عبارت است از

$$x(\text{۰})=x_\text{۰} \qquad (\text{۱۸})$$

که درآن $x_\text{۰}$ نسبت افراد بیمار در $t=\text{۰}$ است.

معادلهٔ (۱۷) جدایی‌پذیر است، ومی‌توان آن را به‌صورت

$$\frac{dx}{x(\text{۱}-x)}=\beta\, dt$$

یا با استفاده از بسط به‌کسرهای جزئی، به‌صورت

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right) dx=\beta\, dt$$

نوشت. بنابراین

$$\ln x-\ln(1-x)=\beta t+C \tag{19}$$

توجه شود که x و $x-1$ اساساً مثبت‌اند و نیازی به‌قدر مطلق نیست. از رابطهٔ (۱۹) نتیجه می‌شود که

$$\frac{x}{1-x}=ce^{\beta t} \tag{20}$$

که در آن $c=e^C$. شرط اولیه مستلزم آن است که $c=x_0/(1-x_0)$. چون این مقدار c را در رابطهٔ (۲۰) قرار دهیم، و آن را نسبت به x حل کنیم، خواهیم داشت

$$x=\frac{x_0 e^{\beta t}}{1-x_0+x_0 e^{\beta t}}=\frac{x_0}{x_0+(1-x_0)e^{-\beta t}} \tag{21}$$

اگر $x_0>0$، آنگاه مقدار واقعی x_0 هرچه باشد، $x\to 1$ هنگامی که $t\to\infty$. بدین‌سان، هرقدر هم که تعداد بیماران اولیه کم باشد، سرانجام اپیدمی درسراسر کل جامعه شیوع می‌یابد.

روشن است که این مدل ریاضی از برخی جنبه‌ها با واقعیت مطابقت ندارد. یکی آنکه، اگر بیماری مزبور مهم تلقی شود، طبعاً با ایجاد قرنطینه‌ای مناسب، فعالیت افراد بیمار را محدود می‌کنند. ازطرف مقامات بهداری هم برای محدودکردن امکان تماس بین افراد بیمار و سالم قرنطینهٔ دیگری نیز درنظرگرفته می‌شود. دیگر آنکه، هر بیماری فقط برای مدت محدودی مسری است، اما دراین مدل فرض شده است که افراد بیمار به‌طور نامحدودی به‌همین وضع باقی می‌مانند. همهٔ این عوامل موجب می‌شوندکه شیوع بیماری ازمیزانی که دربالا پیش‌بینی شده است بطیئتر باشد.

برخی از بیماریها (مانند مالاریا) با تماس مستقیم شیوع نمی‌یابد، وبه‌توسط حشره یا حیوانی انتقال پیدا می‌کند. مدل ریاضی شیوع این بیماریها ازآنچه دراین مثال آمد بسیار پیچیده‌تر است. حالت دیگری راکه از نوع تب تیفوئید است در مسئلهٔ ۱۹ بررسی کرده‌ایم. بالاخره اغلب لازم می‌آیدکه تأثیرات تصادفی را دربررسی اپیدمیها منظورکنیم و از مفاهیم مناسب نظریهٔ احتمالات استفاده‌کنیم.

مسائل

۱. فرض کنیم که مبلغ S_0 را با نرخ بهرهٔ سالانهٔ r به‌بانک سپرده‌ایم، وبهره به‌طور پیوسته به‌سرمایه اضافه می‌شود.

(الف) مطلوب است مدت T به‌صورت تابعی از نرخ بهره r برای آنکه مبلغ اولیه دو برابر شود.

(ب) اگر $r=5$ درصد باشد، T را بیابید.

(ج) اگر سرمایهٔ اولیه ظرف ۱۰ سال دو برابر شود، نرخ بهره را بیابید.

۲. جوانی بدون سرمایهٔ اولیه سالانه k ریال با نرخ بهرهٔ سالانهٔ r سرمایه‌گذاری می‌کند. فرض کنیم که بهره به‌طور پیوسته به‌سرمایه اضافه شود وسرمایه‌گذاریها نیز به‌طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) مبلغ اندوختهٔ $S(t)$ را در زمان t بیابید.

(ب) اگر $r = ۵$ درصد باشد، k را طوری تعیین کنید که اندوخته پس‌از چهل سال یك میلیون ریال شود.

۳. در هریك از برنامه‌های سرمایه‌گذاری زیر مبلغ اندوخته را پس از ۲۰ سال تعیین کنید. فرض می‌کنیم که نرخ بهره ۵ درصد و به‌طور پیوسته به سرمایه اضافه شود. و سرمایه‌گذاریها به‌طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) بدون سرمایهٔ اولیه، و ۱۵۰۰۰۰ ریال در سال به‌مدت ۲۰ سال.

(ب) سرمایهٔ اولیهٔ ۱۰۰۰۰۰۰ ریال، و ۱۰۰۰۰۰ ریال درسال به‌مدت ۲۰سال.

(ج) سرمایهٔ اولیهٔ ۲۰۰۰۰۰۰ ریال، و ۵۰۰۰۰ ریال درسال به‌مدت ۲۰ سال.

(د) سرمایهٔ اولیهٔ ۳۰۰۰۰۰۰ ریال، وبدون سرمایه‌گذاری اضافی دیگر.

توجه شود که در هرحالت مبلغ کل سرمایه‌گذاری شده ۳۰۰۰۰۰۰ ریال است.

۴. بازنشسته‌ای مبلغ $S(t)$ ریال را بانرخ بهرهٔ سالانهٔ r سرمایه‌گذاری کرده است، و بهره به‌طور پیوسته به‌سرمایه اضافه می‌شود. برای هزینه‌های زندگی بـه میزان k ریال درسال برداشت می‌کند. فرض کنیم که برداشتها به‌طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) اگر مقدار اولیهٔ سرمایه‌گذاری S_0 باشد، مقدار $S(t)$ را درزمان t بیابید.

(ب) فرض کنیم که S_0 و r داده شده‌اند، دراین‌صورت‌میزان برداشت k_0 را طوری تعیین کنید که $S(t)$ ثابت باقی بماند.

(ج) اگر k از مقدار k_0 که در قسمت (ب) تعیین شد بزرگتر باشد، آنگاه $S(t)$ تنزل می‌کند وسرانجام صفر می‌شود. مطلوب است تعیین زمان T که درآن $S(t) = ۰$.

(د) مطلوب است تعیین T اگر $r = ۵$ درصد و $k = ۲k_0/۳$ باشد.

(ه) فرض کنیم که مقداراولیهٔ سرمایه‌گذاری درهنگام بازنشستگی شخصی S_0 باشد، و بخواهد که برداشت سالانه به‌میزان k از T سال تجاوز نکند. ماکزیمم میزان برداشت ممکن را بیابید.

(و) فرض کنیم که نرخ بهره ۵ درصد است. مقدار سرمایه‌گذاری اولیه چقدر باید باشد، تا بتوان به‌مدت ۲۰ سال سالانه مبلغ ۵۰۰۰۰۰ ریال برداشت کرد؟

۵. فرض کنیم که میزان افزایش ثروت شخصی متناسب با مجذور مقدار موجود آن است. اگر ثروتش درسال گذشته ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ ریال وامروز ۲۰۰۰۰۰۰۰۰ ریال باشد، ثروت او درشش ماه بعد وهمچنین دوسال دیگر چقدر خواهد بود؟

۶. تجزیهٔ ایزوتوپ رادیواکتیوپلوتونیم ۲۴۱ به‌گونه‌ای‌است که درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt} = -۰٫۰۵۲۵Q$$

صدق می‌کند، و درآن Q برحسب میلی‌گرم و t برحسب سال است.

(الف) τ ، نیمه عمر پلوتونیم ۲۴۱ را تعیین‌کنید.

(ب) اگر امروز ۵۰ میلی‌گرم پلوتونیم موجود باشد، پس از ده سال چقدر از آن باقی خواهد ماند؟

۰۷ میزان تجزیهٔ اینشتانیوم ۲۵۳ بـا مقدار موجود آن متناسب است. مطلوب است تعیین نیمه عمر τ ایـن ماده درصورتی‌کـه بدانیم در ۷ر۱۱ روز ثلث جرم خود را از دست می‌دهد.

۰۸ نیمه عمر رادیوم ۲۲۶ برابر ۱۶۲۰ سال است. مطلوب است تعیین مدت لازم برای آنکه این ماده به ۴/۳ مقدار اولیه خود تقلیل یابد.

۰۹ تاریخ یابی به‌وسیلهٔ رادیوکربن. یکی ازوسائل مهم درپژوهشهای باستانشناسی تاریخ یابی با رادیو کربن است. بدین وسیله عمر برخی از بقایای گیاهی وچوبی را تعیین می‌کنند و از آنجا عمر استخوانهای انسانی وحیوانی یا مصنوعاتی راکه درهمان سطوح مدفون‌اند به‌دست می‌آورند. این روش را شیمیدان آمریکایی ویلاردلیبی[1] دراوایل ۱۹۵۰ به‌وجود آورد وبدین سبب جایزهٔ نوبل شیمی در ۱۹۶۰ بـه‌او تعلق‌گرفت. تاریخ‌یابی با رادیوکربن مبتنی‌براین حقیقت است‌که دربرخی‌ازبقایای‌چوبی وگیاهی مقداری‌کربن ۱۴ کـه ایزوتوپ رادیواکتیوکربن است باقی مانده است. این ایزوتوپ درطول حیات‌گیاه اندوخته می‌شود واز هنگام مرگ او شروع به‌تجزیه شدن می‌کند. چون‌کربن ۱۴ دارای نیمه عمر طولانی (تقریباً ۵۷۴۵ سال) است، درنتیجه بعداز هزاران سال بازهم مقادیری از آن‌که قابل اندازه‌گیری باشد باقی می‌ماند. لیبی نشان دادکـه اگر تقریباً ۰۰۲ر۰ یا بیشتر از مقدار اولیهٔ‌کربن ۱۴ هنوز وجود داشته باشد، بـا اندازه‌گیریهای آزمایشگاهی مناسب می‌توان دقیقاً نسبتی از مقدار اولیهٔ کربن ۱۴ را کـه باقی مانده است تعیین‌کرد. به‌عبارت دیگر، اگر Q_0 مقدار اولیهٔ‌کربن ۱۴ و $Q(t)$ مقدار آن در زمان t باشد، آنگاه می‌توان نسبت $Q(t)/Q_0$ را حداقل هنگامی‌که بسیارکوچك نباشد تعیین‌کرد.

(الف) فرض‌کنیم کـه Q درمعادلـهٔ دیفرانسیل $Q' = kQ$ صدق می‌کند، k ضریب ثابت تجزیه را برای‌کربن ۱۴ بیابید.

(ب) اگر $Q(0) = Q_0$ ، عبارت $Q(t)$ را برحسب t بیابید.

(ج) فرض‌کنیم کـه بقایایی‌کشف شده است که مقدارکربن ۱۴، موجود درآن ۲۰ درصد مقدار اولیه است. عمر این بقایا را تعیین‌کنید.

۰۱۰ فرض‌کنیم که میزان تغییر جمعیت زمین متناسب باجمعیت موجود باشد.(فرض دقیقتری دربارهٔ قانون رشد جمعیت در مسئلهٔ ۱۱ آمده است.) علاوه براین بـرآورد شده است‌که در زمان $t = 0$ (۱۶۵۰ بعداز میلاد) جمعیت زمین ۶۰۰ میلیون (6.0×10^8) بوده‌است، ودرزمان $t = 300$ (۱۹۵۰ بعدازمیلاد) جمعیت‌آن به ۸ر۲ بیلیون(2.8×10^9) رسیده است. مطلوب است تعیین عبارتی که جمعیت زمین را برحسب زمان به‌دست دهد.

---

1. Willard Libby (1908–)

فرض کنیم کـه امکانات زمین حداکثر بـرای ۲۵ بیلیون ($۲٫۵ \times ۱۰^{۱۰}$) نفر کفایت کند، چه زمانی این حد فرا می‌رسد؟

۱۱. دریك جمعیت مجزا شدهٔ $p(t)$ ، میزان رشد جمعیت dp/dt تابعی ازجمعیت است، یعنی

$$\frac{dp}{dt} = f(p)$$

(الف) ساده‌ترین عبارتی که می‌توان برای $f(p)$ درنظر گرفت، $f(p) = \epsilon p$ است، که درآن ϵ ثابت مثبتی است. دراین حالت $p(t)$ را اگر $p(۰) = p_۰$ ، بیابید. حد $p(t)$ را هنگامی که $t \to \infty$ پیدا کنید.

(ب) فرض دیگری که دربسیاری ازموارد بهتراست $f(p) = \epsilon p - \sigma p^۲$ می‌باشد، که درآن ϵ و σ دوثابت مثبت‌اند. ممکن است درمواردی جملهٔ $-\sigma p^۲$ لازم باشد،مثلاً، هنگامی کـه شرایط تراکم به‌ازای مقادیر بزرگ p موجب افزایش میزان مرگ و میر و کاهش میزان موالید گردد. اگـر $p(۰) = p_۰$ ، بـرای جمعیت عبارتی برحسب t بیابید. جمعیت حدی را هنگامی‌که $t \to \infty$ ، بیابید. این نتایج را بـا آنچه در قسمت (الف) به‌دست آمده است مقایسه‌کنید. توجه شود، حتی اگر σ بسیارکوچك باشد، به‌محض آنکه جملهٔ درجهٔ دوم در $f(p)$ منظور شود، طبیعت جواب به‌طور اساسی تغییرمی کند (به‌ازای مقادیر بزرگ p). این بدان علت است کـه dp/dt با افزایش p تنزل می کند و حدآن هنگامی که p از طرف چپ بـه ϵ/σ میل می کند برابر صفر است. بدین‌سان p نمی‌تواند ازاین مقدار حدی تجاوزکند.

۱۲. براساس مشاهدات تجربی معلوم شده است بـا تقریبی کـه در بسیاری موارد رضایت‌بخش‌است، میزان تغییرات حرارت سطحی شیئی با اختلاف حرارت‌آن باحرارت محیط اطراف، متناسب‌است. گاهی این ارتباط را قانون سردشدن نیوتن می‌نامند. بدین‌سان اگر $u(t)$ حرارت شیئی درزمان t و $u_۰$ حرارت ثابت محیط باشد، رابطهٔ

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_۰)$$

که درآن k ضریب ثابت تناسب است برقرار می‌باشد.

(الف) جوابی راکه درشرط اولیهٔ $u(۰) = u_۱$ صدق می‌کند بیابید.

(ب) فرض‌کنیم در اتاقی که حرارت آن $۷۰^\circ F$ است، یك فنجان قهوه در آغاز $۲۰۰^\circ F$ باشد، و یك دقیقهٔ بعد حرارت آن بـه $۱۹۰^\circ F$ برسد. مطلوب است تعیین مدت لازم برای آنکه قهوه به‌حرارت $۱۵۰^\circ F$ برسد (با این فرض که می‌توان قانون سرد شدن نیوتن را به‌کار برد).

۱۳. فرض‌کنیم که‌قطرهٔ باران کروی به‌میزانی متناسب بامساحت سطح آن تبخیرشود. اگر شعاع آن درآغاز ۳ میلی‌متر باشد، و یك ساعت بعد به ۲ میلی‌متر تقلیل یابد، مطلوب

است تعیین عبارتی برای شعاع قطرهٔ باران برحسب زمان.

۰۱۴ مخزنی که در بعضی از آزمایشهای هیدرودینامیکی به‌کار می‌رود، بعد از یك آزمایش، حاوی ۲۰۰ لیتر محلول رنگی با غلظت ۱ گرم درلیتر است. برای‌آنکه مخزن را برای آزمایش بعدی تمیز وآماده‌کنیم، جریان آب تازه‌ای به میزان ۲ لیتر در دقیقه وارد مخزن می‌کنیم و درحالی‌که آن را خوب به هم می‌زنیم به همین میزان ازمخزن خارج می‌شود. مطلوب است تعیین مدت زمان لازم برای آنکه غلظت رنگ در مخزن به ۱ درصد مقدار اولیه برسد.

۰۱۵ مخزنی درآغاز حاوی ۱۰۰ گالن‌آب خالص است. آبی‌که حاوی ۱/۲ پوند نمك درگالن است به میزان ۲ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌شود، و مخلوط به‌همین میزان ازمخزن خارج می‌شود. بعد از ۱۰ دقیقه این عمل را متوقف‌کرده وآب خالص به میزان ۲ گالن در دقیقه واردمخزن می‌کنیم ومخلوط به‌همان میزان ازمخزن خارج می‌شود. مقدار نمکی راکه پس از۲۰ دقیقه درمخزن باقی می‌ماند بیابید.

۰۱۶ مخزنی به ظرفیت ۵۰۰ گالن، درآغاز حاوی ۲۰۰ گالن آب و ۱۰۰ پوند نمك محلول می‌باشد. آبی‌که حاوی ۱ پوند نمك درگالن است به میزان ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن شده ومخلوط به میزان ۲ گالن در دقیقه خارج می‌شود. مقدار نمك موجود درمخزن را برای هرزمان، قبل ازپرشدن مخزن بیابید. غلظت نمك موجود درمخزن را (برحسب پوند درگالن) درلحظهٔ لبریزشدن آن پیداکنید. این غلظت را با غلظت حدی نظری مربوط به‌حالتی‌که ظرفیت مخزن بینهایت باشد مقایسه‌کنید.

۰۱۷ دریك واکنش شیمیایی رتبهٔ دوم با تأثیرمتقابل (برخورد) یك مولکول ازمادهٔ P ویك‌مولکول ازمادهٔ Q یك مولکول‌ازمادهٔ جدید X ایجاد می‌شود، بانماد $P+Q \to X$. فرض‌کنیم‌که غلظت اولیهٔ مواد P و Q به‌ترتیب p و q باشد، وغلظت X در زمان t را $x(t)$ می‌گیریم. آنگاه غلظت P و Q در زمان t برابر $p-x(t)$ و $q-x(t)$ است، وپیشرفت واکنش با معادلهٔ

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(p-x)(q-x)$$

بیان می‌شود، که درآن α ثابت مثبتی است.

(الف) اگر $x(0)=0$، $x(t)$ را بیابید.

(ب) اگر مواد P و Q یکی باشند، آنگاه

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(p-x)^2$$

اگر $x(0)=0$، $x(t)$ را بیابید.

۰۱۸ فرض‌کنیم‌که در واکنش شیمیایی معینی مادهٔ P به مادهٔ X تبدیل می‌شود. فرض‌کنیم غلظت اولیهٔ P برابر p وغلظت X در زمان t برابر $x(t)$ باشد. دراین‌صورت غلظت P در زمان t برابر $p-x(t)$ است. علاوه براین فرض‌کنیم‌که واکنش، خود

کاتالیزور باشد، یعنی، واکنش بـا ماده‌ای که ایجاد می‌شود تشدید شود. بنابراین dx/dt هم با x وهم با $p-x$ متناسب است، و

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x(p-x)$$

که در آن α ثابت مثبتی است. اگر $x(0)=x_0$ ، $x(t)$ را بیابید.

۱۹. برخی از بیماریها (مانند تیفوئید) عموماً به‌وسیلهٔ حاملین (یعنی، افرادی کـه علایم بیماری در آنها دیده نمی‌شود بیماری را انتقال می‌دهند) شیوع پیدا می‌کنند. فرض کنیم x و y به‌ترتیب چگالی افراد حامل وسالم مستعد درجامعه در زمان t باشد. فرض کنیم که میزان جداکردن حاملین ازجامعه برابر β باشد، به‌طوری‌که

$$\frac{dx}{dt}=-\beta x \qquad \text{(یك)}$$

همچنین فرض‌کنیم که میزان شیوع بیماری با حاصلضرب x و y متناسب است. یعنی

$$\frac{dy}{dt}=-\alpha xy \qquad \text{(دو)}$$

(الف) با حل معادلهٔ (یك) که مقید به‌شرط اولیهٔ $x(0)=x_0$ است، x را برحسب t تعیین کنید.

(ب) با استفاده ازنتیجهٔ قسمت (الف)، y را بـا حل معادلهٔ (دو)، مقید بـه‌شرط اولیهٔ $y(0)=y_0$ ، برحسب t بیابید.

(ج) نسبت افرادی ازجامعه راکه به این اپیدمی مبتلا نمی‌شوند، یعنی، مقدار حدی y را هنگامی که $t\to\infty$ تعیین‌کنید.همچنین تغییرات آن را برحسب α و β بررسی‌کنید.

۲۰. فرض‌کنیم‌اطاقی‌که ۱۲۰۰ فوت مکعب هوا دارد، درابتدا فاقد منواکسیدکربن است. ازلحظهٔ $t=0$ دود سیگاری که دارای ۴ درصد منواکسیدکربن است به‌میزان ۰٫۱ فوت مکعب در دقیقه وارد اطاق می‌شود، وبا هوای‌اطاق خوب مخلوط شده به همان میزان ازاطاق خارج می‌شود.

(الف) مطلوب است تعیین عبارت $x(t)$ غلظت منواکسیدکربن دراطاق درهر زمان $t>0$.

(ب) قـرارگرفتن مدت طولانی در معرض منواکسیدکربن حتی بـا غلظت انـدك ۰٫۰۰۰۱۲ برای بدن انسان مضر است. زمان τ راکه غلظت به‌این مقدار می‌رسد، بیابید.

۲۱. دریاچه‌ای با حجم ثابت V راکه در زمان t مقدارآلودگی‌آن برابر $Q(t)$ است درنظر می‌گیریم. این آلودگی درسراسر دریاچه به‌طور یکنواخت توزیع شده وغلظت‌آن برابر $c(t)=Q(t)/V$ است. فرض‌کنیم کـه آبی با غلظت آلودگی k به میزان r وارد دریاچه می‌شود، وبه همین میزان آب از دریاچه خارج می‌گردد. همچنین فـرض می‌کنیم که آلودگیها بـه میزان ثابت P مستقیماً به دریاچه افزوده می‌شود. توجه شود که دراین

فرضها از عوامل متعددی که ممکن است در بعضی حالتها مهم باشند صرف‌نظر کرده‌ایم، مثلاً افزایش وکاهش آب در اثر بارندگی، جذب، وتبخیر، طبقه طبقه شدن آب در اثر اختلاف حرارت در دریاچه‌های عمیق، تمایل بی‌نظمیهای خط ساحلی در ایجاد دهانه‌های باحفاظ، و این نکته که رسوب آلودگیها درسراسر دریاچه یکنواخت نیست، و (معمولاً) در نقاط مجزایی در اطراف سواحل صورت می‌گیرد. نتایج زیر باید بـا توجه بـه حذف این گونه عوامل تعبیر شوند.

(الف) اگر در زمان $t = 0$ غلظت آلودگی برابر c_0 باشد، عبارت غلظت $c(t)$ را برحسب زمان بیابید. غلظت حدی هنگامی که $t \to \infty$ چقدر است؟

(ب) اگر افزایش آلودگیها به دریاچه متوقف شود ($k = 0$ و $P = 0$ به ازای $t > 0$)، فاصلهٔ زمانی T را برای آنکه غلظت آلودگی بـه ۵۰ درصد مقدار اولیه، به ۱۰ درصد مقدار اولیه تقلیل یابد تعیین کنید.

(ج) جدول ۲.۲ حاوی داده‌هایی[1] دربارهٔ چند دریاچهٔ بزرگ است. از قسمت (ب) بااستفاده از این داده‌ها زمان T را برای آنکه آلودگی هریك از این دریاچه‌ها به ۱۰ درصد مقدار اولیه تقلیل یابد بیابید.

جدول ۲.۲

دریاچه	$V(\text{km}^3 \times 10^{-3})$	$r(\text{km}^3/\text{yr})$
سوپریور[2]	۱۲٫۲	۶۵٫۲
میشیگان[3]	۴٫۹	۱۵۸
اری[4]	۰٫۴۶	۱۷۵
انتاریو[5]	۱٫۶	۲۰۹

۲۲. مسیرهای قائم. یك مسئلهٔ هندسی متداول تعیین خانوادهٔ خمهایی است که در هر نقطه خانوادهٔ مفروضی از خمها را بـه طور قائم قطع کند. در این صورت خمهـای هر خانواده را مسیرهای قائم خانوادهٔ دیگر می‌نامند.

(الف) خانوادهٔ سهمیهای

(یك) $$y = kx^2$$

---

۱. این مسئله مبتنی برمقالهٔ «جابه‌جا شدن طبیعی آلودگیهـای دریاچـه‌های بـزرگ» از R.H. Rainey درمجلهٔ *Science*، ۱۵۵، ۱۹۶۷، صفحه‌هـای ۱۲۴۲ـ۱۲۴۳ می‌بـاشد. اطلاعات جدول از این منبع است.

2. Superior 3. Michigan 4. Erie 5. Ontario

راکه درآن k یك مقدارثابت است درنظر می‌گیریم. نمودار معادلهٔ (یك) را به‌ازای چند مقدار k رسم کنید. عبارتی برای شیب سهمی ماربر نقطهٔ مفروض $(x\ ,\ y)$ بیابیدکه‌شامل مختصات $(x\ ,\ y)$ نقطه باشد، و به پارامتر k بستگی نداشته باشد.

راهنمایی: ازمعادلهٔ (یك) مشتق بگیرید و k را حذف‌کنید.

(ب) با استفاده ازاین نکته‌که شیبهای خمهای عمود برهم منفی معکوس یکدیگرند، معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای قائم معادلهٔ (یك) را بنویسید.

(ج) معادله‌ای راکه درقسمت (ب) به‌دست آمد حل کنید، ومسیرهای قائم را تعیین کنید. تعدادی ازخمهای این خانواده را رسم‌کنید.

۲۳. درهریك ازحالتهای زیر با استفاده از روش مسئلهٔ ۲۲ مسیرهای قائم خانوادهٔ خمهای داده شده را بیابید. طرح اجمالی خانوادهٔ داده شده ومسیرهای قائم آنها را رسم کنید.

(الف) خانوادهٔ هذلولیهای $xy=c$.

(ب) خانوادهٔ دایره‌های $(x-c)^2+y^2=c^2$

(ج) خانوادهٔ بیضیهای $x^2-xy+y^2=c^2$

(د) خانوادهٔ سهمیهای $2cy+x^2=c^2\ ,\ c>0$

۲۴. اگر درصفحهٔ xy دوخط مستقیم بترتیب بـا شیبهای m_1 و m_2 یکدیگـر را به زاویهٔ θ قطع‌کنند، نشان دهیدکه

$$(\operatorname{tg}\theta)(1+m_1m_2)=m_2-m_1$$

با استفاده ازاین نکته، خانوادهٔ خمهایی راکه هریك ازخانواده‌های زیر را به زاویهٔ $45°$ قطع می‌کنند بیابید. درهرحالت طرح اجمالی دوخانوادهٔ خمهای مزبور را رسم‌کنید.

(الف) $x-2y=c$ (ب) $x^2+y^2=c^2$

۲۵. درصفحه همهٔ خمهایی راکه درهرنقطهٔ $(x\ ,\ y)$ آنها، خط مماس ازنقطهٔ ثابت $(a\ ,\ b)$ می‌گذرد، بیابید.

۲۶. خط قائم درهرنقطهٔ $(x\ ,\ y)$ خم مفروضی ازنقطهٔ $(0\ ,\ 2)$ می‌گذرد. اگر این خم شامل نقطهٔ $(2\ ,\ 3)$ باشد، معادلهٔ آن را بیابید.

۲۷. درصفحه همهٔ خمهایی راکه درهرنقطهٔ خم، قطعهٔ مماس محصور بین نقطهٔ تماس ومحور x ها به وسیلهٔ محور y ها نصف می‌شود بیابید.

۱۰.۲ مکانیك مقدماتی

برخی ازمهمترین کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول درحوزهٔ مکانیك مقدماتی دیده می‌شونـد. دراین بند به بـررسی مسائلی مربوط بـه تغییرمکان جسم درامتداد خط مستقیم می‌پردازیم. فرض می‌کنیم‌که این اجسام ازقانون حرکت نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) تبعیت

می‌کنند: حاصل‌ضرب جرم درشتاب برابر است با نیروی خارجی. به بیان نمادی

$$F = ma \qquad (۱)$$

که در آن F نیروی خارجی، m جرم جسم، و a شتاب جسم درامتداد F است. اگر جرم جسم ثابت باشد، معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dP}{dt} \qquad (۲)$$

نوشت، که در آن v سرعت، و $P = mv$ اندازهٔ خطی حرکت یا اندازهٔ حرکت است.

برای واحدها دو دستگاه متداول است. در دستگاه متری، یا cgs واحدهای اساسی عبارتند ازسانتی‌متر (طول)، گرم (جرم)، وثانیه (زمان). دین واحد نیرو، ازمعادلهٔ (۱) به‌صورت نیروی لازم برای ایجاد شتابی برابر ۱ سانتی‌متر برمجذور ثانیه‌درجرمی برابر ۱ گرم تعریف می‌شود. ازطرف دیگر، در دستگاه انگلیسی واحدهای اساسی عبارتند از فوت (طول)، پوند (نیرو)، و ثانیه (زمان). واحد جرم، یعنی اسلاگ از معادلهٔ (۱) به عنوان جرمی که تحت ۱ پوند نیرو شتابی برابر ۱ فوت برمجذور ثانیه پیدا می‌کند تعریف می‌شود.

اکنون سقوط آزاد جسمی را درخلاْ[۴] و درمجاورت سطح زمین درنظر می‌گیریم به طوری‌که تنها نیروی قابل توجه مؤثر برآن همان وزن جسم‌ناشی ازمیدان جاذبهٔ زمین باشد. آنگاه معادلهٔ (۱) به صورت

$$w = mg \qquad (۳)$$

درمی‌آید، که درآن w وزن جسم و g شتاب ناشی ازجاذبه را نشان می‌دهد.

حتی اگر جرم جسم ثابت بماند، وزن وشتاب ثقلی آن برحسب مسافت جسم از مرکز میدان جاذبهٔ زمین تغییر می‌کند. درسطح دریا مقدار g به‌طور تجربی وتقریبی، برابر ۳۲ فوت برمجذور ثانیه (دستگاه انگلیسی)، یا ۹۸۰ سانتی‌متر برمجذور ثانیه (دستگاه متری) تعیین شده است. معمول براین است که شتاب ثقلی در سطح دریا را با g نشان می‌دهند، بدین‌سان g یك مقدار ثابت است. با این تعبیر، فقط درسطح دریا می‌توان معادلهٔ (۳) را دقیق دانست.

می‌توان عبارت کلی وزن جسمی به‌جرم m را ازقانون مجذور عکس مسافت نیوتن به‌دست آورد. اگر R شعاع زمین، و x ارتفاع ازسطح دریا باشد، آنگاه

$$w(x) = \frac{K}{(x+R)^{۲}}$$

که درآن K مقدار ثابتی است. در $x = ۰$ (سطح دریا)، داریم $w = mg$، درنتیجه $K = mgR^{۲}$، و

$$w(x)=\frac{mgR^{2}}{(x+R)^{2}} \qquad (۴)$$

چون $(x+R)^{-2}$ را درحول $x=0$ به سری تیلر بسط دهیم، خواهیم داشت

$$w(x)=mg\left(1-2\frac{x}{R}+\cdots\right) \qquad (۵)$$

درنتیجه اگر بتوان از جمله‌های معادل با x/R در مقایسه با واحد صرف‌نظر کرد، آنگاه می‌توان به‌جای معادلهٔ (۴) تقریبی ساده‌تر یعنی معادلهٔ (۳) را قرار داد. بدین‌سان، درمورد حرکت درمجاورت سطح زمین یا هنگامی‌که دقت بسیار زیاد لازم نباشد، معمولاً کافی است ازمعادلهٔ (۳) استفاده شود. درحالتهای دیگرمانند مسائلی‌که مربوط به‌پروازهای فضایی می‌باشند ممکن است لازم آیدکه معادلهٔ (۴) یا حداقل تقریب بهتری ازمعادلهٔ (۳) مورد استفاده قرارگیرد.

دربسیاری ازحالتها نیروی خارجی F علاوه بروزن جسم شامل عوامل دیگری نیز می‌باشد. مثلاً ممکن است لازم آیدکه نیروهای اصطکاك ناشی ازمقاومت هوا یا محیطهای فراگیرندهٔ دیگر را درنظر گرفت. همچنین، ممکن است تأثیر تغییرات جرم مهم باشد، مانند حالتی‌که سفینهٔ فضایی سوخت خود را درحین پرواز مصرف می‌کند.

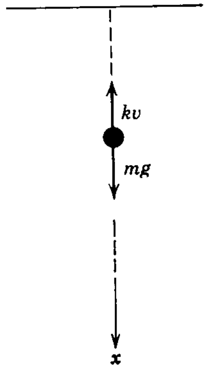
درمسائلی‌که اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد باید حرکت جسم را درمقایسه با دستگاه مختصات مناسبی بیان کرد. ما همواره خطی را کـه حرکت درامتداد آن انجام می‌گیرد به عنوان محور x ها انتخاب می‌کنیم، جهت مثبت محور x را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. هنگامی‌که‌جهت مثبت محور x مشخص شد،هرمقدار مثبت x نمایشگر تغییرمکانی دراین‌جهت است،هرمقدار مثبت $v=dx/dt$ مبین آن است‌که جسم درجهت مثبت محور x حرکت می‌کند، هرمقدار مثبت نیروی F نشان‌دهندهٔ آن است‌که نیروی مزبور درجهت مثبت محور x اثر می‌کند، وغیره. چند مسئلهٔ نمونه درمثالهای زیر آمده است.

مثال ۱. جسمی به جرم m درمحیطی‌که مقاومت آن متناسب با $|v|$، یعنی قدرمطلق سرعت لحظه‌ای جسم[۱] است ازحالت سکون بـه طور آزاد سقوط می‌کند. فرض‌کنیم‌که نیروی جاذبه ثابت باشد، موضع وسرعت جسم را درهرزمان t بیابید.

دراین حالت مناسب است‌که جهت مثبت محور x را به طرف پایین وموضع اولیهٔ جسم را بـه عنوان مبدأ اختیارکنیم (شکل ۶.۲ را ببینید). دراین صورت mg وزن جسم درجهت پایین (مثبت) اثر می‌کند، اما مقاومت $k|v|$ که درآن k ثابت مثبتی است موجب کندی حرکت می‌شود. هنگامی‌که $v>0$، مقاومت درجهت بالا (منفی) است، وبدین‌سان

---

۱. به‌طورکلی، مقاومت تـابعی ازتندی، یعنی، قدرمطلق سرعت است. فرض خطی‌بودن رابطه فقط درمورد تندیهای نسبتاً کم می‌تواند موجه باشد. درمورد تندیهای زیاد ممکن است لازم‌آید که مقاومت را متناسب با توان بالاتری از v یا حتی به‌صورت یك تابع چندجمله‌ای از $|v|$ فرض‌کنیم.



شکل ۶.۲

برابر $-kv$ می‌باشد. هنگامی‌کـه $v < 0$، مقاومت درجهت پایین اثـر می‌کند، وبازهم برابر $-kv$ است. بدین‌سان درهمهٔ حالتها قانون نیوتن را می‌توان به صورت

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv$$

یا

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \tag{۶}$$

نوشت. معادلهٔ (۶) یك معادلـهٔ خطی مرتبهٔ اول است، و دارای عـامل انتگرال‌ساز $e^{kt/m}$ می‌باشد. جواب معادلهٔ (۶) عبارت است از

$$v=\frac{mg}{k}+c_1e^{-kt/m} \tag{۷}$$

شرط اولیهٔ $v(0)=0$ مستلزم آن است‌که $c_1=-mg/k$، بدین‌سان

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-kt/m}) \tag{۸}$$

برای به دست‌آوردن موضع جسم، یعنی x، در رابطهٔ (۸) به‌جای v می‌گذاریم dx/dt، وبا انتگرال‌گیری واستفاده ازشرط اولیهٔ دوم $x(0)=0$ خواهیم داشت

$$x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-kt/m}) \tag{۹}$$

موضع وسرعت جسم درهرزمان t به‌ترتیب با روابط (۹) و (۸) داده می‌شود.

شایان توجه است‌که در رابطهٔ (۷) هنگامی‌که $t \to \infty$ سرعت به مقدار حدی

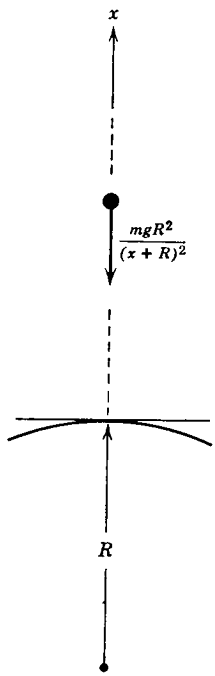
$$v_l = \frac{mg}{k} \qquad (۱۰)$$

می‌گراید. v_l سرعت حدی درسقوط آزاد ازشرایط اولیه مستقل است، وفقط به جرم جسم وضریب‌مقاومت محیط بستگی دارد. با داشتن یکی‌ازمقادیر v_l یا k می‌توان ازمعادلهٔ(۱۰) دیگری را محاسبه‌کرد. هنگامی‌که k به صفر نزدیك شود (یعنی، مقاومت‌کاهش یابد)، سرعت حدی به طور نامحدود افزایش می‌یابد.

مثال ۲. جسمی به جرم ثابت m با سرعت اولیهٔ v_0 ازسطح زمین به طرف بالا پرتاب شده است. فرض می‌کنیم که مقاومت هوا وجود نداشته باشد. اما تغییرات میدان جاذبهٔ زمین را برحسب ارتفاع درنظر می‌گیریم، مطلوب است تعیین‌کوچکترین سرعت اولیه‌ای‌که به ازای آن جسم دیگر به زمین برنگردد. این همان سرعتی است‌که آن را «سرعت فرار» می‌نامند.

جهت مثبت محور x را به طرف بالا، ومبدأ را برسطح زمین اختیار می‌کنیم (شکل ۷.۲ را ببینید). تنها نیروی مؤثر برجسم وزن آن است‌که از رابطهٔ (۴) به‌دست می‌آید. و درجهت پایین اثر می‌کند. بدین‌سان معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2} \qquad (۱۱)$$



شکل ۷.۲

وشرط اولیهٔ

$$v(0)=v_0 \tag{۱۲}$$

است. چون نیروی موجود درطرف دوم معادلهٔ (۱۱) فقط تابعی از x است، مناسبتر است که به جای t، x را متغیر مستقل بگیریم. این‌کار مستلزم آن است‌که dv/dt را با استفاده ازقاعدهٔ زنجیری مشتق‌گیری برحسب dv/dx بیان‌کنیم، بدین‌سان

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx} \tag{۱۳}$$

ومعادلهٔ (۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{gR^2}{(x+R)^2} \tag{۱۴}$$

با جداکردن متغیرها وانتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{gR^2}{x+R}+c \tag{۱۵}$$

چون هنگامی‌که $t=0$، داریم $x=0$، بنابراین می‌توان به‌جای شرط اولیهٔ (۱۲) که متناظر به $t=0$ است، شرط $v=v_0$ به ازای $x=0$ را قرار داد. این مستلزم آن است‌که $c=\frac{1}{2}v_0^2-gR$، بنابراین

$$v^2=v_0^2-2gR+\frac{2gR^2}{x+R} \tag{۱۶}$$

برای تعیین سرعت فرار باید قیدکردکه سرعت v حاصل از معادلهٔ (۱۶) بدازای همهٔ مقادیر (مثبت) x مثبت بمانند. این شرط هنگامی برقرار است‌که داشته باشیم $v_0^2\geqslant 2gR$. بدین‌سان سرعت فرار v_e با رابطهٔ

$$v_e=(2gR)^{1/2} \tag{۱۷}$$

داده می‌شود. اندازهٔ v_e تقریباً برابر ۹ر۶ میل برثانیه است.

درمحاسبهٔ سرعت فرار $v_e=(2gR)^{1/2}$ ازمقاومت هوا صرف‌نظر شده‌است. سرعت فرار واقعی، که شامل تأثیر مقاومت هوا است، تا اندازه‌ای بزرگتر است. ازطرف دیگر، اگر جسم را قبل ازپرتاب به ارتفاع قابل ملاحظه‌ای ازسطح دریا بالا ببریم سرعت فرار مؤثر به‌طور قابل‌توجهی کاهش می‌یابد. بدین وسیله نیروی جاذبه واصطکاك هردو تقلیل پیدا می‌کند، به ویژه، مقاومت هوا با افزایش ارتفاع سریعاً کاهش می‌یابد.

اجسام با جرم متغیر. درمورد برخی ازسفینه‌های فضایی، جرم اولیهٔ m_0 شامل ذخیرهٔ مهمی سوخت است که درحین پرواز مصرف می‌شود ولازم است تغییرجرم سفینه‌را درنظر گرفت. برای آن‌که معادلهٔ (۲) رادراین مورد به‌کاربریم باید علاوه برمقدارحرکت موشك، خروج گازهای حاصل ازمصرف سوخت را نیز به حساب آورد. فرض می‌شودکه گازهای خروجی نسبت به سفینه دارای سرعت ثابت u باشند، وجرم کل دستگاه سفینه و سوخت (با احتساب گازهای خروجی) ثابت باقی می‌ماند. اگر در لحظهٔ t جرم سفینه و محمولهٔ آن $m(t)$ وجرم گازهای خروجی $m_e(t)$ باشد، داریم

$$m(t)+m_e(t)=m_0 \qquad (۱۸)$$

با به‌کاربردن معادلهٔ (۲) درمورد دستگاه سفینه وگاز خواهیم داشت[۱]

$$-mg=m\frac{dv}{dt}-u\frac{dm}{dt} \qquad (۱۹)$$

که درآن v سرعت موشك است. جملهٔ دوم طرف دوم معادلهٔ(۱۹) تأثیرگازهای خروجی برمقدارحرکت دستگاه را نشان می‌دهد.

مثال۳. یك سفینهٔ فضایی باجرم اولیهٔ m_0 ازسطح زمین باسرعت اولیهٔ v_0 به‌طرف بالا پرتاب شده است. فرض‌کنیم‌که قسمتی ازاین جرم $m_f < m_0$ جرم سوختی باشد که به میزان ثابت β درفاصلهٔ زمانی $0 \leqslant t \leqslant t_1$ مصرف می‌شود. همچنین تندی خروج $-u=|u|=s$ را نیز ثابت فرض می‌کنیم. ازمقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود، و نیروی جاذبه را ثابت فرض می‌کنیم. سرعت سفینه را به صورت تابعی از زمان t به ازای $0 \leqslant t \leqslant t_1$ بیابید.

شرایط مذکور مستلزم‌آن است‌که جرم سفینه با رابطهٔ

$$m(t)=m_0-\beta t \quad t<t_1 \qquad (۲۰)$$

مشخص شود. درزمان t_1 جرم سفینه به مقدار

$$m_1=m_0-\beta t_1=m_0-m_f$$

تقلیل می‌یابد. به ازای $t<t_1$ معادلهٔ حرکت (۱۹) به‌صورت

$$-(m_0-\beta t)g=(m_0-\beta t)\frac{dv}{dt}-s\beta$$

یا

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{s\beta}{m_0-\beta t} \qquad (۲۱)$$

درمی‌آید. با انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۲۱) خواهیم داشت

---

۱. جزئیات تعیین این معادله درضمیمهٔ پایان همین فصل آمده است.

$$v = -gt - s\ln(m_{\circ} - \beta t) + c$$

شرط اولیهٔ $v(\circ) = v_{\circ}$ مستلزم آن است که

$$c = v_{\circ} + s\ln m_{\circ}$$

و از آنجا

$$v = v_{\circ} - gt + s\ln\frac{m_{\circ}}{m_{\circ} - \beta t} \quad \circ \leqslant t \leqslant t_{1} \tag{۲۲}$$

هنگامی که سوخت در $t = t_{1} = (m_{\circ} - m_{1})/\beta$ تمام مــی‌شود، سفینه دارای سرعت v_{1} به صورت زیر است

$$v_{1} = v_{\circ} - \frac{gm_{\circ}}{\beta}\left(1 - \frac{m_{1}}{m_{\circ}}\right) + s\ln\frac{m_{\circ}}{m_{1}} \tag{۲۳}$$

اگر v_{1} حداقل برابر سرعت فرارمتناظر به ارتفاعی که به آن رسیده است باشد، سفینه در آن لحظه می‌تواند ازمیدان جاذبهٔ زمین بیرون رود. درغیر این صورت، سرانجام به‌زمین برمی‌گردد مگر آن که شامل طبقات دیگری بـاشد. ازمعادلهٔ (۲۲) همچنین نتیجه می‌شود که سرعت v با تندی خروجی s ومیزان مصرف β افزایش می‌یابد.

مسائل

۱. جسمی به جرم ثابت m درامتداد قائم به‌طرف بالا باسرعت اولیهٔ $v_{\circ}$ پرتاب‌شده است. فرض‌می‌کنیم که جاذبهٔ زمین ثابت باشد، وازنیروهای دیگری که برجسم اثرمی‌کنند صرف‌نظرمی‌کنیم، مطلوب است

(الف) ارتفاع ماکزیممی که جسم به‌آن می‌رسد.

(ب) زمانی که جسم به این ارتفاع ماکزیمم می‌رسد.

(ج) زمانی که جسم به نقطهٔ آغازی خود برمی‌گردد.

۲. جسمی درامتداد قائم به طرف پایین باسرعت اولیهٔ $v_{\circ}$ در محیطی که مقاومت آن متناسب با اندازهٔ سرعت است پرتاب می‌شود. سرعت v را به عنوان تابعی اززمان بیابید. سرعت حدی v_{l} را پیدا کنید.

۳. جسمی به جرم m ازحالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با انـدازهٔ سرعت است رها می‌شود. مطلوب است مدت زمان لازم برای آنکه سرعت جسم برابر ۹۰ درصد سرعت حدی آن گردد.

۴. وزن یك قایق موتوری با سرنشین آن ۳۲۰ پـوند است. اگر کشش مـوتور در امتداد حرکت معادل نیروی ثابت ۱۰ پوند باشد،واندازهٔ عددی‌مقاومت آب دربرابرحرکت مساوی با دو برابر تندی برحسب فوت بر ثانیه، وقایق در ابتدا در حـالت سکون باشد مطلوب است

(الف) سرعت قایق درزمان t.
(ب) سرعت حدی.

۵. جسمی به جرم m درامتداد قائم به طرف پایین با سرعت اولیهٔ $v_{\circ}$ درمحیطی که مقاومت آن با جذر اندازهٔ سرعت متناسب است پرتاب می‌شود. رابطهٔ بین سرعت v و زمان t را بیابید. سرعت حدی را پیدا کنید.

۶. جسمی به جرم m از حالت سکون درمحیطی که مقاومت آن متناسب با مجذور سرعت است سقوط می‌کند. رابطهٔ بین سرعت v و زمان t را بیابید. سرعت حدی را پیدا کنید.

۷. جسمی به‌جرم m ازحالت سکون درمحیطی که مقاومت آن متناسب با $|v|^r$ است، ودرآن r ثابت مثبتی است سقوط می‌کند. با فرض آنکه نیروی جاذبه ثابت باشد، سرعت حدی جسم را بیابید

۸. جسمی به جرم ثابت m درامتداد قائم باسرعت اولیهٔ $v_{\circ}$ در محیطی که مقاومت آن برابر $k|v|$ است، ودرآن k ثابت مثبتی است به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ازتغییرات نیروی جاذبه صرف‌نظر می‌کنیم، مطلوب است تعیین

(الف) ارتفاع ماکزیمم x_m که جسم به آن می‌رسد.
(ب) زمان t_m متناظر به این ارتفاع ماکزیمم. همچنین نشان دهید که می‌توان t_m و x_m را به صورت زیر بیان کرد

$$t_m=\frac{v_{\circ}}{g}\left[1-\frac{1}{2}\frac{kv_{\circ}}{mg}+\frac{1}{3}\left(\frac{kv_{\circ}}{mg}\right)^2-\cdots\right]$$

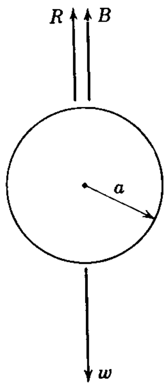
$$x_m=\frac{v_{\circ}^2}{2g}\left[1-\frac{2}{3}\frac{kv_{\circ}}{mg}+\frac{1}{2}\left(\frac{kv_{\circ}}{mg}\right)^2-\cdots\right]$$

هنگامی که $kv_{\circ}/mg<1$ باشد، هردوسری همگرا می‌باشند.

۹. جسمی که در سیال نسبتاً غلیظی مانند روغن سقوط می‌کند، تحت سه نیرو قرار دارد (شکل ۸.۲ را ببینید): نیروی مقاومت R، نیروی ارشمیدس B، و وزن آن w که ناشی ازثقل است. نیروی ارشمیدس برابر است با وزن سیالی که به وسیلهٔ جسم جابه‌جا می‌شود. درمورد یك جسم کروی به شعاع a که به کندی حرکت کند نیروی مقاومت از قانون استوکس[1] $R=6\pi\mu a|v|$ به دست می‌آید، که در آن v سرعت جسم و μ ضریب چسبندگی محیط سیال است.

---

۱. جرج گابریل استوکس (George Gabriel Stokes)، (۱۸۱۹-۱۹۰۳) استاد کمبریج یکی ازبزرگترین ریاضیدانان کاربستهٔ قرن نوزدهم بوده است. معادلات اساسی مکانیك سیالات (معادلات ناویر- استوکس) را بـه‌افتخار او و ناویر نامگذاری کرده‌اند، و یکی ازقضایـای اساسی آنالیز برداری بـه نام اوست. وی نیز یکی ازبنیانگذاران کاربرد سریهای (مجانبی) واگرا می‌باشد، موضوعی که امروز دارای اهمیت وفواید بسیاری است.



شکل ۸۰۲

(الف) مطلوب است تعیین سرعت حدی کرهٔ صلبی به شعاع a وچگالی ρ که به طور آزاد درمحیطی به چگالی ρ' وضریب چسبندگی μ سقوط می‌کند.

(ب) در ۱۹۱۰ فیزیکدان آمریکایی ر. ا. میلیکان[1] بار یك الکترون را از بررسی حرکت قطرات ریز روغن دریك میدان الکتریکی تعیین کرد. نیرویی که ازطرف یك میدان به شدت E بر یك قطره با بار e وارد می‌شود برابر Ee است. فرض کنیم که E طوری تنظیم شده باشد که قطره را درتوقف نگاه دارد ($v = ۰$)، و w و B به‌همان صورت قسمت (الف) باشند. فرمولی برای e بیابید. میلیکان توانست e را به عنوان بار یك الکترون شناسایی کند، ومقدارآن را برابر $e = ۴٫۸۰۳ \times ۱۰^{-۱۰}$ esu تعیین کند.

۱۰. (الف) اگر وزن جسمی درسطح دریا ۱۰۰ پوند باشد، در ۱۰۰۰ میلی بالای سطح زمین وزن آن چقدر است؟

(ب) شعاع ماه تقریباً ۲۷/۱۰۰ شعاع زمین است، و چگالی متوسط ماه در حدود ۵/۸ چگالی متوسط زمین می‌باشد. اگرجسمی درسطح زمین ۱۰۰ پوند وزن داشته باشد، وزن آن را درسطح ماه بیابید.

۱۱. جسمی به جرم ثابت m ازسطح دریا باسرعت اولیهٔ $v_۰$ که ازسرعت فرار $v_e = (۲gR)^{۱/۲}$ تجاوز نمی‌کند درامتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. باصرف‌نظر کردن ازمقاومت هوا وبا درنظر گرفتن تغییرات جاذبه برحسب ارتفاع، ماکزیمم ارتفاعی راکه جسم به‌آن می‌رسد بیابید (مثال۲ را ببینید).

۱۲. سرعت فرار جسمی راکه ازنقطهٔ $x_۰ = \xi R$ در بالای سطح زمین باسرعت اولیهٔ $v_۰$ به طرف بالا پرتاب شده است بیابید، R شعاع زمین و ξ مقدارثابتی است. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. تعیین کنید جسم از چه ارتفاعی باید پرتاب شود تا سرعت

1. R. A. Millikan (1868–1953)

قرار به ۸۵ درصد مقدار آن درسطح زمین تقلیل یابد.

۱۳. مسئلهٔ کوتاهترین زمان.[1] مسئلهٔ کوتاهترین‌زمان یکی ازمسائل مشهوردرتاریخ ریاضیات است: مطلوب است تعیین خمی که یك نقطهٔ مـادی درامتدادآن درکـوتاهترین زمان ازنقطهٔ مفروض P به نقطهٔ دیگـر Q بدون اصطکاك بلغزد، نقطـهٔ دوم پایینتر ازنقطهٔ اول قراردارد، اما مستقیماً درزیرآن واقع نیست (شکل ۹.۲ را ببینید).

این مسئله را یوهان برنولی در ۱۶۹۶ برای زورآزمایی با ریاضیدانان عصرخود طرح کرد. جوابهای صحیح آن را خود یوهان برنولی وهمچنین برادرش یاکوب برنولی، آیزك نیوتن، گوتفرید لایبنیتز، و مارکی لوپیتال به دست آوردند. مسئلهٔ کوتاهترین زمان به عنوان یکی ازمسائل آغازگر حساب تغییرات، درتوسعهٔ ریاضیات دارای اهمیت است.

برای حل این مسئله مناسب است که نقطهٔ بالاتر یعنی P را به عنوان مبدأ بگیریم، و محورها را مطابق شکل ۹.۲ توجیه کنیم. Q نقطهٔ پایینتر دارای مختصات $(x_0\,,\,y_0)$ است. می‌توان نشان داد که خم کوتاهترین زمان با تابع $y=\phi(x)$ که درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]y=k^2 \qquad \text{(یك)}$$

صدق می‌کند معین می‌گردد، k^2 ثابت مثبتی است که بعداً تعیین خواهد شد.

(الف) معادلهٔ (یك) را نسبت به y' حل کنید. چرا باید ریشهٔ مثبت را انتخاب کرد؟

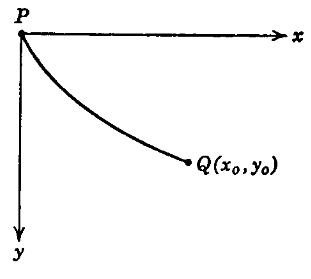
(ب) متغیر جدید t را با رابطه

$$y=k^2\sin^2 t \qquad \text{(دو)}$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که معادلهٔ قسمت (الف) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$2k^2\sin^2 t\,dt=dx \qquad \text{(سه)}$$

(ج) با قراردادن $\theta=2t$، نشان دهید که جواب معادلهٔ (سه) که بـاشرط $x=0$ و $y=0$ متناظر است با رابطهٔ



شکل ۹.۲

1. Brachistochrone Problem

$$x=\frac{k^{2}}{2}(\theta-\sin\theta) \qquad \text{(چهار)}$$

داده می‌شود، وبا استفاده ازمعادلهٔ (دو) نشان دهیدکه

$$y=\frac{k^{2}}{2}(1-\cos\theta) \qquad \text{(پنج)}$$

معادلات (چهار) و(پنج) معادلات‌پارامتری جواب معادلهٔ (یك) می‌باشندکه ازنقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرد. نمودار معادلات (چهار) و (پنج) سیکلوئید نام دارد. اگر ثابت k را به‌طور مناسب انتخاب‌کنیم، این سیکلوئید از نقطهٔ (x_0, y_0) می‌گذرد، و جواب مسئلهٔ کوتاهترین زمان خواهد بود. می‌توان θ را حذف‌کرد و جواب را به‌صورت $y=\phi(x)$ به دست آورد، اما استفاده ازمعادلات پارامتری‌آسانتر است.

۱۴. وزن موشکی قبل از پرتاب ۱۲۰۰ پوند است،که شامل ۹۰۰ پوند سوخت می‌باشد. فرض‌کنیم‌که سوخت درمدت ۶۰ثانیه به‌طور یکنواخت مصرف می‌شود، وتندی خروج ازموشك۵۰۰۰ فوت برثانیه است. اگرموشك دارای سرعت اولیه نباشد، سرعت آن را درپایان ۶۰ ثانیه بیابید. ازمقاومت هوا وتغییرات میدان جاذبهٔ زمین صرف نظر کنید.

۱۵. یك سفینهٔ فضایی به جرم اولیهٔ m_0 ازسطح زمین ازحالت سکون به حرکت درمی‌آید. فرض‌کنیم‌که میزان مصرف سوخت درفاصلهٔ زمانی $0<t<t_1$ برابر مقدار ثابت $\beta=-dm/dt$ وتندی خروج‌گازنیز مقدار ثابت s باشد. علاوه براین فرض‌کنیم که مقاومت هوا با اندازهٔ سرعت $v(t)$ سفینه متناسب است، ازتأثیر مقاومت هوابرگازهای خروجی وهمچنین ازتغییر میدان جاذبه برحسب ارتفاع صرف‌نظر می‌شود. نشان دهیدکه سرعت سفینه درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$m\frac{dv}{dt}+kv=-mg+s\beta \qquad t<t_1$$

صدق می‌کند،که درآن $m(t)=m_0-\beta t$. این معادله را حل‌کنید و v را برحسب t ، $t<t_1$ ، بیابید.

۱۱.۲* قضیهٔ وجود و یکتایی

دراین‌بند به‌بحث دربارهٔ اثبات قضیهٔ ۲.۲ یعنی قضیهٔ اساسی وجود ویکتایی دربارهٔمسائل مقدار اولیهٔ مرتبهٔ اول می‌پردازیم. این قضیه مبین‌آن است‌که اگر $f(x,y)$ در شرایطی صدق‌کند،آنگاه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=f(x,y) \qquad \text{(۱الف)}$$

$$y(x_0)=y_0 \qquad \text{(۱ب)}$$

درفاصله‌ای حاوی نقطهٔ x_0 دارای جواب یکتاست.

وجود جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) را دربرخی ازحالتها (مثلاً، هنگامی که معادلهٔ دیفرانسیل خطی است) می‌توان مستقیماً باحل مسئله وارائهٔ فرمولی برای جواب آن اثبات کرد. اما، درحالت کلی نمی‌توان ازاین روش استفاده کرد، زیرا برای حل معادلهٔ (۱الف) روشی که درهمهٔ حالتها به‌کار رود وجود ندارد. بنابراین، درمورد حالت کلی برای اثبات وجود جواب معادلات (۱) لازم است ازروش غیرمستقیمی استفاده کنیم. معمولا با این روش، درعمل نمی‌توان جواب را به‌آسانی به‌دست آورد. اساس این‌روش ساختن‌دنباله‌ای ازتوابع است که حدآن درمسئلهٔ مقدار اولیه صدق کند، هرچند که جمله‌های دنباله منفرداً دارای این خاصیت نیستند. عموماً نمی‌توان بیش ازچند جملهٔ دنباله راصریحاً محاسبه کرد، بنابراین، به‌ندرت می‌توان تابع حدی را به‌طورصریح به دست آورد. باوجود این، تحت قیودی که درقضیهٔ ۲.۲ دربارهٔ $f(x,y)$ بیان شد می‌توان نشان داد که دنبالهٔ مزبور همگراست‌وتابع حدی دارای خواص مطلوب است.استدلال این قضیه بغرنج است ومبتنی به‌روشها ونتایجی است که نخستین‌بار دردرس حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود. بنابراین، ما وارد تمام جزئیات اثبات نمی‌شویم، وتنها به تعیین خطوط اصلی آن می‌پردازیم، وبه برخی ازدشواریها اشاره می‌کنیم.

نخست، دیده می‌شود که کافی است مسئله‌ای را درنظر بگیریم که درآن نقطهٔ اولیهٔ (x_0,y_0) مبدأ باشد، یعنی مسئلهٔ

$$y'=f(x,y) \tag{۲ الف}$$

$$y(0)=0 \tag{۲ ب}$$

را.اگرنقطهٔ اولیهٔ دیگری داده شده باشد، همواره می‌توان متغیرها را باتبدیلی که متناظربه انتقال دستگاه مختصات است تعویض کرد ونقطهٔ داده شدهٔ (x_0,y_0) را مبدأ گرفت. به‌بیان دیگر، تابع ومتغیر جدید w و s را به ترتیب بامعادلات زیرتعریف می‌کنیم

$$w=y-y_0\,,\ s=x-x_0 \tag{۳}$$

چون w را به‌عنوان تابعی از s بگیریم، بنابر قاعدهٔ زنجیری خواهیم داشت

$$\frac{dw}{ds}=\frac{dw}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{d}{dx}(y-y_0)\frac{dx}{ds}=\frac{dy}{dx}$$

اگر $f(x,y)=f(s+x_0,w+y_0)$ را با $F(s,w)$ نشان دهیم،مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) به صورت زیردرمی‌آید:

$$w'(s)=F[s,w(s)] \tag{۴الف}$$

$$w(0)=0 \tag{۴ب}$$

معادلات (۴) همان معادلات (۲) می‌باشند، تنها نام متغیرها عوض شده است. ازاین بدبعد به‌جای مسئلهٔ اصلی (۱) مسئلهٔ (۲) راکه اندکی ساده‌تراست درنظر می‌گیریم.

اکنون می‌توان قضیهٔ وجود ویکتایی را به‌صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۴.۲. اگر f و $\partial f/\partial y$ در مستطیل $R: |x| \leqslant a\ , \ |y| \leqslant b$ پیوسته باشند، آنگاه فاصلهٔ $|x| \leqslant h \leqslant a$ را می‌توان طوری تعیین کرد که در آن مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲)

$$y' = f(x\ , y)\ , \quad y(\circ) = \circ$$

دارای جواب یکتای $y = \phi(x)$ باشد.

برای اثبات قضیه لازم است کــه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) را بــه صورت مناسبتری درآوریم. اگر موقتاً فرض‌کنیم‌که تابعی مانند $y = \phi(x)$ وجود دارد که در مسئلهٔ مقدار اولیه صدق می‌کند، آنگاه $f[x\ , \phi(x)]$ فقط تــابعی از x و پیوسته می‌باشد. بنا براین می‌توان ازمعادلهٔ (۲الف) از نقطهٔ اولیهٔ $x = \circ$ تامقدار دلخواه x انتگرال گرفت، وبه‌دست آورد

$$\phi(x) = \int_{\circ}^{x} f[t\ , \phi(t)]\, dt \qquad (۵)$$

که درآن از شرط اولیهٔ $\phi(\circ) = \circ$ استفاده شده است.

چــون معادلــهٔ (۵) شامل انتگرال تابــع مجهول ϕ است آن را معادلهٔ انتگرالی می‌نامند. این معادلهٔ انتگرالی فرمول جواب مسئلهٔ مقدار اولیه نیست، امــا معرف رابطهٔ دیگری است‌که هرجواب معادلات (۲) درآن صدق می‌کند. برعکس، فرض‌کنیم کــه یك تابع پیوستهٔ $y = \phi(x)$ وجود داردکه در معادلــهٔ انتگرالی (۵) صدق می‌کند، این تابع در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) نیز صدق می‌کند. برای اثبات این مطلب نخست در معادلهٔ (۵) به‌جای x صفر می‌گذاریم، بدین‌سان معادلــهٔ (۲ب) بــه‌دست می‌آید. علاوه براین، چــون تابعی‌که درمعادلهٔ (۵) زیر علامت انتگرال قراردارد پیوسته است، ازقضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال نتیجه می‌شودکه $\phi'(x) = f[x\ , \phi(x)]$. بنا براین مسئلهٔ مقدار اولیه ومعادلهٔ انتگرالی هم‌ارزند، بدین‌معنی‌که هرجواب یکی‌ازآنها جواب دیگری نیزمی‌باشد. آسانتر است ثابت‌کنیم‌که این معادلــهٔ انتگرالی در یك فاصلــهٔ $|x| \leqslant h$ دارای جوابی یکتاست. آنگاه همین نتیجه دربارهٔ مسئلهٔ مقدار اولیه نیز برقرار خواهد بود.

یکی از روشهای اثبات اینکه معادلهٔ انتگرالی (۵) دارای جواب یکتاست، به‌روش تقریبات متوالی یــا روش تکرار پیکار (۱۸۵۶-۱۹۴۱) موسوم است. دراین روش نخست یك‌تابع $\phi_{\circ}$ به‌طور دلخواه یا تقریبی‌ازجواب مسئلهٔ مقداراولیه انتخاب می‌کنیم. ساده‌ترین انتخاب عبارت است از

$$\phi_{\circ}(x) = \circ \qquad (۶)$$

آنگاه $\phi_{\circ}$ حداقل درشرط اولیهٔ (۲ب) صدق می‌کند، هــرچند ممکن است‌کــه در معادلهٔ دیفرانسیل (۲ الف) صدق نکند. تقریب بعدی‌کــه آن را $\phi_{۱}$ می‌نامیم از گذاشتن $\phi_{\circ}(t)$ به‌جای $\phi(t)$ درطرف دوم معادلهٔ (۵) بدست می‌آید. بدین‌سان

$$\phi_{۱}(x) = \int_{\circ}^{x} f[t\ , \phi_{\circ}(t)]\, dt \qquad (۷)$$

به‌همین طریق ϕ_2 را از ϕ_1 به‌دست می‌آوریم

$$\phi_2(x)=\int_0^x f[t,\ \phi_1(t)]\,dt \tag{۸}$$

و به‌طور کلی

$$\phi_{n+1}(x)=\int_0^x f[t,\ \phi_n(t)]\,dt \tag{۹}$$

بدین‌سان دنبالهٔ توابع

$$\{\phi_n\}=\phi_0,\ \phi_1,\ \ldots,\ \phi_n,\ \ldots$$

به‌وجود می‌آید. هرجملهٔ این دنباله درشرط اولیهٔ (۲ب) صدق می‌کند، اما عموماً هیچ‌یك از آنها در معادلـهٔ دیفرانسیل صادق نیست. اما، اگر در مرحله‌ای مثلا بـه‌ازای $n=k$، داشته باشیم $\phi_{k+1}(x)=\phi_k(x)$، آنگاه ϕ_k جواب معادلـهٔ انتگرالی (۵) خواهد بـود. بنا براین ϕ_k جواب مسئلهٔ مقداراولیهٔ (۲) نیز می‌باشد، ودنباله دراین نقطه متوقف می‌شود. عموماً، این حالت پیش نخواهد آمد، و لازم است که یك دنبالـهٔ نامتناهی بـه‌طور کامل، درنظر گرفته شود.

برای اثبات قضیهٔ ۴.۲ باید به‌چهار سؤال اصلی پاسخ گفت:

۱. آیا همهٔ جمله‌های دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ وجود دارند، یـا آنکـه ممکن است جریان در مرحله‌ای مختل شود؟

۲. آیا این دنباله همگراست؟

۳. خواص تابع حدی چیست، به‌ویژه، آیا در معادلهٔ انتگرالی (۵) و در نتیجه در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) صدق می‌کند؟

۴. آیا این تنها جواب است یا آنکه جوابهای دیگری نیز وجود دارد؟

نخست با مثال نسبتاً ساده‌ای نشان می‌دهیم کـه چگونه می‌توان به‌این پرسشها پاسخ گفت، وسپس به‌شرح برخی از دشواریهاکه درحالت کلی پیش می‌آید می‌پردازیم.

مثال. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$y'=2x(1+y),\quad y(0)=0 \tag{۱۰}$$

برای حل این‌مسئله به‌روش تقریبات متوالی، نخست‌توجه می‌کنیم که اگر $y=\phi(x)$، آنگاه معادلهٔ انتگرالی متناظر چنین است

$$\phi(x)=\int_0^x 2t[1+\phi(t)]\,dt \tag{۱۱}$$

اگر تقریب اولیه را $\phi_0(x)=0$ انتخاب‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\phi_1(x)=\int_0^x 2t[1+\phi_0(t)]\,dt=\int_0^x 2t\,dt=x^2 \tag{۱۲}$$

به‌همین طریق

$$\phi_2(x)=\int_0^x 2t[1+\phi_1(t)]\,dt=\int_0^x 2t[1+t^2]\,dt=x^2+\frac{x^4}{2} \tag{۱۳}$$

و

$$\phi_3(x)=\int_0^x 2t[1+\phi_2(t)]\,dt=\int_0^x 2t\left[1+t^2+\frac{t^4}{2}\right]dt=x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2\cdot 3} \tag{۱۴}$$

معادلات (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) دال‌براین است که به‌ازای هر $n \geqslant 1$

$$\phi_n(x)=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!} \tag{۱۵}$$

واین نتیجه را می‌توان با استقرای ریاضی اثبات‌کرد. روشن است که رابطهٔ (۱۵) بدازای $n=1$ برقرار است، وباید نشان دهیم‌که اگر رابطه بدازای $n=k$، برقرار باشد، به‌ازای $n=k+1$ نیز برقرار است. داریم

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(x)&=\int_0^x 2t[1+\phi_k(t)]\,dt\\&=\int_0^x 2t\left(1+t^2+\frac{t^4}{2!}+\cdots+\frac{t^{2k}}{k!}\right)dt\\&=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}\end{aligned} \tag{۱۶}$$

وبدین وسیله اثبات کامل می‌شود.

از رابطهٔ (۱۵) دیده می‌شود که $\phi_n(x)$ عبارت است از nامین حاصل جمع جزئی سری نامتناهی

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k! \tag{۱۷}$$

بنابراین شرط لازم وکافی برای آنکه $\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$ وجود داشته باشد این است که سری (۱۷) همگرا باشد. با استفاده از آزمون نسبت دیده می‌شودکه بدازای هر x

$$\left|\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{x^{2k}}\right|=\frac{x^2}{k+1}\longrightarrow 0\,,\quad k\longrightarrow\infty \text{ هنگامی که } \tag{۱۸}$$

بنا بر این سری (۱۷) به‌ازای همهٔ مقادیر x همگراست، و مجموع آن $\phi(x)$ حد[1] دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ می باشد. علاوه‌براین چون سری (۱۷) یك سری تیلر است، می‌توان از آن جمله به‌جمله مشتق و انتگرال گرفت به‌شرط آنکه x درفاصلهٔ همگرایی، که در اینجا همهٔ محور x است، باقی بماند. بنا براین بامحاسبهٔ مستقیم می‌توان تحقیق کرد که $\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!$ یك جواب معادلهٔ انتگرالی (۱۱) است. همچنین می‌توان با گذاشتن $\phi(x)$ به‌جای y در معادلهٔ (۱۰) تحقیق کرد که این تابع در مسئلهٔ مقدار اولیه نیز صدق می‌کند.

بالاخره، برای بررسی یکتایی جواب، فرض کنیم که مسئلهٔ مقدار اولیه دارای یك جواب دیگر ψ متمایزاز ϕ باشد. این‌فرض چنان‌که نشان خواهیم داد به‌تناقض‌می‌انجامد. چون ϕ و ψ هردو درمعادلهٔ انتگرالی (۱۱) صدق می‌کنند، داریم

$$\phi(x)-\psi(x)=\int_0^x 2t[\phi(t)-\psi(t)]\,dt$$

چون ازهر دوطرف قدرمطلق بگیریم، به‌ازای $x>0$ خواهیم داشت

$$|\phi(x)-\psi(x)|\leqslant\int_0^x 2t|\phi(t)-\psi(t)|\,dt$$

اگر برای x فاصله $0\leqslant x\leqslant A/2$ را که در آن A ثابت دلخواه است در نظر بگیریم، آنگاه $2t\leqslant A$، و

$$|\phi(x)-\psi(x)|\leqslant A\int_0^x |\phi(t)-\psi(t)|\,dt \tag{19}$$

دراینجا مناسب است‌که تابع U را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$U(x)=\int_0^x |\phi(t)-\psi(t)|\,dt \tag{20}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$U(0)=0 \tag{21}$$

$$U(x)\geqslant 0\,,\quad \text{به‌ازای } x\geqslant 0 \tag{22}$$

علاوه براین، U مشتق‌پذیر است و داریم $U'(x)=|\phi(x)-\psi(x)|$. بنابراین با توجه به رابطهٔ (۱۹)،

$$U'(x)-AU(x)\leqslant 0 \tag{23}$$

---

۱. در این حالت می‌توان ϕ را برحسب توابع مقدماتی به‌صورت $\phi(x)=e^{x^2}-1$ نوشت. اما، این نکته هیچ ارتباطی با بحث وجود و یکتایی ندارد.

چون رابطهٔ (۲۳) را درمقدار مثبت e^{-Ax} ضرب کنیم، بدست می‌آید

$$[e^{-Ax}U(x)]' \leqslant 0 \tag{۲۴}$$

آنگاه،با انتگرال‌گیری‌ازمعادلهٔ(۲۴) ازصفرتا x وبا استفاده‌ازمعادلهٔ (۲۱) خواهیم‌داشت

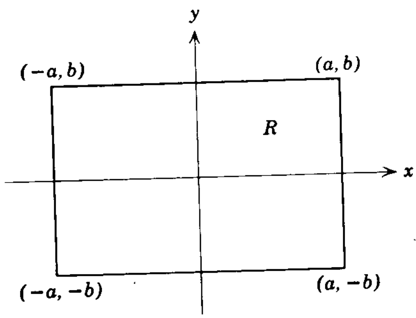
$$e^{-Ax}U(x) \leqslant 0 \,, \quad x \geqslant 0 \text{ به‌ازای }$$

بنابراین به‌ازای $x \geqslant 0$ داریم $U(x) \leqslant 0$ وبادرنظر گرفتن‌رابطهٔ (۲۲) به‌ازای هر $x \geqslant 0$ نتیجه می‌شود که $U(x) = 0$. بدین‌سان $U'(x) \equiv 0$، و بنابراین $\psi(x) \equiv \phi(x)$، که متناقض با فرض اصلی است. درنتیجه، به‌ازای $x \geqslant 0$ مسئلهٔ مقدار اولیه نمی‌تواند دارای دو جواب متمایز باشد. بـا اندك تغییری در این استدلال می‌توان همین نتیجه را در مورد $x \leqslant 0$ به‌دست آورد.

اکنون به‌مسئلهٔ کلی حل معادلهٔ انتگرالی (۵) برمی‌گردیم وهریك از سؤالاتی راکه در پیش مطرح شد به‌اختصار بررسی می‌کنیم.

۱. آیا همهٔ جمله‌های دنباله $\{\phi_n\}$ وجود دارند؟ درمثال بالا f و $\partial f/\partial y$ درتمام صفحهٔ xy پیوسته بودند، وهرجملهٔ دنباله صریحاً قابل محاسبه بود. اما، درحالت‌کلی f و $\partial f/\partial y$ فقط دریك مستطیل $R\!:|x| \leqslant a \,, \ |y| \leqslant b$ (شکل ۱۰.۲ را ببینید) پیوسته فرض می‌شوند. علاوه براین، جمله‌های دنبالـه را معمولاً نمی‌توان به‌طور صریح معین کرد. این خطر وجود دارد که در مرحله‌ای مثلاً به‌ازای $n=k$، نمودار $y=\phi_k(x)$ شامل نقاطی واقع در خارج مستطیل R باشد. بنابراین درمرحلهٔ بعد، یعنی در محاسبهٔ $\phi_{k+1}(x)$، لازم مـی‌آید کـه $f(x\,,\,y)$ را درنقاطی‌که معلوم نیست درآنها پیوسته ویا حتی وجود داشته باشد محاسبه‌کرد. بدین‌سان امکان داردکه محاسبهٔ $\phi_{k+1}(x)$ غیرممکن باشد.

ممکن است برای اجتناب ازاین خطر لازم آیدکـه x را در فاصلـهٔ‌کوچکتری از $|x| \leqslant a$ محدود کنیم. برای تعیین چنین فاصله‌ای ازاین مطلب‌که هرتابع پیوسته روی یك ناحیهٔ بسته،کراندار است استفاده می‌کنیم. بنابراین f روی R کراندار است و می‌تـوان



شکل ۱۰.۲

عدد مثبت M را طوری تعیین کرد که

$$|f(x\,,\,y)|\leqslant M\,,\quad (x\,,\,y)\epsilon R \tag{۲۵}$$

قبلاً بیان شد که به‌ازای هر n داریم

$$\phi_n(0)=0$$

چون $f[x\,,\,\phi_k(x)]$ با $\phi'_{k+1}(x)$ برابر است، ماکزیمم قدر مطلق شیب نمودار $y=\phi_{k+1}(x)$ برابر M خواهد بود. ازآنجاکه نمودار مزبور شامل نقطهٔ $(0\,,\,0)$ است، باید نمودار در ناحیهٔ سایه زده شدهٔ شکل ۱۱.۲ واقع باشد. بنابراین حداقل مادامی‌که R شامل ناحیهٔ سایه زده شده باشد که برای آن $|x|\leqslant b/M$ است، نقطه $[x\,,\phi_{k+1}(x)]$ در R باقی می‌ماند. ازاینجا به‌بعد فقط مستطیل $D:|x|\leqslant h,|y|\leqslant b$ را درنظر می‌گیریم، که درآن h یکی از دو مقدار a و b/M راکه کوچکتراست نشان می‌دهد. با این تحدید همهٔ جمله‌های دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ وجود خواهند داشت. توجه شود که اگر $b/M<a$، آنگاه می‌توان با تعیین کران دقیقتری برای $|f(x\,,\,y)|$ مقدار بزرگتری برای h به‌دست آورد، البته درصورتی‌که M ازپیش برابرمقدار ماکزیمم $|f(x\,,\,y)|$ اختیارنشده باشد.

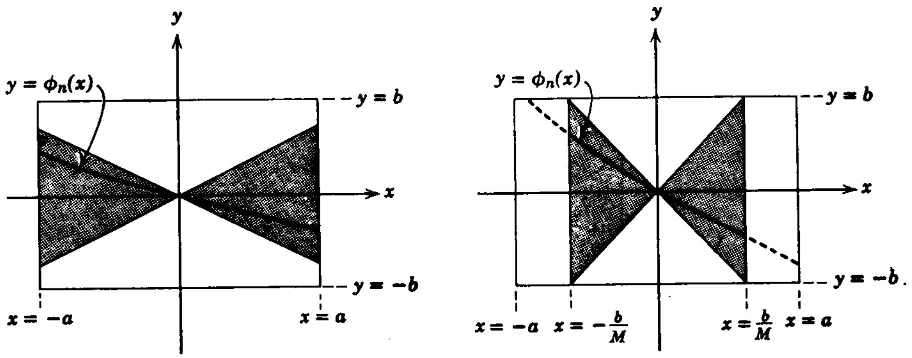
۲. آیا دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ همگراست؟ همان‌گونه‌که درمثال داشتیم می‌توان

$$\phi_n(x)=\phi_1(x)+[\phi_2(x)-\phi_1(x)]+\cdots+[\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)]$$

را به‌عنوان n امین حاصل‌جمع جزئی سری

$$\phi_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)] \tag{۲۶}$$

درنظر گرفت. برای اثبات همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ کافی است نشان دهیم که سری (۲۶)



(ب) $b/M>a$. (الف) $b/M<a$.

شکل ۱۱.۲

همگراست. برای این کار لازم است که مقدار جملهٔ عمومی $|\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)|$ را برآورد کنیم. طرز عمل را در مسائل ۳ تا ۶ نشان داده‌ایم و در اینجا از آن صرف‌نظر می‌کنیم. بافرض آنکه دنباله همگرا باشد، تابع حدی را با ϕ نشان می‌دهیم، و بدین‌سان

$$\phi(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) \tag{۲۷}$$

۳. خواص تابع حدی ϕ چیست؟ نخست باید دانست که ϕ پیوسته است. این نتیجه لزوماً ازهمگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ باوجود آنکه هرجملهٔ آن تابع پیوسته‌ای است‌حاصل نمی‌شود. درفصل ۱۰ به‌برخی ازمسائل برمی‌خوریم که در آنها دنباله‌ای از توابع پیوسته به‌یك تابع حدی ناپیوسته می‌گراید. مثال ساده‌ای از این پدیده را در مسئلهٔ ۱ آورده‌ایم. یك راه برای نشان دادن پیوستگی ϕ آن است که نه‌تنها همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ را اثبات کنیم بلکه نشان دهیم که همگرایی به‌طرز خاصی که به‌همگرایی یکنواخت موسوم است انجام می‌گیرد. دراینجا بداین موضوع نمی‌پردازیم وفقط متذکرمی‌شویم که همان استدلال قسمت ۲ برای اثبات همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ و درنتیجه پیوستگی تابع حدی ϕ درفاصلهٔ $|x|\leqslant h$ کافی است.

اکنون برمی‌گردیم به‌رابطهٔ (۹)،

$$\phi_{n+1}(x)=\int_0^x f[t\,,\,\phi_n(t)]\,dt$$

اگر n به ∞ بگراید، خواهیم داشت

$$\phi(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f[t\,,\,\phi_n(t)]\,dt\,\cdot \tag{۲۸}$$

اگربتوانیم درطرف دوم رابطهٔ (۲۸) ترتیب اعمال انتگرال‌گیری وحدگیری راتعویض کنیم، به‌دست می‌آید

$$\phi(x)=\int_0^x \lim_{n\to\infty} f[t\,,\,\phi_n(t)]\,dt \tag{۲۹}$$

درحالت‌کلی این تعویض مجاز نیست (برای مثال، مسئلهٔ ۲ را ببینید)، امـا چون دنبالـهٔ $\{\phi_n(x)\}$ نه‌تنها همگراست بلکه همگرای یکنواخت است بنابراین می‌توان عمل حدگیری را بـه‌داخل علامت انتگرال بـرد. اکنون می‌خواهیم حد را بـه‌داخل تابع f ببریم تـا به‌دست آید

$$\phi(x)=\int_0^x f[t\,,\,\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)]\,dt \tag{۳۰}$$

و از آنجا

$$\phi(x)=\int_{\circ}^{x} f[t\,,\,\phi(t)]\,dt \qquad (۳۱)$$

گزارهٔ $\lim_{n\to\infty} f[t\,,\,\phi_n(t)]=f[t\,,\,\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)]$ با گزارهٔ f نسبت به‌متغیر دوم پیوسته است هم‌ارز می‌باشد، و این گزاره بنا برفرض راست است. بنابراین رابطهٔ (۳۱) برقرار است و تابع ϕ در معادلـهٔ انتگرالی (۵) صدق می‌کند. از این‌رو ϕ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) نیز می‌باشد.

۴. آیا معادلهٔ انتگرالی (۵) علاوه بر $y=\phi(x)$ دارای جوابهای دیگر *نیز هست؟* برای اثبات یکتایی جواب $y=\phi(x)$ می‌توان به‌همان نحوکه درمثال بیان شد عمل کرد. نخست فرض می‌کنیم کـه یك جواب دیگر $y=\psi(x)$ وجود داشته باشد. آنگاه می‌توان نشان داد (مسئلهٔ ۷ را ببینید) کـه تفاضل $\phi(x)-\psi(x)$ به‌ازای $\circ\leqslant x\leqslant h$ در نامساوی

$$|\phi(x)-\psi(x)|\leqslant A\int_{\circ}^{x}|\phi(t)-\psi(t)|\,dt \qquad (۳۲)$$

صدق می‌کند، که در آن A عدد مثبت مناسبی است. ازاینجا به‌بعد استدلال با آنچه درمثال آمد یکسان است، و به‌این نتیجه می‌رسیم کـه برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲) جواب دیگری به‌جز جوابی‌که به‌روش تقریبات متوالی بدست‌آمد وجود ندارد.

مسائل

۱. فرض‌کنیم $\phi_n(x)=x^n$ به‌ازای $\circ\leqslant x\leqslant ۱$، نشان دهیدکه

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\begin{cases}\circ\,, & \circ\leqslant x<۱\,,\\ ۱\,, & x=۱\end{cases}$$

این مثال نشان می‌دهدکه ممکن است حد دنباله‌ای از توابع پیوسته تابعی ناپیوسته باشد.

۲. دنبالهٔ $\phi_n(x)=۲nxe^{-nx^۲}$، $\circ\leqslant x\leqslant ۱$ را درنظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهیدکه $\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\circ$، $\circ\leqslant x\leqslant ۱$ واز آنجا

$$\int_{\circ}^{۱}\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)\,dx=\circ$$

(ب) نشان دهیدکه $\int_{\circ}^{۱} ۲nxe^{-nx^۲}\,dx=۱-e^{-n}$ و ازآنجا

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{۱}\phi_n(x)\,dx=۱$$

این مثال مبین‌آن است‌که حتی اگر $\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$ وجود داشته وپیوسته باشد لزومی ندارد که تساوی زیر برقرار باشد

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)\,dx$$

درمسائل ۳ تا ۶ طرز اثبات همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ راکه باروابط ۶ تا ۹ تعریف شد بیان می‌کنیم.

۳. اگر $\partial f/\partial y$ درمستطیل D پیوسته باشد، نشان دهیدکه عدد ثابت مثبت K را می‌توان طوری تعیین کرد که

$$|f(x\,,\,y_1)-f(x\,,\,y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

که در آن $(x\,,\,y_1)$ و $(x\,,\,y_2)$ دو نقطهٔ دلخواه D با طول برابر x می‌باشند.
راهنمایی: x را ثابت بگیرید واز قضیهٔ مقدار متوسط دربارهٔ f به‌عنوان تابعی از y تنها استفاده کنید. K را برابر مقدار ماکزیمم $|\partial f/\partial y|$ در D اختیار کنید.

۴. اگر $\phi_{n-1}(x)$ و $\phi_n(x)$ دوجمله از دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ باشند، با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳ نشان دهیدکه

$$|f[x\,,\,\phi_n(x)]-f[x\,,\,\phi_{n-1}(x)]|\leqslant K|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|$$

۵. (الف) نشان دهیدکه اگر $|x|\leqslant h$ ، آنگاه

$$|\phi_1(x)|\leqslant M|x|$$

کـه در آن M طوری انتخاب شده استکـه بـه‌ازای هر $(x\,,\,y)$ در D داشته باشیم $|f(x\,,\,y)|\leqslant M$.

(ب) با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۴ و قسمت (الف) مسئلهٔ ۵ نشان دهیدکه

$$|\phi_2(x)-\phi_1(x)|\leqslant\frac{MK|x|^2}{2}$$

(ج) با استقرای ریاضی نشان دهیدکه

$$|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{MK^{n-1}|x|^n}{n!}\leqslant\frac{MK^{n-1}h^n}{n!}$$

۶. با توجه به

$$\phi_n(x)=\phi_1(x)+[\phi_2(x)-\phi_1(x)]+\cdots+[\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)]$$

(الف) نشان دهیدکه

$$|\phi_n(x)|\leqslant|\phi_1(x)|+|\phi_2(x)-\phi_1(x)|+\cdots+|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|$$

(ب) با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۵ نشان دهیدکه

$$|\phi_n(x)| \leqslant \frac{M}{K}\left[Kh+\frac{(Kh)^2}{2!}+\ldots+\frac{(Kh)^n}{n!}\right]$$

(ج) نشان دهید که حاصل‌جمع قسمت (ب) هنگامی که $n \to \infty$ همگراست، و از آنجا نشان دهید که حاصل جمع قسمت (الف) نیز هنگامی که $n \to \infty$ همگراست. بدین‌سان همگرایی دنبالهٔ $\{\phi_n(x)\}$ را که دنبالهٔ حاصل جمعهای جزئی یك سری نامتناهی همگراست نتیجهٔ بگیرید.

۰۷ دراین مسئله به‌موضوع یکتایی جواب معادلهٔ انتگرالی (۵)،

$$\phi(x)=\int_0^x f[t\ ,\ \phi(t)]\,dt$$

می‌پردازیم.

(الف) فرض‌کنیم که ϕ و ψ دوجواب معادلهٔ (۵) باشد. نشان دهید که

$$\phi(x)-\psi(x)=\int_0^x \{f[t\ ,\ \phi(t)]-f[t\ ,\ \psi(t)]\}\,dt$$

(ب) نشان دهید که

$$|\phi(x)-\psi(x)| \leqslant \int_0^x |f[t\ ,\ \phi(t)]-f[t\ ,\ \psi(t)]|\,dt$$

(ج) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳ نشان دهید که

$$|\phi(x)-\psi(x)| \leqslant K\int_0^x |\phi(t)-\psi(t)|\,dt$$

کـه درآن K یك‌کران بالای $|\partial f/\partial y|$ در D است. این همان رابطـهٔ (۳۲) است، و بقیهٔ اثبات را می‌توان به‌همان گونه که درمتن اشاره شد تکمیل کرد.

ضمیمه

تعیین معادلهٔ حرکت یك جسم با جرم متغیر. برای به‌دست‌آوردن معادلـهٔ (۱۹) بند ۱۰۲، می‌توان به روش زیرعمل کرد. فرض‌کنیم که جرم‌کل دستگاه متشکل ازسفینه، سوخت وگاز خروجی همواره برابر مقدار ثابت m_0 باشد، دراین صورت داریم

$$m(t)+m_e(t)=m_0 \qquad (1)$$

که درآن $m(t)$ و $m_e(t)$ به‌ترتیب عبارتنداز جرم سفینه (با احتساب سوخت) وجرم‌گازهای خروجی. با بدکاربردن قانون نیوتن دربارهٔ‌کل دستگاه، خواهیم داشت

$$F=\frac{dP}{dt}=\frac{dP_r}{dt}+\frac{dP_e}{dt} \qquad (2)$$

که درآن $P_r(t)$ ، $P_e(t)$ و $P(t)$ به‌ترتیب اندازهٔ خطی‌حرکت سفینه، گازهای خروجی و کل‌دستگاه می‌باشند. دراین بحث فرض‌می‌کنیم که تنها نیروی خارجی مؤثر بر کل‌دستگاه، نیروی ثقل است. چون از نیروهای‌مقاومت و تغییرات میدان جاذبه صرف نظرکنیم،نتیجه می‌شود که

$$F = -m_\circ g \tag{۳}$$

اگر $v(t)$ نمایشگر سرعت سفینه درزمان t باشد، آنگاه $P_r(t) = m(t)v(t)$ ، و

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} \tag{۴}$$

از طرف دیگر، محاسبهٔ اندازه حرکت گازهای خروجی یعنی P_e پیچیده‌تر است، زیـرا قسمتهای مختلف گازهای خروجی دارای سرعتهای متفاوتی می‌باشند. فرض‌کنیم کـه گاز به‌طور پیوسته با سرعت u نسبت به‌سفینه بیرون رانده می‌شود، و گیریم $\Delta m_e(\tau)$ نمایشگر جرم‌گاز خروجی در مدت زمـان‌کوتاه $(\tau , \tau + d\tau)$ باشد. سرعت اولیهٔ این عنصرجرم تقریباً برابر $v(\tau) + u$ است. معادلـهٔ حرکت عنصر جرم $\Delta m_e(\tau)$ بافرض آنکه از هنگام خروج به‌بعد تنها تحت تأثیر نیروی ثقل می‌باشد عبارت است از

$$\Delta m_e \frac{dv_e}{dt} = -g\Delta m_e$$

که درآن $v_e(t , \tau)$ سرعت عنصر گازی راکه درلحظهٔ τ ایجاد شده است، درزمان t نشان می‌دهد. بنابراین

$$v_e(t , \tau) = -gt + c(\tau)$$

مقدار $c(\tau)$ از این شرط که درزمان $t = \tau$ سرعت v_e برابر $v(\tau) + u$ است تعیین می‌شود. از آنجا

$$c(\tau) = v(\tau) + u + g\tau$$

و

$$v_e(t , \tau) = -(t - \tau)g + v(\tau) + u$$

بدین‌سان اندازهٔ حرکت عنصر جرم Δm_e برابر است با $v_e(t , \tau)\Delta m_e$ ، و $P_e(t)$ اندازهٔ حرکت‌کل مربوط به‌تمام گاز خروجی با انتگرال زیر داده می‌شود

$$P_e(t) = \int v_e(t , \tau)\, dm_e$$

اگر عمل خروج از زمان $t = \circ$ آغاز شده، و تا زمان حاضر t ادامـه یافته باشد، آنگاه $P_e(t)$ را می‌توان بایك انتگرال زمانی روی فاصلهٔ $(\circ , t)$ نیز نمایش داد. بدین‌سان

$$P_e(t) = \int_\circ^t v_e(t , \tau)\frac{dm_e}{d\tau}(\tau)\, d\tau$$

$$=\int_{\circ}^{t}[-(t-\tau)g+v(\tau)+u]\frac{dm_e}{d\tau}(\tau)\,d\tau$$

و چون با توجه به‌معادلهٔ (۱) داریم $dm_e/dt=-dm/dt$، از آنجا

$$P_e(t)=\int_{\circ}^{t}[(t-\tau)g-v(\tau)-u]\frac{dm}{d\tau}(\tau)\,d\tau \qquad (۵)$$

برای محاسبهٔ dP_e/dt باید از انتگرال (۵) مشتق گرفت. با توجه به‌اینکه پارامتر t هم درحد بالایی وهم در زیرعلامت انتگرال موجود است، dP_e/dt مساوی است با

$$\frac{dP_e}{dt}(t)=g\int_{\circ}^{t}\frac{dm}{d\tau}(\tau)\,d\tau-[v(t)+u]\frac{dm}{dt}(t)$$

$$=g[m(t)-m(\circ)]-[v(t)+u]\frac{dm}{dt}(t)$$

$$=g[m(t)-m_{\circ}]-[v(t)+u]\frac{dm}{dt}(t) \qquad (۶)$$

درآخرین مرحله از این نکته‌که جرم اولیهٔ سفینه شامل جرم کل دستگاه می‌باشد استفاده شده است.

معادلهٔ حرکت سفینهٔ فضایی با جرم متغیر ازگذاشتن عبارتهای (۳)، (۴) و (۶) به‌ترتیب به‌جای F، dP_r/dt و dP_e/dt در معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آید. نتیجه پس از ساده‌کردن عبارت است از

$$-mg=m\frac{dv}{dt}-u\frac{dm}{dt} \qquad (۷)$$

مراجع

برای بحث‌کاملتری در بارهٔ اثبات قضیه وجود ویکتایی می‌توانید به‌کتابهای پیشرفته‌تر معادلات دیفرانسیل رجوع کنید. دوکتاب زیر برای خوانندهٔ مبتدی قابل استفاده هستند.

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Brauer, F. and Nohel, J., *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Benjamin, New York, 1973.

کتاب زیر شامل فهرست مفیدی ازمعادلات دیفرانسیل وجوابهای آنها است:

Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea, New York, 1948.

متن کتاب آلمانی است، امـا برای مراجعه به‌فهرست مسائل حل شده اطلاع بسیار اندکی از زبان آلمانی کافی است.

۳

معادلات خطی مرتبهٔ دوم

۱.۳ مقدمه

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به‌طور کلی به صورت زیر است

$$F(x, y, y', y'')=0 \qquad (1)$$

نظریهٔ مربوط به‌این معادلات بسیار پیچیده است. بنابراین درآغاز معادلاتی را مورد توجه قرارمی‌دهیم که بتوان آنها را نسبت به y'' حل کرد، و به صورت زیر نوشت

$$y''=f(x, y, y') \qquad (2)$$

چنان‌که دیدیم معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $y'=f(x, y)$ دارای جوابی است که‌درآن یك ثابت دلخواه وجود دارد. چون معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم متضمن مشتق دوم است. بنابراین، به بیان اجمالی، تعیین جواب آن مستلزم دوانتگرال‌گیری است، طبعاً می‌توان انتظار داشت‌که برای معادلهٔ (۲) جوابهایی حاوی دوثابت دلخواه به‌دست آید. به عنوان مثال، جواب معادلهٔ

$$y''=g(x) \qquad (3)$$

عبارت است از

$$y=\phi(x)=c_1+c_2x+\int^x\left[\int^t g(s)ds\right]dt \qquad (4)$$

که درآن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند. درمورد معادلهٔ مرتبهٔ اول برای تعیین یـك

خم انتگرال یکتا کافی بود مقدار جواب را دریك نقطه مشخص کنیم. چون امکان داردکه جواب معادلهٔ مرتبهٔ دوم حاوی دوثابت دلخواه باشد، بنابراین برای تعیین یك جواب یکتا لازم است دوشرط، مثلاً y_0 و y'_0 مقدار جواب و مشتق آن درنقطهٔ x_0، مشخص شود. این شرایط را شرایط اولیه می‌نامند. بدین‌سان برای آنکه یك خم انتگرال معادلهٔ مرتبهٔ دوم به‌طور یکتا معین گردد، نه‌تنها باید نقطه‌ای راکه ازآن می‌گذرد مشخص کرد بلکه باید شیب خم را نیز درنقطهٔ مزبور تعیین نمود.

برای آنکه نسبت به‌وجود جواب معادلهٔ (۲) با شرایط اولیهٔ مفروض اطمینان حاصل شود، لازم است فرض کنیم که تابع f واجد چند خاصیت است. این نکته درقضیهٔ وجود ویکتایی زیر بیان شده است.

قضیهٔ ۱.۳. اگر توابع f ، f_y و $f_{y'}$ دریك ناحیهٔ باز R ازفضای سه بعدی xyy' پیوسته باشند، و اگر نقطهٔ (x_0, y_0, y'_0) به R متعلق باشد، آنگاه در یك فاصله حول x_0 برای معادلهٔ دیفرانسیل (۲)،

$$y''=f(x, y, y')$$

جواب یکتای $y=\phi(x)$ وجود داردکه درشرایط اولیهٔ مفروض

$$y(x_0)=y_0, \ y'(x_0)=y'_0 \tag{۵}$$

صدق می‌کند.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیهٔ مربوط به معادلهٔ مرتبهٔ اول است که در بند ۱۱.۲ آمد. برای اثبات معمولا مناسبتر است که به‌جای معادلهٔ مرتبهٔ دوم یك دستگاه متشکل از دو معادلهٔ مرتبهٔ اول هم‌ارز پـا آن را بگذاریم (فصل ۷ را ببینید). این قضیه دربسیاری از کتابهای پیشرفته‌تر، مانند کادیگتون (فصل ۶) یا اینس (فصل ۳) اثبات شده است.

گرچه وجود جواب معادلهٔ (۲) تحت شرایط قضیهٔ ۱.۳ تضمین شده‌است، اما امکان داردکه نتوان عبارت تحلیلی مناسبی برای جواب به‌دست آورد، مگرآنکه تابع f به‌قدر کافی ساده باشد. درست مانند معادلات مرتبهٔ اول برای معادلات مرتبهٔ دوم نیز دوحالت خطی وغیرخطی درنظرمی‌گیریم. صورت‌کلی معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم چنین است

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=G(x) \tag{۶}$$

که در آن P ، Q ، R و G توابع معلومی هستند.

مثال ساده ومهمی ازمعادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، معادلهٔ حرکت جرمی است که به فنری بسته شده باشد.

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+c\frac{du}{dt}+ku=F(t), \tag{۷}$$

کـه درآن m ، c و k مقادیر ثابت و F تابع مفروضی است. این معادله را دربند ۷.۳

به‌دست می‌آوریم، مثالهای دیگر عبارتند ازمعادلهٔ لژاندر[1] از رتبهٔ α،

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \qquad (8)$$

ومعادلهٔ بسل[2] از رتبهٔ ν ،

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (9)$$

که درآنها α و ν مقادیرثابت، و اغلب اعداد صحیح می‌باشند. معادلهٔ بسل دربسیاری از مسائل فیزیکی گوناگون، به‌ویژه درمسائلی که متضمن هندسهٔ دایره‌ای است، از قبیل تعیین توزیع حرارت دریک صفحهٔ مدور، ظاهرمی‌شود. معادلهٔ لژاندر غالباً درمسائل فیزیکی متضمن هندسهٔ کروی پدید می‌آید.

اگرمعادلهٔ (۲) به‌صورت (۶) نباشد، آن‌را غیرخطی می‌نامند. گرچه نظریهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیرخطی نسبتاً دشوار است،امادر دوحالت خاص می‌توان معادلهٔ غیر خطی مرتبهٔ دوم‌کلی (۲) را ساده‌کرد. این هنگامی است‌که $f(x\,,\,y\,,\,y')$ فاقد متغیر x یا متغیر y باشد، یعنی وقتی‌که معادلهٔ (۲) به صورت

$$y''=f(x\,,\,y') \qquad (10)$$

یا

$$y''=f(y\,,\,y') \qquad (11)$$

باشد. دراین حالتها همواره می‌توان معادلهٔ (۱۰) یا معادلهٔ (۱۱) را با $v=y'$ به معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل‌کرد. چون معادلهٔ مرتبهٔ اول حاصل ازنوعی است‌که درفصل ۲ موردبحث قرارگرفت، می‌توان باحل آن v را پیداکرد، وبا یك انتگرال‌گیری دیگر جواب معادلهٔ دیفرانسیل اصلی را به‌دست‌آورد. این مطلب درمسائل ۱، ۲ و ۳ درپایان همین بندمورد بحث قرارگرفته است.

بقیهٔ این فصل وفصل بعد به بیان روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم اختصاص دارد. گرچه برای حل معادلهٔ (۶) فرمول خاصی نظیر آنچه‌که درحالت معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول داشتیم در دست نیست، اما دربارهٔ آن نظریهٔ ریاضی جامعی وجود دارد. دربحث زیر به‌جز مواردی‌که تصریح خواهد شد، فرض می‌کنیم کـه درمعادلهٔ (۶) توابع P، Q، R و G روی یك فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ پیوسته‌اند (دربرخی ازمسائل فاصلهٔ مزبور

---

۱. آ. م. لژاندر (A. M. Legendre)، (۱۷۵۲ ــ ۱۸۳۳) یکی از ریاضیدانان برجستهٔ فرانسوی است وتحقیقاتش عمدتاً در زمینه‌های توابع بیضوی ونظریهٔ اعداد بوده است. توابع لژاندرکه جوابهای معادلهٔ دیفرانسیلی به‌همین نام می‌باشند، حاصل‌بررسیهای او دربارهٔ جاذبهٔ اجسام‌کروی شکل است.

۲. ف. و. بسل (F. W. Bessel)، (۱۷۸۴ ــ ۱۸۴۶) یکی از ریاضیدانان آلمانی است، که درزمینه‌های نجوم، ژئودزی ومکانیك سماوی دارای تحقیقات بنیادی‌است. وی برای‌نخستین بار به تحلیل سیستماتیك جوابهای معادله‌ای‌کـه به‌نام او موسوم است (وتوابـع بسل نامیده می‌شوند) پرداخت.

می‌تواند نامحدود باشد، یعنی α می‌تواند $-\infty$ ویا β می‌تواند $+\infty$ باشد)، وعلاوه بر این، تابع P دراین فاصله هیچگاه صفر نمی‌شود. دراین حالت می‌توان معادلهٔ (۶) را به $P(x)$ تقسیم کرد ومعادله‌ای بصورت زیر بدست آورد.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=g(x) \qquad (12)$$

دیده می‌شود که مفروضات بالا در مورد معادلهٔ (۷) در $-\infty<x<\infty$، و در مورد معادلهٔ لژاندر روی فواصل $-1<x<1$، یا $x>1$، یا $x<-1$، و در مورد معادلهٔ بسل روی هرفاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد برقرارند.

اگرمعادلهٔ (۱۲) را به صورت معادلهٔ (۲) بنویسیم، تابع f عبارت خواهد بود از

$$f(x, y, y')=-p(x)y'-q(x)y+g(x) \qquad (13)$$

چون $\partial f(x, y, y')/\partial y'=-p(x)$ و $\partial f(x, y, y')/\partial y=-q(x)$ پیوسته‌اند، از قضیهٔ ۱.۳ وجود و یکتایی جواب معادلهٔ (۱۲) که درشرایط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$، $y'(x_0)=y'_0$، درفاصله‌ای حول x_0، $\alpha<x_0<\beta$ صدق کند محرز می‌گردد. اما، همانند معادلات مرتبهٔ اول، قضیهٔ وجود ویکتایی مربوط به معادلات مرتبهٔ دوم را می‌توان دربارهٔ معادلات خطی بصورتی قویتر ازحالت غیرخطی بیان کرد.

قضیهٔ ۲.۳. اگر توابع p، q و g روی فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ پیوسته باشند، آنگاه یك وفقط یك تابع $y=\phi(x)$ وجود داردکه درتمام فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ درمعادلهٔ دیفرانسیل (۱۲)،

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

و درنقطهٔ خاص x_0 متعلق به فاصلهٔ مزبور، درشرایط اولیهٔ (۵)،

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0$$

صدق کند.

برای توضیح یکی ازکاربردهای این قضیه مثالهای سادهٔ زیر را درنظرمی‌گیریم.

مثال ۱. جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+y=0$$

راکه درشرایط اولیهٔ $y(0)=0$، $y'(0)=1$ صدق می‌کند بیابید.

به‌آسانی تحقیق می‌شود که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای این‌معادلهٔ دیفرانسیلند. علاوه بر این $y=\sin x$ در $y(0)=0$، $y'(0)=1$ صدق می‌کند، بنابراین طبق قضیهٔ ۲.۳، $y=\sin x$ جواب یکتای مسئله است.

مثال ۲. تنها جواب معادلهٔ

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \quad \alpha<x<\beta$$

را کــه درشرایط اولیهٔ $y(x_0)=0$ ، $y'(x_0)=0$ صدق می کند بیابید، x_0 نقطه‌ای از فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ است.

چون $y=0$ هم درمعادلهٔ دیفرانسیل وهم درشرایط اولیهٔصدق می کند همان‌جواب یکتای مطلوب است.

باید توجه داشت کــه شرایط اولیه درقضیه‌های ۱.۳ و ۲.۳ کــه موجب می‌شوند معادلهٔ (۲) یامعادلهٔ (۱۲) یك جواب یکتا داشته باشد شرایطی روی مقدار تابع جواب و مشتق اول آن دریك نقطهٔ ثابت ازفاصلهٔ مزبور هستند. برعکس، مسئلهٔ تعیین جواب برای، مثلاً معادلهٔ (۱۲) درفاصلهٔ $x_0<x<x_1$ ، کــه در $y(x_0)=A$ ، $y(x_1)=B$ صدق کند مشمول این قضیه نیست. در واقع، همواره ممکن است مسئلهٔ اخیر دارای جــواب نباشد. این‌گــونه مسائل را مسائل مقدار مرزی می‌نامند، و درفصلهای ۱۰ و ۱۱ مورد بحث قرار می گیرند.

برای حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (۱۲)،

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

لازم می‌آید که نخست معادلهٔ همگن[1] یا ساده، یا مکمل

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (14)$$

را که ازمعادلهٔ (۱۲) با قراردادن $g(x)=0$ بدست می‌آید حل کنیم. هنگامی که جواب معادلهٔ همگن (۱۴) به دست آمد، می‌توان بــا یك روش کلی معادلــهٔ غیرهمگن (۱۲) را حل کرد. درسه بند آیندهٔ چند نتیجهٔ کلی دربارهٔ معادلهٔ همگن (۱۴) بیان خواهدشد. آنگاه دربند ۵.۳ نشان می‌دهیم که چگونه می توان معادلهٔ(۱۴) را درحالت‌خاصی که توابع p و qمقادیرثابتی باشند حل کرد. حتی همین حالت خاص درعمل دارای اهمیت بسیاری است، مثلاً معادلهٔ مربوط به حرکت جرمی که بهیك فنربسته شده‌است دارای ضرایب ثابت‌است. دربند ۶.۳ معادلهٔ غیرهمگن (۱۲) رامورد توجه قرارمی‌دهیم. بقیهٔاین فصل به‌کاربردهایی در زمینه‌های ارتعاشات مکانیکی وشبکه‌های الکتریکی اختصاص دارد.

مسائل

۱. با جایگزینی $v=y'$، $v'=y''$ درمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $y''=f(x, y')$ یك معادلهٔ مرتبهٔ اول به‌صورت $v'=f(x, v)$ بدست می‌آید. اگر بتوان‌ازحل این‌معادله v را به دست آورد، آنگاه با انتگــرال گیری از $dy/dx=v(x)$ تابع y معین می گردد. توجه شودکــه یك ثابت دلخواه درحل معادلهٔ مرتبهٔ اول مربوط به v، و یك ثابت دیگر

---

[1] . توجه شود که مفهوم واژهٔ همگن دراینجا، با مفهومی که دربحث معادلات دیفرانسیل همگن مرتبهٔ اول دربند ۷.۲ به‌کاررفت ارتباطی ندارد.

درانتگرال‌گیری مربوط به y ظاهرمی‌شود. معادلات دیفرانسیل زیررا حل‌کنید.

(الف) $x^{2}y''+2xy'-1=0\,,\quad x>0$

(ب) $xy''+y'=1\,,\quad x>0$

(ج) $y''+x(y')^{2}=0$

(د) $2x^{2}y''+(y')^{3}=2xy'\,,\quad x>0$

۲. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی به صورت $y''=f(y\,,\,y')$ را درنظر می گیریم. اگرقراردهیم $v=y'$، خواهیم داشت $v'=f(y\,,\,v)$. این معادله شامل متغیرهای x، v و y است، وبنابراین به‌صورت معادلهٔ مرتبهٔ اولی‌که درفصل ۲ بحث شد نمی باشد.می‌توان متغیر x را باانتخاب y به‌عنوان متغیرمستقل حذف کـرد، زیرا بنابه قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dy}$$

وبنابراین معادلهٔ دیفرانسیل اصلی به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$v\frac{dv}{dy}=f(y\,,\,v)$$

اگربتوان این معادلهٔ مرتبهٔ اول را حل‌کرد، v به‌عنوان تابعی از y به‌دست می‌آید. رابطهٔ بین y و x ازحل $dy/dx=v(y)$ نتیجه می‌شود. دراینجا نیز، در نتیجهٔ نهایی دومقدار ثابت دلخواه وجود خواهد داشت. معادلات دیفرانسیل زیر را حل‌کنید.

(الف) $yy''+(y')^{2}=0$ (ب) $y''+y=0$

(ج) $y''+y(y')^{3}=0$ (د) $2y^{2}y''+2y(y')^{2}=1$

۳. با به‌کاربردن روشهای مسائل ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل زیر را حل‌کنید. اگر شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی بیابیدکه درشرایط مزبورصدق‌کند.

(الف) $y'y''=2\,,\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=2$

(ب) $y''-3y^{2}=0\,,\quad y(0)=2\,,\quad y'(0)=4$

(ج) $(1+x^{2})y''+2xy'+3x^{-2}=0\,,\quad x>0$

(د) $y'y''-x=0\,,\ y(1)=2\,,\quad y'(1)=1$

۴. برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل خطی زیر فاصله‌ای را تعیین کنید که درآن يك جـواب یکتا بـا شرایط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ وجود داشته باشد، x_0 نقطه‌ای ازفاصلهٔ مزبور است.

(الف) $xy''+3y=x$ (ب) $y''+6y'+7y=2\sin x$

(ج) $x(x-1)y''+3xy'+4y=2$

(د) $y''+(\cos x)y'+3(\ln|x|)y=0$

(ه) $(1+x^2)y''+4y'=e^x$

(و) $e^x y''+x^2y'+y=\operatorname{tg} x$

۵. گیریم p و q روی یك فـاصلهٔ باز کـه شامل مبدأ است پیـوسته باشند، و $y=\phi(x)$ جواب

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\ ,\quad y(0)=a_0\ ,\ y'(0)=a_1$$

باشد، $\phi''(0)$ را بیـابید. اگر p و q چنـد جمله‌ای باشند، ثابت می‌کنند که از جواب $y=\phi(x)$ می‌توان بینهایت بار مشتق گرفت. با فرض آنکه p و q چند جمله‌ای باشند، $\phi'''(0)$ را برحسب a_0، a_1، $p(0)$، $q(0)$، $p'(0)$، و $q'(0)$ بیابیـد. آیا این عمل را می‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد؟

۶. جواب هر معادلهٔ مرتبهٔ دوم به صورت $y''=f(x\ ,\ y\ ,\ y')$ عموماً متضمن دو مقدار ثابت دلخواه است. برعکس، می‌توان نشان داد که هرخانواده از توابع که متضمن‌دو ثابت دلخواه باشد، جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی خواهد بود. درهر یك ازحالتهای زیر با حذف c_1 و c_2 بین y، y' و y'' معادلهٔ دیفرانسیلی بیابید که خانوادهٔ توابع داده شده در آن صدق کند.

(الف) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ (ب) $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

(ج) $y=c_1x+c_2\sin x$ (د) $y=(c_1+c_2x)e^x$

(ه) $y=c_1x+c_2x^2$ (و) $y=c_1\cosh x+c_2\sinh x$

۲.۳ جوابهای اساسی معادلهٔ همگن

در بحث نظریهٔ معـادلات دیفرانسیل خطی، استفـاده از نماد عملگر دیفرانسیلی می‌تواند بسیار سودمند باشد. گیـریم p و q توابع پیوسته‌ای روی یك فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ باشند. آنگاه به‌ازای هر تابع دوبار مشتق‌پذیر ϕ روی $\alpha<x<\beta$، عملگر دیفرانسیلی L را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$L[\phi]=\phi''+p\phi'+q\phi \qquad (1)$$

توجه شود که $L[\phi]$ نیز تابعی روی $\alpha<x<\beta$ است، درواقع L را می‌توان به‌عنوان تابعی که حوزه و دامنهٔ آن خود توابعی از یك متغیر حقیقیند درنظر گرفت. عملگر L اغلب به‌صورت $L=D^2+pD+q$ نوشته می‌شود، که در آن D عملگر مشتقی است. مقدار تابع $L[\phi]$ درنقطهٔ x برابراست با

$$L[\phi](x)=\phi''(x)+p(x)\,\phi'(x)+q(x)\,\phi(x)$$

مثلاً، اگر $p(x)=x^{2}$، $q(x)=1+x$، و $\phi(x)=\sin 3x$ باشد، آنگاه

$$L[\phi](x)=(\sin 3x)''+x^{2}(\sin 3x)'+(1+x)\sin 3x$$
$$=-9\sin 3x+3x^{2}\cos 3x+(1+x)\sin 3x$$

دراین بند به‌بررسی معادلهٔ همگن خطی مرتبهٔ دوم زیر می‌پردازیم

$$L[\phi](x)=\phi''(x)+p(x)\phi'(x)+q(x)\phi(x)=0 \qquad (2)$$

توابع p و q روی یك فاصلهٔ بـاز $\alpha<x<\beta$ پیوسته فرض می‌شوند. توجه شود که معمولاً $\phi(x)$ را با علامت y نشان می‌دهند. بدین‌سان اغلب به‌جای معادلهٔ (۲) می‌نویسیم

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (3)$$

باید توجه داشت‌که $L[\phi]$ دررابطهٔ (۱) نمایشگر یك تابع است، درصورتی‌که $L[y]$ در معادلهٔ (۳) مقدارتابع $L[\phi]$ را درنقطهٔ x نشان می‌دهد. بدین‌سان علامت y به‌طرزخاصی به‌کار می‌رود.

با استفاده ازاین نکته‌که اگر u_1 و u_2 توابع مشتق‌پذیری باشند، آنگاه

$$[c_1u_1(x)+c_2u_2(x)]'=c_1u_1'(x)+c_2u_2'(x)$$

که درآن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی می‌باشند، می‌توان قضیهٔ مهم زیر را نتیجه‌گرفت.

قضیهٔ ۳.۲.۰ اگر $y=y_1(x)$ و $y=y_2(x)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳)

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

باشند، آنگـاه ترکیب خطی $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$، که در آن c_1 و c_2 ثابتهـای دلخواه‌اند، نیز یك جواب معادلهٔ (۳) است.

باید نشان دهیم که اگر

[1] $L[y_1]=y_1''+py_1'+qy_1=0$ و $L[y_2]=y_2''+py_2'+qy_2=0$،

آنگاه $L[c_1y_1+c_2y_2]=0$. اما

$$L[c_1y_1+c_2y_2]=(c_1y_1+c_2y_2)''+p(c_1y_1+c_2y_2)'+q(c_1y_1+c_2y_2)$$
$$=c_1(y_1''+py_1'+qy_1)+c_2(y_2''+py_2'+qy_2)$$
$$=c_1L[y_1]+c_2L[y_2]$$
$$=0$$

و قضیه ثابت می‌شود. اگردراثبات بالا $c_2=0$ بگیریم، این نتیجه به‌دست می‌آیدکه اگر

---

۱. توجه شود کـه چون $L[y_1]$ نمایشگر یك تابع است، ۰ در طرف دوم گزارهٔ $L[y_1]=0$ نمایشگر تابعی است‌که در $\alpha<x<\beta$ متحداً صفر است.

تابع y_1 یك جواب معادلهٔ (۳) باشد، آنگاه هر مضرب ثابت y_1 نیز یك جواب معادلهٔ (۳) است.

درضمن اثبات قضیهٔ ۳.۳، نشان داده شد که بهازای هردو تابع u_1 و u_2 که دارای مشتقهای دوم پیوسته باشند. و بهازای هردو ثابت دلخواه c_1 و c_2 داریم

$$L[c_1u_1+c_2u_2]=c_1L[u_1]+c_2L[u_2]$$

عملگری که دارای این خاصیت باشد، بهعملگر خطی موسوم است. بهویژه عملگر دیفرانسیلی L یك عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم است. مثال دیگری از عملگر خطی در مسئلهٔ ۱۰ آمده است.

این نکته که هر ترکیب خطی جوابهای یك معادلهٔ همگن خطی همچنان یك جواب معادلـهٔ مـزبور است دارای اهمیت اساسی است، و اغلب آن را اصل انطباق می‌نامند. نظریهٔ معادلات همگن خطی، مشتمل بر معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب بالاتر ومعادلات با مشتقهای جزئی، بهاصل انطباق بستگی زیاددارد. این اصل را با مثالهای سادهٔ زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. مستقیمـاً با محاسبه تحقیق کنید که $\phi(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y''+y=0$ است.

چون $\phi(x)$ را بهجای y قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned}\phi''(x)+\phi(x)&=(c_1\cos x+c_2\sin x)''+(c_1\cos x+c_2\sin x)\\&=c_1[(\cos x)''+\cos x]+c_2[(\sin x)''+\sin x]\\&=c_1[-\cos x+\cos x]+c_2[-\sin x+\sin x]=0\end{aligned}$$

مثال ۲. تحقـیق کنـید کـه $\phi(x)=x+1$ یك جـواب معـادلهٔ دیفـرانسیل $y''+3y'+y=x+4$ است؛ اما $\psi(x)=2\phi(x)$ جواب معادله نیست.

چون $\phi'(x)=1$ و $\phi''(x)=0$ داریم

$$\phi''(x)+3\phi'(x)+\phi(x)=0+3(1)+(x+1)=x+4$$

اما

$$\psi''(x)+3\psi'(x)+\psi(x)=0+3(2)+2(x+1)\neq x+4$$

این با قضیه ۳.۳ تناقضی ندارد، زیرا معادلهٔ دیفرانسیل مزبور همگن نیست.

مثال ۳. نشان‌دهید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ $L[y]=y''+y^2=0$ باشند، لزوماً ترکیب خطی $c_1y_1+c_2y_2$ یك جواب معادله نیست.

با جایگذاری، داریم

$$\begin{aligned}L[c_1y_1+c_2y_2]&=(c_1y_1+c_2y_2)''+(c_1y_1+c_2y_2)^2\\&=c_1y_1''+c_2y_2''+c_1^2y_1^2+2c_1c_2y_1y_2+c_2^2y_2^2\end{aligned}$$

$$\neq c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

در اینجا اصل انطباق به‌علت خطی نبودن معادلهٔ دیفرانسیل تحقق نمی‌یابد.

دیدیم که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ (۳) باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز یك جواب معادلهٔ (۳) است، ومتناظر به بینهایت مقدار که می‌توان به c_1 و c_2 نسبت داد، بینهایت جواب برای معادلهٔ (۳) ساخته می‌شود. اما آیا این بینهایت جواب شامل همهٔ جوابهای ممکن معادلهٔ (۳) است؟

دو جواب y_1 و y_2 از معادلهٔ (۳) هنگامی یك **مجموعهٔ اساسی جوابها** را تشکیل می‌دهند که هرجواب معادلهٔ (۳) را بتوان به‌صورت یك ترکیب خطی y_1 و y_2 بیان کرد. برای اثبات آنکه y_1 و y_2 یك مجموعهٔ اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند، باید نشان دهیم که به‌ازای هرجواب $y = \phi(x)$ می‌توان مقادیر ثابت c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. برای این منظور به‌روش زیر عمل می‌کنیم.

گیریم $y = \phi(x)$ جوابی ازمعادلهٔ (۳) باشد. نقطهٔ x_0 را درفاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ انتخاب می‌کنیم، آنگاه $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ به ترتیب مقادیر جواب مزبور و مشتق آن در نقطهٔ x_0 است. اکنون باید ثابتهای c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که تابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ و مشتق آن در $x = x_0$ به ترتیب مقادیر $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ را اختیار کنند. بدین‌سان c_1 و c_2 باید در دستگاه معادلات جبری خطی زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= \phi(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= \phi'(x_0) \end{aligned} \tag{۴}$$

دستگاه معادلات (۴) هنگامی دارای جواب یکتا برای c_1 و c_2 است که دترمینان ضرایب آن صفر نباشد، یعنی

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0) \neq 0 \tag{۵}$$

دراین صورت به‌ازای c_1 و c_2 که از معادلات (۴) به‌دست می‌آیند، توابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ و ϕ هردو در معادلهٔ دیفرانسیل (۳) وشرایط اولیهٔ متناظر به $x = x_0$ صدق می‌کنند. چون قضیهٔ ۲.۳ مبین آن است که تنها یك جواب برای این مسئلهٔ مقداراولیه وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ خواهیم‌داشت $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

اگر بدانیم که رابطهٔ (۵) به‌ازای هر x_0 در فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ برقرار است، همواره می‌توان یك چنین x_0 را انتخاب کرد. در این حالت معادلات (۴) را همواره می‌توان با صرف نظرکردن از مقادیر بخصوص x_0، $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ حل کرد. بدینسان قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۴.۳. اگر توابع p و q روی فاصلهٔ باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند و اگر y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳)

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

در شرط

$$y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\neq 0 \qquad (۶)$$

به ازای هر نقطه از فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ صدق کنند، آنگاه هر جواب معادلهٔ (۳) روی فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی y_1 و y_2 بیان کرد.

مرسوم است که ترکیب خطی $c_1y_1+c_2y_2$ را با c_1 و c_2ی دلخواه، جواب عمومی معادلهٔ (۳) بنامند.

مثال ۴. یک مجموعهٔ اساسی ازجوابهای معادلهٔ زیر را بیابید

$$y''+y=0\,,\quad -\infty<x<\infty \qquad (۷)$$

با بررسی می‌توان دید که $y_1(x)=\cos x$ و $y_2(x)=\sin x$ جوابهای معادلهٔ (۷) می‌باشند. علاوه براین

$$y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)=\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x=1$$

بنابراین اگر $y=\phi(x)$ یک جواب معادلهٔ (۷) باشد، آنگاه ثابتهای c_1 و c_2 وجوددارند به‌طوری که $\phi(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$.

دو تابع مشتق‌پذیر y_1 و y_2 را روی یک فاصلهٔ باز در نظر می‌گیریم، تابع $y_1y_2'-y_1'y_2$ را رونسکین[1] y_1 و y_2 می‌نامند، وآن را معمولاً به‌صورت زیرمی‌نویسند

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2 \qquad (۸)$$

مقدار رونسکین y_1 و y_2 را درنقطهٔ x با $W(y_1,y_2)(x)$ و اگر درمورد توابع ابهامی پیش نیاید به‌طور ساده‌آن را با $W(x)$ نشان می‌دهند.

اکنون فرض‌کنیم‌که برای معادلهٔ (۳) دوجواب y_1 و y_2 به‌دست‌آورده‌ایم، چگونه می‌توان تشخیص دادکه توابع y_1 و y_2 تشکیل یک مجموعهٔ اساسی می‌دهند، یعنی چگونه می‌توان معلوم کرد که $W(y_1,y_2)$ هیچگاه در فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ صفر نمی‌شود؟ در مثال ۴ داریم $W(\cos x,\sin x)=1$، وبنابراین روشن است‌که $\cos x$ و $\sin x$ روی هرفاصله، یک مجموعهٔ اساسی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y''+y=0$ تشکیل می‌دهند. اما، به‌طورکلی $W(y_1,y_2)$ مقدارثابتی نخواهد بود، وممکن است تشخیص آنکه تابع مزبور درنقطه‌ای از فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ صفر شود دشوار باشد. خوشبختانه به این سؤال با قضیهٔ مهم زیرمی‌توان پاسخ داد.

قضیهٔ ۵.۳. اگر توابع p و q روی فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ پیوسته باشند، و اگر

---

۱. به‌احترام ریاضیدان هلندی رونسکی (Wronski)، (۱۷۷۸–۱۸۵۳).

توابع y_1 و y_2 روی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ یا متحد با صفر است و یا هیچگاه در $\alpha < x < \beta$ صفر نمی‌شود.

برای اثبات این قضیه می‌توان از استدلالی مشابه آنچه در اثبات قضیهٔ ۴.۳ به‌کار رفت استفاده نمود، اما، ما اثبات دیگری عنوان می‌کنیم که در آن ضمناً فرمولی برای $W(y_1, y_2)$ به‌دست می‌آید. با توجه به‌اینکه توابع y_1 و y_2 در

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 &= 0 \end{aligned} \tag{۹}$$

صدق می‌کنند، معادلهٔ اول را در $-y_2$ و معادلهٔ دوم را در y_1 ضرب کرده و باهم جمع می‌کنیم، در نتیجه

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 \tag{۱۰}$$

چون قرار دهیم $W_{12}(x) = W(y_1, y_2)(x)$، دیده می‌شود که

$$W_{12}' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \tag{۱۱}$$

و می‌توان معادلهٔ (۱۰) را به‌صورت زیر نوشت

$$W_{12}' + pW_{12} = 0 \tag{۱۲}$$

این یك معادلهٔ جدایی‌پذیر (بند ۴.۲) و همچنین یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول (بند ۱.۲) است، و جواب آن مستقیماً به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$W_{12}(x) = c\exp\left[-\int^x p(t)dt\right] \tag{۱۳}$$

که در آن c ثابت دلخواهی است.[1] چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی‌شود، $W_{12}(x)$ تنها اگر $c = 0$ باشد صفر خواهد شد، ودر این صورت متحد با صفر است، بدین‌سان قضیه ثابت می‌شود. علاوه بر این رابطهٔ (۱۳) فرمولی است‌که می‌توان از آن رونسکین یك مجموعهٔ اساسی جوابهای معادلهٔ (۳) را با تقریب ضریب ثابتی بدون حل کردن معادله تعیین کرد. همچنین باید توجه داشت که‌رونسکین هردومجموعهٔ اساسی جوابها تنها در یك

---

۱. نتیجه‌ای که به‌صورت معادلهٔ (۱۳) بیان شده است نخستین بار توسط ریاضیدان نروژی ن. ه. آبل (N. H. Abel)، (۱۸۰۲–۱۸۲۹) در ۱۸۲۷ به‌دست آمده است، و به اتحاد آبل مشهور است. وی همچنین ثابت کرد که برای حل معادلهٔ درجه پنجم یك فرمول کلی که متضمن عملیات جبری روی ضرایب معادلهٔ مزبور باشد وجود ندارد. بزرگترین تحقیق وی در آنالیز و در زمینهٔ توابع بیضوی است، اما قبل از مرگ وی به‌این رساله توجه نشد. لژاندر ریاضیدان بزرگ فرانسوی‌آن را به‌عنوان «بنایی مستحکمتر از برنز» توصیف کرد.

ضریب ثابت باهم اختلاف دارند.

با ترکیب نتایج قضیه‌های ۴.۳ و ۵.۳ می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد.

قضیهٔ ۶.۳. اگر توابع p و q روی فاصلهٔ باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 روی فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، و اگر حداقل در یک نقطهٔ $\alpha<x<\beta$ ، $W(y_1, y_2)$ صفر نباشد، آنگاه هرجواب $y = \phi(x)$ از معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(y)$$

بالاخره باید نشان دهیم که واقعاً معادلهٔ (۳) دارای یک مجموعهٔ اساسی جواب می‌باشد، یعنی باید به‌اثبات قضیهٔ زیر بپردازیم.

قضیهٔ ۷.۳. اگر توابع p و q روی فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ پیوسته باشند، آنگاه یک مجموعهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

روی فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ وجود دارد.

گیریم c نقطه‌ای از $\alpha<x<\beta$ باشد. بنابر قضیهٔ ۲.۳ برای مسائل مقدار اولیهٔ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(c) = 1, \quad y'(c) = 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0: \quad y(c) = 0, \quad y'(c) = 1$$

جوابهای یکتای y_1 و y_2 درفاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ وجود دارد. به‌آسانی دیده می‌شود که $W(y_1, y_2)(c) = 1 \neq 0$. بنابراین از قضیهٔ ۶.۳ نتیجه می‌شود که y_1 و y_2 یک مجموعهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ (۳) تشکیل می‌دهند.

درخاتمهٔ این بند برهان جالب دیگری برای قضیهٔ ۶.۳ می‌آوریم. دراین برهان نیازی به‌استفاده ازقضیهٔ وجود ویکتایی (برهان قضیهٔ ۴.۳ را ببینید) نمی‌باشد. فرض کنیم که توابع y_1 ، y_2 و y_3 جوابهای معادلهٔ (۳) باشند، و $W(y_1, y_2)(x)$ هیچگاه در $\alpha<x<\beta$ صفر نشود. برای اثبات رابطهٔ $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$. معادلات زیر را درنظر می‌گیریم

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

$$y_3'' + py_3' + qy_3 = 0$$

معادلهٔ اول را در $-y_2$ ، و معادلهٔ دوم را در y_1 ضرب کرده با هم جمع می‌کنیم. و با

استفاده ازمعادلهٔ ۱۱ داریم

$$W'_{12}+pW_{12}=0 \tag{۱۴}$$

که در آن $W_{12}(x)=W(y_1, y_2)(x)$. بامحاسبهٔ مشابهی درمورد معادلات دوم و سوم، وبالاخره معادلات اول وسوم،خواهیم داشت

$$W'_{23}+pW_{23}=0 \tag{۱۵}$$

$$W'_{13}+pW_{13}=0 \tag{۱۶}$$

معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) معادلات خطی مرتبهٔ اول‌اند. جوابهای آنها عبارتنداز

$$W_{12}(x)=y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)=k_{12}\exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right] \tag{۱۷}$$

$$W_{23}(x)=y_2(x)y'_3(x)-y'_2(x)y_3(x)=k_{23}\exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right] \tag{۱۸}$$

$$W_{13}(x)=y_1(x)y'_3(x)-y'_1(x)y_3(x)=k_{13}\exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right] \tag{۱۹}$$

که در آن k_{12}، k_{23} و k_{13} ثابت‌اند، و بویژه $k_{12}\neq 0$، زیرا W_{12} بنابرفرض‌هیچگاه صفر نمی‌شود. چون معادلهٔ (۱۸) را در $-y_1(x)$، ومعادلهٔ (۱۹) را در $y_2(x)$ ضرب کرده و باهم جمع‌کنیم خواهیم داشت

$$[y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)]y_3(x)=$$

$$[-k_{23}y_1(x)+k_{13}y_2(x)]\exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right] \tag{۲۰}$$

بالاخره، چون بـه‌جای $y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)$ مقدار آن را از معادلهٔ (۱۷) جایگزین کنیم، و نماییها را حذف‌کنیم بدست می‌آید

$$y_3(x)=-\frac{k_{23}}{k_{12}}y_1(x)+\frac{k_{13}}{k_{12}}y_2(x)$$

بنابراین y_3 را می‌توان به صورت یك ترکیب خطی y_1 و y_2، همان‌طورکه باید ثابت می‌کردیم، بیان کرد.

مسائل

۱. تحقیق‌کنیدکه e^x و e^{-2x} وترکیب خطی $c_1e^x+c_2e^{-2x}$، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی‌اند، جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌باشند:

$$y''+y'-2y=0$$

۲. در مسئلهٔ ۱ جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل را که در شرایط اولیهٔ $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ صدق می‌کند بیابید. جواب یکتای این مسئلهٔ هنگامی که شرایط اولیهٔ $y(1)=0$ ، $y'(1)=0$ باشد چیست؟

۳. تحقیق کنید که e^{x} و e^{-x} جوابهای $y''-y=0$ می‌باشند. از آنجا نشان دهید که $\sinh x=(e^{x}-e^{-x})/2$ و $\cosh x=(e^{x}+e^{-x})/2$ نیز جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل هستند.

۴. تحقیق کنید که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای $y''+y=0$ می‌باشند. فعلاً می‌پذیریم که $(cf)'=cf'$ که در آن f یك تابع با مقدار حقیقی و c یك عدد مختلط است، نشان دهید که ترکیب خطی $(1+i)\sin x+(2-i)\cos x$ نیز یك جواب $y''+y=0$ است. در اینجا i یکهٔ موهومی و $i^{2}=-1$ است.

۵. تحقیق کنید که x^{2} و x^{-1} و ترکیب خطی $c_1x^{2}+c_2x^{-1}$، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند، جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $x^{2}y''-2y=0$، $x>0$ می‌باشند.

۶. تحقیق کنید که ۱ و $x^{1/2}$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $yy''+(y')^{2}=0$ می‌باشند، $x>0$ ؛ اما ترکیب خطی $c_1+c_2x^{1/2}$ به طور کلی جواب نیست. چرا؟

۷. نشان دهید که اگر $y=\phi(x)$ یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ ، $g(y)\not\equiv 0$ باشد، آنگاه $y=c\phi(x)$ که در آن c ثابتی مخالف یك است، جواب نیست. چرا؟

۸. فرض می‌کنیم $L[y]=ay''+by'+cy$ باشد که در آن a، b و c ثابت‌اند، مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $L[x]$ (ب) $L[\sin x]$

(ج) $L[e^{rx}]$، r ثابت (د) $L[x^{r}]$، r ثابت

۹. فرض می‌کنیم $L[y]=ax^{2}y''+bxy'+cy$، $x>0$ باشد که در آن a، b و c ثابت‌اند، مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $L[x^{2}]$، (ب) $L[e^{rx}]$، r ثابت

(ج) $L[x^{r}]$، r ثابت (د) $L[\ln x]$

۱۰. نشان دهید عامل M که با

$$M[u](x)=\int_{\alpha}^{\beta}K(x-t)u(t)\,dt \quad \text{و} \quad \alpha<x<\beta$$

تعریف شده است و در آن K تابعی پیوسته در فاصلهٔ $\alpha-\beta\leqslant s\leqslant\beta-\alpha$ می‌باشد، یك عملگر خطی است، یعنی نشان دهید که

$$M[c_1u_1+c_2u_2]=c_1M[u_1]+c_2M[u_2]$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌اند.

۱۱. رونسکین زوجهای توابع زیر را بیابید:

(الف) e^{mx} ، e^{nx} که در آن m و n اعداد صحیح هستند و $m\neq n$

(ب) $\sinh x\ ,\ \cosh x$ (ج) $x\ ,\ xe^x$

(د) $e^x\sin x\ ,\ e^x\cos x$ (ه) $1+\cos 2x\ ,\ \cos^2 x$

۱۲. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده‌اند و با محاسبهٔ $W(y_1\ ,\ y_2)$ تعیین کنید که در چه فواصلی تشکیل یك مجموعهٔ اساسی جواب می‌دهند.

(الف) $y''+\lambda^2 y=0\ ;\ y_1(x)=\sin\lambda x\ ,\ y_2(x)=\cos\lambda x$

λ یك عدد حقیقی است

(ب) $y''-y'-2y=0;\quad y_1(x)=e^{-x},\quad y_2(x)=e^{2x}$

(ج) $y''-2y'+y=0;\quad y_1(x)=e^x,\quad y_2(x)=xe^x$

(د) $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0;\quad y_1(x)=x\ ,\ y_2(x)=xe^x$

توجه شود که اگر معادلهٔ (د) را به‌صورت استاندارد $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ بنویسیم، ضرایب $p(x)=-(x+2)/x$ و $q(x)=(x+2)/x^2$ هنگامی که $x\to 0$ نامحدود می‌شوند، اما جوابهای x و xe^x هنگامی که $x\to 0$ کاملا معین‌اند. بدین‌سان اگر در نقطه‌ای ضرایب ناپیوسته باشند، جواب لزوماً ناپیوسته نخواهد بود، اما اغلب چنین است.

۱۳. تحقیق کنید که اگر ϕ ، ϕ_1 و ϕ_2 توابع مشتق پذیری باشند، آنگاه

$$W(\phi\phi_1\ ,\ \phi\phi_2)=\phi^2 w(\phi_1\ ,\ \phi_2).$$

۱۴. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 یك مجموعهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده تشکیل می‌دهند و جوابی را که در شرایط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند بیابید.

(الف) $y''-y=0,\qquad y(0)=0,\qquad y'(0)=1;$

$y_1(x)=e^x\ ,\ y_2(x)=e^{-x}$

(ب) $y''-y=0,\qquad y(0)=0,\quad y'(0)=1;$

$y_1(x)=\sinh x,\quad y_2(x)=\cosh x$

با نتیجهٔ قسمت (الف) مقایسه شود.

(ج) $y''+5y'+6y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1;$

$y_1(x)=e^{-2x},\qquad y_2(x)=e^{-3x}$

(د) $y''+y'=0,\qquad y(1)=0,\quad y'(1)=1;$

$y_1(x)=2,\qquad y_2(x)=e^{-x}$

در مسائل ۱۵ ، ۱۶ و ۱۷ فرض می‌کنیم که p و q پیوسته، و توابع y_1 و y_2

جوابهـای معادلـهٔ دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ روی فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ باشند.

۱۵. ثابت کنید کـه اگر y_1 و y_2 هردو در نقطه‌ای از $\alpha<x<\beta$ صفر شوند، آنگاه نمی‌توانند روی این فاصله یك مجموعهٔ اساسی جواب تشکیل دهند.

۱۶. ثابت کنید کـه اگـر y_1 و y_2 هردو در یك نقطـه از $\alpha<x<\beta$ دارای ماکزیمم یا می‌نیمم باشند، آنگاه نمی‌توانند روی ایـن فاصله یك مجموعهٔ اساسی جواب تشکیل دهند.

۱۷*. ثابت کنید کـه اگـر y_1 و y_2 یك مجموعـهٔ اساسی جواب باشند، آنگـاه نمی‌توانند هردو به ازای مقداری از $\alpha<x<\beta$ توأماً دارای نقطهٔ عطف باشند، مگر آن‌که به ازای آن p و q هردو صفر شوند.

۱۸*. می‌توان مفهوم کامل بودن را، که دربارهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول بررسی شد، درمورد معادلات خطی مرتبهٔ دوم تعمیم داد. معادلهٔ $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ راکامل گویند اگر بتوان آن را به‌صورت $[P(x)y']'+[f(x)y]'=0$ که درآن $f(x)$ برحسب $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ معین می‌شود نوشت. با انتگرال گیری ازمعادلهٔ اخیرفوراً معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی به‌دست می‌آید که می‌توان آن را با روش بند ۱.۲ حل کرد. بامساوی قراردادن ضرایب معادلات بالا، و حذف $f(x)$، نشان دهید که شرط لازم برای کامل بودن عبارت است از $P''(x)-Q'(x)+R(x)=0$. می‌توان نشان داد که این شرط برای کامل بودن کافی نیز هست. کامل بودن هریك از معادلات زیر را بررسی کنید، و در صورت کامل بودن، جواب آن را بیابید.

(الف) $y''+xy'+y=0$

(ب) $y''+3x^2y'+xy=0$

(ج) $xy''-(\cos x)y'+(\sin x)y=0,\quad x>0$

(د) $x^2y''+xy'-y=0,\quad x>0$

۱۹*. اگر معادلهٔ همگن خطی مرتبهٔ دومی کامل نباشد، می‌توان آن را با ضرب در یك عامل انتگرال‌ساز $\mu(x)$ کامل نمود. بدین‌سان باید $\mu(x)$ را طوری تعیین کرد که

$$\mu(x)P(x)y''+\mu(x)Q(x)y'+\mu(x)R(x)y=0$$

را بتوان به‌صورت

$$[\mu(x)P(x)y']'+[f(x)y]'=0$$

نوشت. با مساوی قرار دادن ضرایب این دو معادله و حذف $f(x)$ نشان دهید که تابع μ باید در معادلهٔ زیر صدق کند

$$P\mu''+(2P'-Q)\mu'+(P''-Q'+R)\mu=0$$

این معادله موسوم به معادلهٔ الحاقی است، و در نظریهٔ پیشرفتهٔ معادلات دیفرانسیل دارای

نقش بسیار مهمی می‌باشد. عموماً مسئلهٔ حل معادلهٔ دیفرانسیل الحاقی به‌همان دشواری حل معادلهٔ اصلی است. معادلهٔ الحاقی هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

(الف) معادلهٔ بسل[1] رتبهٔ ν:

$$x^{۲}y''+xy'+(x^{۲}-\nu^{۲})y=۰$$

(ب) معادلهٔ لژاندر[2] رتبهٔ α:

$$(۱-x^{۲})y''-۲xy'+\alpha(\alpha+۱)y=۰$$

(ج) معادلهٔ ایری[3]:

$$y''-xy=۰$$

(د) معادلهٔ ویتکر[4]:

$$x^{۲}y''+\left(-\frac{x^{۲}}{۴}+kx+\frac{۱}{۴}-m^{۲}\right)y=۰$$

که در آن k و m اعداد صحیح می‌باشند.

*۲۰. نشان دهید که درمورد معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=۰$$

معادلهٔ الحاقی معادلهٔ الحاقی، همان معادلهٔ اصلی است.

*۲۱. معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=۰$$

را هنگامی که معادلهٔ الحاقی آن با معادلهٔ اصلی متحد باشد خودالحاقی می‌نامند. نشان دهید که شرط لازم برای خودالحاقی بودن این معادلهٔ دیفرانسیل آن است که $P'(x)=Q(x)$. معادلات مسئلهٔ ۱۹ را از لحاظ خودالحاقی بررسی کنید.

*۲۲. در بررسی نظریهٔ معادلهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=۰$ اغلب به موارد برمی‌خوریم که باید تابع را طوری تبدیل نمود که معادله به‌صورت $u''+f(x)u=۰$ درآید. این‌صورت را فرم نرمال معادلهٔ همگن خطی مرتبهٔ دوم می‌نامند. برای تبدیل معادلهٔ اصلی به‌فرم نرمال‌قرار دهید $y=u(x)v(x)$ و $v(x)$ را طوری انتخاب کنید که ضریب u' صفر شود. $v(x)$ و $f(x)$ را بیابید.

۳.۳ استقلال خطی

مفهوم جواب عمومی یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به‌عنوان ترکیب خطی دوجواب که رونسکین آنها صفر نشود با مفهوم استقلال خطی دوتابع ارتباط نزدیکی دارد. مفهوم

---

1. Bessel　2. Legendre　3. Airy　4. Whittaker

اخیر دارای اهمیت زیادی است واز محدودهٔ این مسئله بسیار فراترمی‌رود، و دراینجا آن را به‌اختصار مورد بحث قرارمی‌دهیم.

گویند دو تابع f و g روی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ وابستگی خطی دارند اگر دو ثابت c_1 و c_2 که توأماً صفر نباشند وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \tag{1}$$

گویند دو تابع f و g روی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ استقلال خطی دارند اگر وابستگی خطی نداشته باشند، یعنی هنگامی که معادلهٔ (۱) تنها به‌ازای $c_1 = c_2 = 0$ روی همهٔ فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ برقرار باشد. همین تعریف را می‌توان روی هر فاصله‌ای هم‌که باز نباشد به‌کار برد.

مثال ۱. توابع $\sin x$ و $\cos(x+\pi/2)$ روی هر فاصله‌ای وابستگی خطی دارند، زیرا

$$c_1 \sin x + c_2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

با انتخاب $c_1 = 1$، $c_2 = 1$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار می‌گردد.

مثال ۲. نشان دهیدکه توابع e^x و e^{2x} روی هرفاصله دارای استقلال خطی‌اند.

باید نشان دادکه نمی‌توان ثابتهای c_1 و c_2 را که توأماً صفر نیستند طوری تعیین کردکه به‌ازای هر x درفاصلهٔ داده شده داشته باشیم

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0 \tag{2}$$

برای اثبات فرض می‌کنیم که معادلهٔ (۲) روی $\alpha < x < \beta$ برقرار باشد. آنگاه نقاط x_0 و $x_1 \neq x_0$ را دراین فاصله انتخاب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$c_1 e^{x_0} + c_2 e^{2x_0} = 0$$

$$c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} = 0$$

چون دترمینان ضرایب مخالف صفر است: $e^{2x_0+x_1} - e^{2x_1+x_0} \neq 0$، تنها $c_1 = c_2 = 0$ جواب این معادلات است. بنابراین e^x و e^{2x} دارای استقلال خطی‌اند.

اکنون می‌توان قضیهٔ ۳.۶ را مجدداً با استفاده ازمفهوم استقلال خطی بیان کرد.

قضیهٔ ۳.۸. اگر توابع p و q روی فاصلهٔ باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3}$$

دارای استقلال خطی باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ هیچگاه روی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ صفر

نمی‌شود، و بنابراین هر جواب معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت یك ترکیب خطی جوابهای y_1 و y_2 بیان کرد.

برای اثبات این قضیه باید نشان دهیم که اگر y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ (۳) روی $\alpha < x < \beta$ استقلال‌خطی داشته باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ هیچگاه روی $\alpha < x < \beta$ صفر نمی‌شود. فرض کنیم که یك نقطهٔ x_0، $\alpha < x_0 < \beta$، وجود داشته باشد به طوری که $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$، باید نشان دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد. اگر $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$، آنگاه دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{۴}$$

برحسب c_1 و c_2 جواب مخالف صفری خواهد داشت. با استفاده از این مقادیر c_1 و c_2 قرار می‌دهیم $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. آنگاه ϕ یك جواب معادلهٔ (۳) است، و علاوه براین بنا به معادلات (۴) در شرایط اولیهٔ $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ صدق می‌کند. بنابراین طبق قضیهٔ وجود و یکتایی، روی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ داریم $\phi(x) = 0$ (مثال ۲، بند ۱.۳ را ببینید). یعنی روی فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ داریم $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$، که مستلزم وابستگی خطی y_1 و y_2 است، و به‌تناقض می‌رسیم.

عکس قضیهٔ ۸.۳ نیز صادق است، یعنی اگر $L[y_1] = 0$، $L[y_2] = 0$، و $W(y_1, y_2) \neq 0$ روی $\alpha < x < \beta$، آنگاه توابع y_1 و y_2 روی $\alpha < x < \beta$ دارای استقلال خطی‌اند. برای اثبات این نکته نیز از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنیم که y_1 و y_2 روی $\alpha < x < \beta$ وابستگی خطی داشته باشند. دراین‌صورت می‌توان c_1 و c_2 را که توأماً صفر نباشند طوری تعیین کرد که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \tag{۵}$$

نتیجه می‌شود که رابطهٔ

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \tag{۶}$$

نیز روی $\alpha < x < \beta$ برقرار است. چون حداقل یکی از مقادیر c_1 یا c_2 مخالف صفر است برای برقراری معادلات (۵) و (۶) لازم (وکافی) است که $W(y_1, y_2)$ به‌ازای هر x صفر باشد، وبه‌تناقض می‌رسیم. ازاین‌رودوجواب معادلهٔ (۳) استقلال خطی دارند اگر و فقط اگر رونسکین‌آنها در هرنقطهٔ فاصلهٔ مزبور مخالف صفر باشد.

باید توجه داشت که این رابطه بین رونسکین و استقلال خطی، اگر توابع مزبور جوابهای معادلهٔ (۳) نباشند برقرار نیست. درمسئلهٔ ۱۰ مثالی‌از دو تابع مستقل خطی که رونسکین‌آنها متحد با صفر است بیان شده است.

شباهت این نتیجه با نتایجی از جبر برداری دو بعدی بسیار جالب توجه است. دو

بردار **a** و **b** را وابسته خطی گویند اگر دو اسکالر c_1 و c_2 که توأماً صفر نباشند وجود داشته باشد به‌طوری که $c_1\mathbf{a}+c_2\mathbf{b}=0$، درغیراین صورت مستقل خطی نامیده می‌شوند. گیریم بردارهای یکهٔ **i** و **j** به ترتیب در امتداد مثبت محورهـای x و y باشند. چون نمی‌توان اسکالرهای c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}=0$، وتوأماً صفر نباشند، بنابراین بردارهای **i** و **j** دارای استقلال خطی اند. علاوه براین می‌دانیم که هر بردار با مؤلفه‌های a_1 و a_2 را می‌توان به‌صورت $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ نوشت، یعنی آن را به‌صورت ترکیب خطی دو بردار مستقل خطی **i** و **j** بیان کرد، به‌آسانی ثابت می‌شود که هر بردارصفحه را می‌توان به صورت ترکیب خطی از هردوبردار مستقل خطی نمایش داد (مسئلهٔ ۷ را ببینید). این‌قبیل زوج بردارهای مستقل خطی را پایه یا مولد فضای برداری دوبعدی مزبور می‌نامند.

اصطلاح فضای برداری دربارهٔ اشیاء ریاضی دیگری که مانند بردارهای هندسی در همان قوانین جمع وضرب دراسکالر صدق می‌کنند، به‌کار می‌رود. مثلاً می‌توان نشان داد که مجموعهٔ توابعی که روی $\alpha < x < \beta$ دوبار مشتق‌پذیرند تشکیل یك فضای برداری می‌دهند. بـه همین نحو مجموعهٔ V متشکل از توابعی که در معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند نیز تشکیل یك فضای برداری می‌دهند.

چون هرعنصر V را می‌توان به‌صورت یك ترکیب خطی از عناصرمستقل خطی y_1 و y_2 بیان کرد، ازاین‌رو زوج مزبوررا یك پایهٔ V یا یك زوج مولد V می‌نامند. ازاینجا نتیجه می‌شود که V دوبعدی است ـ معادلهٔ (۳) از مرتبهٔ دوم است ـ و از بسیاری جهات با فضای بردارهای هندسی صفحه‌شباهت دارد. بعداً خواهیم دیدکه مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ nام، یك فضای برداری nبعدی تشکیل می‌دهد، که به‌وسیلهٔ هر مجموعهٔ n جواب مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل مزبور ایجاد می‌شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۴ ثابت کنـید کـه توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده می‌باشند.

۱. $y''-y=0\,;\quad y_1(x)=e^x,\quad y_2(x)=e^{-x}$

۲. $y''-y=0\,;\quad y_1(x)=\cosh x,\quad y_2(x)=\sinh x$

۳. $y''-y'-6y=0\,;\quad y_1(x)=e^{-2x},\quad y_2(x)=e^{3x}$

۴. $x^2y''+xy'-4y=0,\quad x>0\,;\quad y_1(x)=x^2,\quad y_2(x)=x^{-2}$

۵. ثابت‌کنیدکه اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

باشند، آنگاه c_1y_1 و c_2y_2 نیز جوابهای مستقل خطی‌اند مشروط به‌آنکه هیچ‌کدام از c_1 و c_2 صفر نباشد.

۶. ثابت کنید کـه اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند، آنگاه $y_3=y_1+y_2$ و $y_4=y_1-y_2$ نیز یك مجموعهٔ اساسی جواب تشکیل می‌دهند.

۷. (الف) ثابت‌کنید که هر بردار صفحه را می‌توان بـه صورت یك ترکیب خطی بردارهای $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ نوشت.

راهنمایی: هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به‌صورت $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ نوشت. نشان دهیدکه می‌توان c_1 و c_2 را طوری تعیین‌کردکه $\mathbf{a}=c_1(\mathbf{i}+\mathbf{j})+c_2(\mathbf{i}-\mathbf{j})$. برای این کار دو عبارت $\mathbf{a}$ را برابر قرارداده و c_1 و c_2 را برحسب a_1 و a_2 بیان کنید.

(ب) ثابت‌کنیدکه اگر بردارهای $\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{y}=y_1\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}$ مستقل خطی باشند، آنگاه هر بردار $\mathbf{z}=z_1\mathbf{i}+z_2\mathbf{j}$ را می‌توان به‌صورت یك ترکیب خطی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بیان کرد. توجه شود که اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دارای استقلال خطی باشند،آنگاه $x_1y_2-y_1x_2\neq 0$. چرا؟

*۸. تحقیق کنید که x و x^2 روی $-1<x<1$ دارای استقلال خطی‌اند، اما $W(x\,,\,x^2)$ در $x=0$ صفر می‌شود. از اینجا چه نتیجه‌ای می‌توانید دربارهٔ امکان این‌که x و x^2 جوابهای معادلهٔ (۳)ی متن باشند بگیرید؟ نشان دهیدکه x و x^2 جوابهای معادلهٔ $x^2y''-2xy'+2y=0$ می‌باشند. آیا این نکته با نتیجهٔ شما در تنـاقض است؟ آیا با قضیهٔ ۵.۳ بند ۲.۳ درتناقض است؟

*۹. اگـر توابع y_1 و y_2 جـوابهـای مستقـل خطـی معـادلـهٔ دیفـرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند، نشان دهیدکه بین هردو صفر متوالی y_1، تابع y_2 دارای یك و فقط یك صفر است.

راهنمایی: از قضیهٔ رل[1] استفاده‌کرده ونتیجه را با برهان خلف اثبات‌کنید. این نتیجه را اغلب قضیهٔ استورم[2]می‌نامند. به‌عنوان مثال خاص، توجه شودکه $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای مستقل خطـی $y''+y=0$ می‌باشند، و $(0\,,\,\pm\pi\,,\,\pm 2\pi\,,\,\ldots)$ صفرهای $\sin x$ و $(\pm\pi/2\,,\,\pm 3\pi/2\,,\,\ldots)$ صفرهای $\cos x$ در بین یکدیگر واقع‌اند.

۱۰. نشان دهیدکه توابع $y_1(x)=x|x|$ و $y_2(x)=x^2$ روی $0<x<1$ و روی $-1<x<0$ دارای وابستگی‌خطی‌اند،اما روی $-1<x<1$ استقلال خطی دارند. توجه شودکه‌گرچه y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند، $W(y_1\,,\,y_2)$ روی $-1<x<1$ متحد با صفر است، بنابراین y_1 و y_2 نمی‌توانند جوابهای معادلهٔ (۳)ی متن باشند.

۴.۳ کاهش مرتبه

نکتهٔ زیر دارای اهمیت و کاربرد بسیاری است: اگـر یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ دوم معلوم باشد، می‌توان جواب مستقل خطی دیگری (وبنابراین یك مجموعهٔ

---

1. Rolle (1652-1719) 2. Sturm (1803-1855)

اساسی جواب) به‌دست‌آورد. این روش از دالامبر[1] است، و معمولاً آن را روش کاهش مرتبه می‌نامند.

فرض کنیم که یك جواب y_1 که متحد با صفر نباشد برای معادلهٔ

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (1)$$

دردست باشد. آنگاه cy_1 که در آن c ثابت دلخواهی است نیزیك جواب معادلهٔ (۱) است. در اینجا این سؤال پیش می‌آید: آیا می‌توان تابع غیرثابت v را طوری تعیین کرد که $y=v(x)y_1(x)$ یك جواب معادلهٔ (۱) باشد؟ پاسخ مثبت است، وعلاوه براین، چنان که خواهیم دید می‌توان v را برآسانی تعیین‌کرد. اگر قراردهیم

$$y=v(x)y_1(x) \qquad (2)$$

آنگاه

$$y'=v(x)y_1'(x)+v'(x)y_1(x)$$
$$y''=v(x)y_1''(x)+2v'(x)y_1'(x)+v''(x)y_1(x)$$

با جایگزینی y، y' و y'' درمعادلهٔ (۱) خواهیم داشت

$$v(y_1''+py_1'+qy_1)+v'(2y_1'+py_1)+v''y_1=0 \qquad (3)$$

چون y_1 یك جواب معادلهٔ (۱) است بنابراین مقدار پرانتز اول صفر است. درهرفاصله‌ای که y_1 صفر نشود می‌توان (۳) را بر y_1 تقسیم کرد و درنتیجه

$$v''+\left(p+2\frac{y_1'}{y_1}\right)v'=0 \qquad (4)$$

معادلهٔ (۴) یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به v' است و می‌توان آن را فوراً حل کرد (بند ۱.۲). جواب آن عبارت است از

$$v'(x)=c\exp\left[-\int^x\left(p(s)+\frac{2y_1'(s)}{y_1(s)}\right)ds\right]=cu(x) \qquad (5)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است، و

$$u(x)=\frac{1}{[y_1(x)]^2}\exp\left[-\int^x p(s)\,ds\right] \qquad (6)$$

درنتیجه

$$v(x)=c\int^x u(t)\,dt+k \qquad (7)$$

که در آن k نیزیك ثابت دلخواه است. اما می‌توان ثابت k را حذف‌کرد، زیرا باتوجه به

---

۱. ژان دالامبر (Jean D' Alembert)، (۱۷۱۷ـ۱۷۸۳) ریاضیدان فرانسوی که تحقیقاتش درمکانیك و مکانیك سیالات موجب شهرت وی‌گردیده است.

$$\begin{aligned} y &= y_1(x)v(x) \\ &= c y_1(x) \int^x u(t)\, dt + k y_1(x) \end{aligned} \tag{۸}$$

دیده می‌شود که وجود k فقط یك مضرب $y_1(x)$ را به‌جواب دوم اضافه می‌کند. بدین‌سان دوجواب معادلهٔ (۱) عبارتند از

$$y = y_1(x)\,, \quad y = y_1(x) \int^x u(t)\, dt \tag{۹}$$

چون تابع اولیهٔ u نمی‌تواند مقدارثابتی باشد، جوابها دارای استقلال خطی‌اند. درروش کاهش مرتبه حفظ‌کردن فرمولهای (۹) و (۶) اهمیتی ندارد، آنچه باید به خاطر سپرد این است که اگریك جواب y_1 معلوم باشد جواب دیگری به‌صورت $y = v(x)y_1(x)$ به‌روش بالا به‌دست می‌آید.

با وجود آن کــه روش کاهش مرتبه، طرز تعیین جواب اول معادلهٔ (۱) را مشخص نمی‌کند، اما ازاین جهت‌که مسئلهٔ حل معادلهٔ (۱) را به‌یافتن تنها یك جواب کاهش می‌دهد امیدبخش است.

جواب مستقل خطی دوم راکه در (۹) آمده است می‌توان بااستفاده ازفرمول آبل در مورد رونسکین دوجواب مستقل خطی معادلهٔ (۱) نیز به‌دست‌آورد. این نکته درمسائل ۱۲ و ۱۳ بررسی می‌شود.

روش‌کاهش مرتبه درمورد معادلات غیرهمگن نیزمفید است، این مطلب در مسئلهٔ ۱۵ بند ۲.۶.۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال. نشان دهیدکه $y = x$ یك جواب معادلهٔ رتبهٔ یك لژاندر

$$(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + ۲y = ۰\,, \quad -۱ < x < ۱ \tag{۱۰}$$

است، و جواب مستقل خطی دوم را بیابید.

نخست اگر $y = x$، آنگاه $y' = ۱$ و $y'' = ۰$ و چون این مقادیر y، y' و y'' را درمعادلهٔ (۱۰) جایگزین‌کنیم خواهیم داشت

$$(۱ - x^۲) \cdot ۰ - ۲x + ۲x = ۰$$

بنابراین $y = x$ یك جواب است. برای تعیین جواب دوم قرارمی‌دهیم $y = xv(x)$، آنگاه

$$y' = xv' + v\,, \quad y'' = xv'' + ۲v'$$

با جایگزینی y، y' و y'' درمعادلهٔ (۱۰) داریم

$$(۱ - x^۲)(xv'' + ۲v') - ۲x(xv' + v) + ۲xv = ۰$$

پس ازساده‌کردن و تقسیم بر $x(۱ - x^۲)$ خواهیم داشت

$$v''+\left(\frac{۲}{x}-\frac{۲x}{۱-x^۲}\right)v'=۰ \qquad (۱۱)$$

توجه شود که ضریب v' در $x=۰$ یعنی صفر $y_۱(x)$ نامعین است. اما، این مطلب درجواب نهایی هیچ اشکالی به وجود نمی‌آورد. نخست جوابی برای معادلهٔ (۱۱) در فواصل $۰<x<۱$ و $-۱<x<۰$ به‌دست می‌آوریم.

معادلهٔ (۱۱) نسبت به v' یك معادلهٔخطی مرتبهٔ اول است، ودارای عامل انتگرال‌ساز $x^۲(۱-x^۲)$ می‌باشد، بنابراین

$$[x^۲(۱-x^۲)v']'=۰$$

$$x^۲(۱-x^۲)v'=c$$

ازآنجا

$$v(x)=c\int^x\frac{dt}{t^۲(۱-t^۲)}=c\int^x\left(\frac{۱}{t^۲}+\frac{۱}{۱-t^۲}\right)dt$$

$$=c\left(-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+x}{۱-x}\right)$$

درنتیجه، دومین جواب معادلهٔ (۱۰) (با حذف ضریب ثابت بدون‌آنکه از عمومیت کاسته شود) عبارت است از

$$y_۲(x)=xv(x)=۱-\frac{x}{۲}\ln\frac{۱+x}{۱-x} \qquad (۱۲)$$

گرچه تابع v در $x=۰$ نامعین است، اما حد $y_۲(x)=xv(x)$، هنگامی که $x\to ۰$، وجوددارد. تابع $y_۲$ که با رابطهٔ (۱۲) در $-۱<x<۱$ تعریف شده است نه‌فقط در $۰<x<۱$ و $-۱<x<۰$ صادق است بلکه درهمهٔ فاصلهٔ $-۱<x<۱$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰) صدق می‌کند. از طرف دیگر $y_۲(x)$ هنگامی که $x\to\pm ۱$ نامحدود می‌شود، خاصیت مزبور درارتباط بااین نکته است که ضریب y'' درمعادلهٔ (۱۰) به‌ازای $x=\pm ۱$ صفر می‌شود درحالی‌که ضرایب y' و y مخالف صفر باقی می‌مانند. این موضوع در فصل ۴ به‌تفصیل بررسی می‌شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۷ جواب دومی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به روش کاهش مرتبه بیابید.

۱. $y''-۴y'-۱۲y=۰\,,\quad y_۱(x)=e^{۶x}$

۲. $y''+۲y'+y=۰\,,\quad y_۱(x)=e^{-x}$

۳. $x^2y''+2xy'=0\,,\quad y_1(x)=1$

درچه دامنه‌ای از x می‌توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

۴. $x^2y''+2xy'-2y=0\,,\ y_1(x)=x$

درچه دامنه‌ای از x می‌توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

۵. $x^2y''+3xy'+y=0\,,\quad x>0\,;\quad y_1(x)=x^{-1}$

۶. $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0\,,\quad x>0\,;\quad y_1(x)=x$

۷. $(1-x\operatorname{cotg}x)y''-xy'+y=0\,,\quad y_1(x)=x$

راهنمایی: فاصلهٔ $0<x<\pi$ را درنظر بگیرید.

$$\int\frac{x\,dx}{1-x\operatorname{cotg}x}=\ln|x\cos x-\sin x|$$

۸. تحقیق‌کنید که $y_1(x)=x^{-1/2}\sin x$ یك جواب معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0\,,\quad 0<x<\infty$$

است، و جواب دوم را بیابید.

۹. معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy''-(x+N)y'+Ny=0$$

که درآن N عددصحیح غیرمنفی است به‌وسیلهٔ پژوهشگران متعددی موردبحث قرارگرفته است.[1] یکی از علل توجه به‌آن این است که دارای یك جواب نمایی و یك جواب چند جمله‌ای است.

(الف) تحقیق‌کنید که یك جواب آن $y_1(x)=e^x$ است.

(ب) نشان دهید کـه جواب دوم به‌صورت $y_2(x)=e^x\int x^Ne^{-x}\,dx$ می‌باشد. $y_2(x)$ را به‌ازای $N=1$ و $N=2$ محاسبه‌کنید و نتیجه بگیرید که

$$y_2(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ \dots\ +\frac{x^N}{N!}$$

نکته جالب آن که $y_2(x)$ دقیقاً نخستین $N+1$ جملهٔ سری تیلر e^x است.

*۱۰. تحقیق‌کنید که $y_1(x)=3x^2-1$ یك جواب معادلهٔ رتبهٔ دوم معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$$

---

۱. ت.آ. نیوتن (T.A. Newton)، «دربارهٔ استفاده از یك معادله دیفرانسیل در ایجاد چنـد جمله‌ایهـا»، American Mathematical Monthly, 81, 1974، صفحـات ۵۹۲ــ۶۰۱. مأخذ دیگری نیز درآن آمده است.

است،وجواب‌دوم‌را بیابید. فواصل $-1 < x < -1/\sqrt{3}$، $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ و $1/\sqrt{3} < x < 1$ را جداگانه در نظر بگیرید، اما توجه شود که جواب نمایی y_2 روی $-1 < x < 1$ معتبر است.

راهنمایی: با استفاده از روش کسرهای ساده می‌توان نشان دادکه

$$\frac{1}{(3x^2-1)^2(1-x^2)} = A\left[\frac{1}{(\sqrt{3}x-1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}x+1)^2}\right] + B\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]$$

ثابتهای A و B را تعیین کنید.

۱۱. جریان دو بعدی یکنواخت نهری را جول یك استوانهٔ مستدیر ثابت که محور آن برنهر عمود است درنظر می‌گیریم. دربررسی تلاطم جریان در اثر مجاورت استوانه به معادلهٔ دیفرانسیل

$$f''+\delta(\xi f'+f)=0$$

برمی‌خوریم. در اینجا متغیر بدون بعد ξ نمایشگر تغییرات در امتدادی است که برمحور استوانه و نهرهر دو عمود می‌باشد، $f(\xi)$ اندازهٔ کاهش سرعت نهر در اثر مجاورت، پریم نمایشگر مشتق‌گیری نسبت به ξ، و δ پارامتری فیزیکی است که با عکس انتشار تلاطم متناسب است. نشان دهیدکه $f_1(\xi)=e^{-\delta\xi^2/2}$ یك جواب است و جواب عمومی را به صورت انتگرال بیابید.

۱۲. فرض می‌کنیم که y_1 یك جواب معادلهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد که هیچگاه صفر نشود و می‌خواهیم جواب مستقل خطی دوم y_2 را بیابیم. نشان دهیدکه $(y_2/y_1)'=W(y_1, y_2)/y_1^2$ و آنگاه y_2 را با استفاده از فرمول آبل مربوط به $W(y_1, y_2)$ بیابید.

۱۳. تحقیق کنیدکه $y_1(x)=x$ یك جواب معادلهٔ

$$x^2y''+2xy'-2y=0 , \quad x>0$$

است، و آنگاه با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲، جواب مستقل خطی دوم را تعیین کنید.

۵.۳ معادلات همگن با ضرایب ثابت

در اینجا نظریهٔ عمومی معادلات خطی همگن مرتبهٔ دوم را کنار گذاشته و به شرح روشهای حل واقعی این‌گونه معادلات می‌پردازیم. در این بند مسئلهٔ تعیین جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌همگن مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت را بررسی می‌کنیم.[1] این مسئله با

---

۱. دانیل برنولی (۱۷۰۰—۱۷۸۲) و اویلر (۱۷۰۷—۱۷۸۳) هر دو طرز حل این نوع معادلات را قبل‌از ۱۷۴۰ می‌دانستند. نخستین گزارش دراین‌مورد را اویلردر۱۷۴۳ منتشر کرد.

ضرایب متغیر دشوارتر است و بررسی آن در فصل۴ انجام خواهد گرفت.[۱]

معادلهٔ

$$L[y]=ay''+by'+cy$$

$$=(aD^{۲}+bD+c)y=۰ \qquad (۱)$$

راکه در آن $a\neq ۰$ ، b و c اعـداد حقیقی‌اند در نظـر می‌گیریم. چون a ، b و c ثابت می‌باشند مستقیماً از قضیهٔ وجود ویکتایی ۲.۳ نتیجه می‌شود که جوابهای معادلهٔ (۱) روی $-\infty < x < \infty$ معتبرند.

معادلهٔ (۱) این مسئله را مطرح می‌کند که کدام تابع $y=\phi(x)$ است کـه a برابر مشتق دوم آن به اضافهٔ b برابر مشتق اول آن به اضافهٔ c برابر خود تابع بـه ازای همهٔ مقادیر x صفر می‌شود؟ با دقت در این مطلب سررشتهٔ یك روش برای حل معادلهٔ مزبور به دست می‌آید. چون ضرایب ثابت‌اند طبیعی است توابـع $y=\phi(x)$ را طوری در نظر بگیریم که y ، y' ، y'' فقط در ضرایب ثابت با هم اختلاف داشته باشند.

تابعی را می‌شناسیم کـه بـه طور وسیعی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مطالعه شده است و دقیقاً همین خاصیت را دارد یعنی همان تابع نمایی e^{rx}.بنابراین سعی می‌کنیم برای معادلهٔ (۱) جوابهایی به صورت e^{rx} با مقادیر مناسب r بیابیم. با جایگزینی $y=e^{rx}$ در معادلهٔ (۱) خواهیم داشت

$$L[e^{rx}]=a(e^{rx})''+b(e^{rx})'+ce^{rx}=۰ \qquad (۲)$$

یا

$$e^{rx}(ar^{۲}+br+c)=۰ \qquad (۳)$$

چون e^{rx} صفر نیست، باید داشته باشیم

$$ar^{۲}+br+c=۰ \qquad (۴)$$

اگر r یك ریشهٔ این معادلهٔ درجهٔ دوم، کـه اغلب آن را معادلهٔ مشخصه یا معین می‌نامند، باشد، آنگاه e^{rx} یك جواب معادلهٔ (۱) خواهد بود. توجه شود که ضرایب معادلهٔ مشخصهٔ (۴) همان ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل (۱) هستند. $r_۱$ و $r_۲$ ریشه‌های معادلهٔ (۴) عبارتند از

$$r_۱=\frac{-b+(b^{۲}-۴ac)^{۱/۲}}{۲a}, \quad r_۲=\frac{-b-(b^{۲}-۴ac)^{۱/۲}}{۲a} \qquad (۵)$$

روشن‌است که نوع جوابهای معادلهٔ (۱) به مقادیر $r_۱$ و $r_۲$ بستگی دارد، این‌مقادیر به‌نوبهٔ خود به ضرایب ثابت معادلهٔ دیفرانسیل بـه وسیلهٔ روابط (۵) بستگی دارند. دراینجا نیز

---

۱. در بعضی از حالتها می‌توان با تعویض متغیر مناسب، معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب متغیررا به یك معادلهٔ با ضرایب ثابت تبدیل کرد (مسائل ۱۶، ۱۷ و ۱۸ بند ۱.۵.۳ را ببینید).

به‌همان گونه که درجبر مقدماتی عمل می‌شود باید حالتهایی راکه در آن b^2-4ac مثبت، صفر و یا منفی است جداگانه بررسی کنیم.

دوحالت نخست را در این بند مطالعه می‌کنیم، بررسی حالت $b^2-4ac<0$ را به بند بعد موکول می‌نماییم.

ریشه‌های حقیقی ومتمایز. هنگامی‌که $b^2-4ac>0$، روابط (۵) دو مقدار حقیقی ومتمایز برای r_1 و r_2 به دست می‌دهند. بنابراین e^{r_1x} و e^{r_2x} جوابهای معادلهٔ (۱) می‌باشند. علاوه براین به آسانی تحقیق می‌شود که $W(e^{r_1x}, e^{r_2x})$ هیچگاه صفر نیست (مسئلهٔ ۱۵ را ببینید). بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x} \tag{6}$$

مثال ۱. جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y''+5y'+6y=0$ راکه در شرایط اولیهٔ $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ صدق می‌کند بیابید.

با جایگزینی $y=e^{rx}$ خواهیم داشت

$$r^2+5r+6=0$$

یا

$$(r+3)(r+2)=0$$

بنابراین $r=-2\ ,\ -3$ و جواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

برای برقراری شرایط اولیه در $x=0$ باید داشته باشیم

$$c_1+c_2=0\ ,\quad -2c_1-3c_2=1$$

از حل این معادلات به دست می‌آید

$$c_1=1\ ,\quad c_2=-1$$

بنابراین جواب معادلهٔ دیفرانسیل مزبور که در شرایط داده شده صدق کند عبارت است از

$$y=e^{-2x}-e^{-3x}$$

ریشه‌های حقیقی وبرابر. هنگامی‌که $b^2-4ac=0$، از روابط (۵) نتیجه می‌شود که $r_1=r_2=-b/2a$، وفقط یك جواب $e^{-(b/2a)x}$ را داریم. اما، با استفاده از روش کاهش مرتبه (بند ۴.۳ را ببینید) می‌توان جواب دومی به‌دست آورد. قرارمی‌دهیم

$$y=v(x)e^{-(b/2a)x}$$

آنگاه

$$y'=v'(x)e^{-(b/2a)x}-\frac{b}{2a}v(x)e^{-(b/2a)x}$$

$$y''=\left[v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right]e^{-(b/2a)x}$$

با جایگزینی y، y' و y'' درمعادلهٔ (۱) وتقسیم برسازهٔ مشترك $e^{-(b/2a)x}$ معادلهٔ زیر برای v حاصل می‌شود:

$$a\left(v''-\frac{b}{a}v'+\frac{b^2}{4a^2}v\right)+b\left(v'-\frac{b}{2a}v\right)+cv=0$$

پس از ساده کردن داریم

$$av''-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)v=0$$

چون $b^2-4ac=0$ ، جملهٔ آخر حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$v''=0$$

بنابراین

$$v(x)=c_1x+c_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه‌اند. در نتیجه، جواب دوم معادلهٔ (۱) عبارت است از $(c_1x+c_2)e^{-(b/2a)x}$. به‌ویژه بـه ازای $c_2=0$ ، $c_1=1$ داریم $xe^{-(b/2a)x}$. از بحث مربوط به روش کاهش مرتبه می‌دانیم کـه $e^{-(b/2a)x}$ و $xe^{-(b/2a)x}$ جوابهـای مستقل خطی معادلهٔ (۱) می‌باشند. این نکتـه را می‌توان با محاسبهٔ رونسکین (مسئلهٔ ۱۶ را ببینید) نیز اثبات کرد. بدین‌سان در حالت $b^2-4ac=0$ جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_1x},\quad r_1=-b/2a \tag{7}$$

مثال ۲. جواب عمومی معادلهٔ

$$y''+4y'+4y=0$$

را بیابید.

با جایگزینی $y=e^{rx}$ خواهیم داشت

$$r^2+4r+4=0$$

یا

$$(r+2)(r+2)=0$$

بنابراین $r=-2$ یك ریشهٔ مکرر معادلهٔ مشخصه است. یك جواب e^{-2x} است، و جواب مستقل خطی دیگر، بنابه‌بحث فـوق xe^{-2x} خواهد بود. بدین‌سان جواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

روش جالب دیگری برای تعیین جواب دوم هنگامی که ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ برابر باشند وجود دارد. چون r_1 ریشهٔ مکرر $ar^2+br+c=0$ است، درنتیجه $ar^2+br+c=a(r-r_1)^2$. بنابراین، به‌ازای هر r داریم

$$L[e^{rx}]=a(e^{rx})''+b(e^{rx})'+ce^{rx}=ae^{rx}(r-r_1)^2 \qquad (8)$$

طرف دوم رابطهٔ (۸) به‌ازای $r=r_1$ صفرمی‌شود، یعنی e^{r_1x} همان طورکه قبلا می‌دانستیم یک جواب معادلهٔ (۱) است. چون از دوطرف رابطهٔ (۸) نسبت به r مشتق بگیریم وترتیب مشتق‌گیری نسبت به r و x را تعویض کنیم خواهیم داشت

$$L[xe^{rx}]=axe^{rx}(r-r_1)^2+2ae^{rx}(r-r_1) \qquad (9)$$

به‌ازای $r=r_1$ طرف دوم معادلهٔ (۹) صفر می‌شود و بنابراین $L[xe^{r_1x}]=0$، بدین‌سان xe^{r_1x} نیز یك جواب معادلهٔ (۱) است.

مسائل

در هریك ازمسائل ۱ تا ۱۳ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را بیابید. اگرشرایط اولیه داده شده باشند جوابی راکه در آن شرایط صدق می‌کند تعیین‌کنید.

۱. $y''+2y'-3y=0$

۲. $4y''+4y'+y=0$

۳. $6y''-y'-y=0$

۴. $2y''-3y'+y=0$

۵. $y''-y=0$

۶. $y''-2y'+y=0$

۷. $y''+5y'=0$

۸. $y''-9y'+9y=0$

۹. $y''-2y'-2y=0$

۱۰. $y''+2y'+y=0$

۱۱. $y''+y'-2y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1$

۱۲. $y''-6y'+9y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2$

۱۳. $y''+8y'-9y=0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=0$

۱۴. نشان دهیدکه جواب عمومی $y''-4y=0$ عبارت است از

$$y=c_1\sinh 2x+c_2\cosh 2x$$

۱۵. نشان‌دهیدکه اگر $r_1\neq r_2$، آنگاه توابع e^{r_1x} و e^{r_2x} روی $-\infty<x<\infty$ دارای استقلال خطی‌اند. این نکته اثبات نتیجه‌ای راکه دررابطهٔ (۶) متن بیان شدتکمیل می‌کند.

۱۶. نشان دهیدکه به‌ازای‌هرمقدار r داریم $W(e^{rx}, xe^{rx})\neq 0$. از اینجا نتیجه

بگیرید که اگر e^{r_1x} و xe^{r_1x} جوابهای $ay''+by'+cy=0$ باشند، آنگاه این جوابها یك مجموعهٔ اساسی جواب تشکیل می‌دهند.

۱۷. در این مسئله روش دیگری برای تشکیل جواب دوم معادلهٔ $ay''+by'+cy=0$، هنگامی که r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ $ar^2+br+c=0$ برابر باشند، بیان می‌کنیم. نخست فرض کنیم که $r_2\neq r_1$، و e^{r_1x} و e^{r_2x} جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل مزبور باشند. تحقیق کنید که $\phi(x;r_1,r_2)=(e^{r_2x}-e^{r_1x})/(r_2-r_1)$ نیز به‌ازای $r_2\neq r_1$ یك جواب است. اکنون r_1 را ثابت گرفته و حد $\phi(x;r_1,r_2)$ را هنگامی که $r_2\to r_1$ با استفاده از دستور هوپیتال بیابید.

۳. ۵. ۱ ریشه‌های مختلط

برای تکمیل بحث معادلهٔ

$$ay''+by'+cy=0 \tag{1}$$

حالتی را درنظرمی‌گیریم که ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ

$$ar^2+br+c=0 \tag{2}$$

اعداد مختلطی به صورت $\lambda+i\mu$ باشند، که در آن λ و μ حقیقی‌اند. دراینجا این سؤال مطرح می‌شود که معنای عبارتی به‌صورت $e^{(\lambda+i\mu)x}$ چیست؟

نخست یادآوری می‌کنیم که بنابر آنچه درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی دیده‌ایم e^x حول $x=0$ دارای سری تیلر[1] زیر است

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<\infty \tag{3}$$

اگردر رابطهٔ (۳) به‌جای x قرار دهیم ix و نتیجه را به‌عنوان تعریف e^{ix} انتخاب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}e^{ix}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\end{aligned} \tag{4}$$

که در آن از روابط $i^2=-1$، $i^3=-i$، $i^4=1$ وغیره استفاده شده است. سری اول در رابطهٔ(۴) دقیقاً همان سری تیلر $\cos x$، وسری دوم همان سری تیلر $\sin x$ است. از این‌رو بنابر تعریف قرارمی‌دهیم

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{5}$$

1. Taylor (1685 - 1731)

این رابطه به‌فرمول اویلر موسوم است. با جایگزینی $-x$ به‌جای x در رابطهٔ (۵) و توجه به روابط $\cos(-x) = \cos x$ ، $\sin(-x) = -\sin x$ خواهیم داشت

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad (۶)$$

توابع $\cos x$ و $\sin x$ را می‌توان به‌ترتیب با جمع و تفریق روابط (۵) و (۶) برحسب e^{ix} و e^{-ix} بیان کرد.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i}$$

اکنون بنابر تعریف قرارمی‌دهیم

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \sin \mu x) \qquad (۷)$$

با این تعریف می‌توان نشان داد که قوانین معمولی جبر برقرارند. به‌عنوان مثال

$$\frac{e^{(\lambda+i\mu)x}}{e^{(\alpha+i\beta)x}} = e^{(\lambda+i\mu)x-(\alpha+i\beta)x} = e^{(\lambda-\alpha)x+i(\mu-\beta)x}$$

و

$$[e^{(\lambda+i\mu)x}]^n = e^{n(\lambda+i\mu)x} = e^{n\lambda x + in\mu x}$$

که درآن n می‌تواند هرعدد صحیح مثبت یا منفی باشد. در واقع این نتیجه به‌ازای مقادیر غیرصحیح n نیز برقرار است.

بالاخره، باید مسئلهٔ مشتق‌گیری از $e^{(\lambda+i\mu)x}$ نسبت به x را بررسی کنیم. گرچه به ازای r حقیقی داریم

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \qquad (۸)$$

اما معلوم نیست که به‌ازای r مختلط این رابطه درست باشد. به هرحال به‌آسانی بامحاسبهٔ مستقیم واستفاده ازتعریف داده شده در رابطهٔ (۷) می‌توان نشان داد که رابطهٔ (۸) به ازای r مختلط نیز برقرار است. در واقع، قوانین معمول حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی درمورد نمای مختلط هنگامی‌که e^{rx} به‌ازای r مختلط با رابطهٔ (۷) تعریف شده باشد برقرارند. به‌طور عامتر درمورد هرتابع بامقدار مختلط $f(x) = u(x) + iv(x)$ که درآن u و v توابعی بامقدارحقیقی‌اند، و به‌ازای هرعدد مختلط c داریم

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x), \qquad [cf(x)]' = cf'(x)$$

اکنون می‌توان به مسئلهٔ حل معادلهٔ (۱) هنگامی‌که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه مختلط باشند پرداخت. چون a ، b و c حقیقی‌اند، ریشه‌ها به‌صورت زوج مزدوج $r_1 = \lambda + i\mu$ و $r_2 = \lambda - i\mu$ خواهند بود، بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=c_1e^{(\lambda+i\mu)x}+c_2e^{(\lambda-i\mu)x} \tag{۹}$$

جواب عمومی (۹) دارای این نقص است کـه $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ توابعی بـا مقدار مختلط اند. چون معادلهٔ دیفرانسیل حقیقی است می‌خواهیم درصورت امکان جواب عمومی معادلهٔ (۱) به‌صورت ترکیب خطی جوابهایی با مقدارحقیقی باشد. برای این‌کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. چون $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ جوابهای معادلهٔ (۱) می‌باشند، مجموع و تفاضل آنها نیز جواب است، بدین‌سان

$$\begin{aligned}e^{(\lambda+i\mu)x}+e^{(\lambda-i\mu)x}&=e^{\lambda x}(\cos\mu x+i\sin\mu x)+e^{\lambda x}(\cos\mu x-i\sin\mu x)\\&=2e^{\lambda x}\cos\mu x\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}e^{(\lambda+i\mu)x}-e^{(\lambda-i\mu)x}&=e^{\lambda x}(\cos\mu x+i\sin\mu x)-e^{\lambda x}(\cos\mu x-i\sin\mu x)\\&=2ie^{\lambda x}\sin\mu x\end{aligned}$$

جوابهای معادلهٔ (۱) می‌باشند. بنابراین، با صرف‌نظرکردن ازضرایب‌ثابت ۲ و $2i$، توابع

$$e^{\lambda x}\cos\mu x\,,\quad e^{\lambda x}\sin\mu x \tag{۱۰}$$

جوابهای معادلهٔ (۱) وبا مقدار حقیقی‌اند. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$W(e^{\lambda x}\cos\mu x\,,\ e^{\lambda x}\sin\mu x)=\mu e^{2\lambda x}$$

وچون این هیچگاه صفر نمی‌شود دوتابع مزبور یك مجموعهٔ اساسی ازجوابهای با مقدار حقیقی را تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان جواب عمومی معادلهٔ (۱) را به صورت زیر بیان‌کرد

$$y=c_1e^{\lambda x}\cos\mu x+c_2e^{\lambda x}\sin\mu x$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت دلخواه‌اند.

مثال. جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید

$$y''+y'+y=0 \tag{۱۱}$$

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$r^2+r+1=0$$

و ریشه‌های آن عبارتند از

$$r=\frac{-1\pm(1-4)^{1/2}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱۱) چنین است

$$y=e^{-x/۲}\left(c_۱\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x+c_۲\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\right)$$

بار دیگر توابع $e^{\lambda x}\cos\mu x$ و $e^{\lambda x}\sin\mu x$ جوابهای با مقدارحقیقی معادلهٔ (۱) را درنظر می‌گیریم. این توابع به‌ترتیب بخشهای حقیقی وموهومی جواب با مقدار مختلط $e^{(\lambda+i\mu)x}$ می‌باشند. این ویــژگی حالت خاصی ازیك نتیجه‌کلی است، که ازحقیقی بودن ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل مزبور خواه ثابت ویا تابع با مقدارحقیقی باشند به‌دست می‌آید. این نتیجه را به عنوان یك قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۳. فرض‌کنیم توابع بـا مقدار حقیقی p و q روی فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ پیوسته باشند، و $y=\phi(x)=u(x)+iv(x)$ یك جواب با مقدارمختلط معادلهٔ دیفرانسیل

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=۰ \tag{۱۲}$$

باشد که درآن توابع u و v بـا مقدار حقیقی‌اند. دراین صورت u و v نیز جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲) می‌باشند.

برای اثبات این قضیه، کافی است توجه شود که

$$\begin{aligned}L[u+iv]&=(u+iv)''+p(u+iv)'+q(u+iv)\\&=(u''+pu'+qu)+i(v''+pv'+qv)\\&=L[u]+iL[v]=۰\end{aligned}$$

اما یك عدد مختلط وقتی وفقط وقتی صفر است، که هر دو بخش حقیقی وموهومی آن صفر باشند، بدین‌سان $L[u]=۰$ و $L[v]=۰$.

اگر ثابتهای a، b و c درمعادلهٔ (۱) عدد مختلط باشند، بازهم می‌توان جوابهایی به صورت e^{rx} به‌دست آورد، r باید درمعادلهٔ زیر صدق کند

$$ar^۲+br+c=۰$$

اما، دراین حالت عموماً ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ اعـداد مختلط‌اند، ولی مزدوج نیستند، و جوابهای متناظر به معادلهٔ (۱) با مقدار مختلط خواهند بود. این مطلب درمسائل ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به اختصار بحث شده است.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تـا ۸ جواب عمومی معادلـهٔ دیفرانسیل داده شده را تعیین‌کنید. در صورتی‌که شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی راکه درآن شرایط صدق می‌کند بیابید.

۱. $y''-2y'+2y=0$ ۲. $y''-2y'+6y=0$

۳. $y''+2y'-8y=0$ ۴. $y''+2y'+2y=0$

۵. $9y''-6y'+y=0$ ۶. $y''+6y'+13y=0$

۷. $y''+4y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

۸. $y''+4y'+5y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

۹. تحقیق کنید که $W(e^{\lambda x}\cos\mu x, e^{\lambda x}\sin\mu x)=\mu e^{2\lambda x}$.

۱۰. دراین مسئله پریم، مشتق‌گیری نسبت به زمان t را نشان می‌دهد.

(الف) نشان دهیدکه اگر a، b و c ثابتهای مثبتی باشند، آنگاه همهٔ جوابهای معادلهٔ $ay''+by'+cy=0$ هنگامی‌که $t\to\infty$ به صفر می‌گرایند. آیا اگر $b=0$ یا $c=0$، این نتیجه برقرار خواهد بود؟

(ب) نشان دهیدکه به ازای هرمقدار ثابت k تابع $y=\sin t$ یك جواب معادلهٔ زیر است

$$y''+(k\sin^2 t)y'+(1-k\cos t\sin t)y=0$$

همچنین نشان دهیدکه اگر $0<k<2$، آنگاه $(1-k\cos t\sin t)>0$ و $(k\sin^2 t)\geqslant 0$. بدین‌سان مشاهده می‌شودکه گرچه ضرایب‌این معادلهٔ دیفرانسیل باضرایب متغیر،غیرمنفی‌اند (وضریب y' فقط درنقاط $t=0, \pi, 2\pi, \ldots$ صفر است)دارای‌جوابی است‌که به ازای $t\to\infty$ به صفر نمی‌گراید. بدین‌سان وضعیتی راکه درنظریهٔ معادلات دیفرانسیل چندان غیرعادی نیست ملاحظه می‌کنیم: امکان دارد معادلاتی‌که ظاهراً بسیار بههم شبیه‌اند، دارای خواص کاملاً متفاوتی باشند.

۱۱. نشان دهیدکه جواب عمومی معادلهٔ

$$y''+y=0$$

را می‌توان به صورت $y=A_1\cos(x+\delta_1)$ ویا $y=A_2\sin(x+\delta_2)$ که درآنها A_1، δ_1، A_2 و δ_2 مقادیر ثابت‌اند بیان کرد.

۱۲. نشان دهیدکه به ازای هرعدد حقیقی r داریم

$$(\cos x+i\sin x)^r=\cos rx+i\sin rx$$

این اتحاد را هنگامی‌که r یك عدد صحیح مثبت باشد، فرمول دموآور[1] می‌نامند. با استفاده از این نتیجه فرمولهای کمان مضاعف، $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$، را به دست آورید.

۱۳*. نشان دهیدکه هرعدد مختلط $a+ib$ را می‌توان به‌صورت $Ae^{i\theta}$، که درآن

1. De Moivre (1667-1754)

A و θ اعداد حقیقی مثبت‌اند و $2\pi > \theta \geqslant 0$، نوشت.

راهنمایی: با استفاده از فرمول اویلر، $Ae^{i\theta}$ را بسط دهید و A و θ را برحسب a و b بیابید.

۱۴°. دو ریشهٔ دوم عددمختلط $Ae^{i\theta}$ را با $\pm A^{1/2}e^{i\theta/2}$ تعریف می‌کنیم، ریشه‌های دوم $1+i$، $1-i$ و i را حساب کنید.

۱۵°. معادلات زیر را حل کنید

(الف) $y''+iy'+2y=0$ (ب) $y''+2y'+iy=0$

ملاحظه شود که ریشه‌هـای معادلات مشخصهٔ اعداد مختلط مزدوج نیستند. آیا بخش حقیقی یا موهومی هیچ یك ازجوابها درمعادلهٔ دیفرانسیل مزبور صدق می‌کند؟

۱۶°. اکنون که طرز حل‌معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم باضرایب‌ثابت را فراگرفتیم به‌بررسی شرایطی که تحت آن می‌توان معادلهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را با تعویض متغیر مناسبی به معادله‌ای بـا ضرایب ثابت تبدیل کـرد می‌پردازیم. تعویض متغیر مستقل $z=u(x)$ را، کـه درآن موقتاً ارتباط بین z و x تصریح نشده است، درنظر می‌گیریم. نشان دهید که

(الف)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dy}{dz}$$

(ب) معادلهٔ دیفرانسیل مزبور به صورت زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+p(x)\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz}+q(x)y=0$$

(ج) معادلهٔ قسمت (ب) با انتخاب

$$z=u(x)=\int^x [q(t)]^{1/2}\,dt$$

دارای ضرایب ثابت خواهد بود به شرط آنکه

$$\frac{z''+p(x)z'}{q(x)}=\frac{q'(x)+2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}}$$

مقداری ثابت باشد. باید توجه داشت کـه هنگامی تبدیل $z=u(x)$ با مقدار حقیقی است که $q(x)\geqslant 0$. این بدان‌معنی است که درمعادلهٔ دیفرانسیل اصلی $q(x)$ تغییرعلامت ندهد، اگر $q(x)<0$ باشد، معادلهٔ دیفرانسیل را در -1 ضرب می‌کنیم.

از اینجـا نتیجه بگیریـد کـه شرط لازم و کافـی بـرای امـکان تبـدیل معادلـهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ به یك معادلهٔ با ضرایب ثابت به وسیلهٔ تعویض متغیرمستقل

آن است که تابع $(q'+2pq)/q^{3/2}$ برابر مقداری ثابت باشد.

۱۷°. با استفاده ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۶، کدام‌یك ازمعادلات زیر را می‌توان با تعویض متغیر مستقل به‌یك معادلهٔ با ضرایب ثابت تبدیل کرد

(الف) $y''+xy'+e^{-x^2}y=0, \quad -\infty<x<\infty$

(ب) $y''+3xy'+x^2y=0, \quad -\infty<x<\infty$

(ج) $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0, \quad 0<x<\infty$

۱۸°. با استفاده ازمسئلهٔ ۱۶، نشان دهید که همواره می‌توان معادلهٔ

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0, \quad x>0$$

راکه درآن α و β ثابتهای حقیقی‌اند، با قرار دادن $z=\ln x$ بـه یك معادلهٔ با ضرایب ثابت تبدیل کرد. این گونه معادلـه را معادلهٔ اویلر می‌نامند، ودربند ۴.۴ مورد بحث قرار خواهدگرفت. جواب عمومی

$$x^2y''+xy'+y=0, \quad x>0$$

را بیابید.

۱۹. بـا تعویضهـای مناسب متغیرهـا می‌توان معـادلـهٔ خطی همگن مـرتبهٔ دوم $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را به یك معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل کرد.

(الف) قرار دهید $y'/y=-u$ و y را برحسب u تعیین کنید. آنگاه نشان‌دهید که u درمعادلهٔ

$$\frac{du}{dx}=q(x)-p(x)u+u^2$$

صدق می‌کند. این معادلـه به معادلهٔ ریکاتی موسوم است، و درمسئلهٔ ۳۵ بند ۸.۲ بررسی شده‌است. توجه شود که این تقلیل مرتبه به‌بهای از دست دادن همگنی معادله تمام شده‌است.

(ب) اکنون معادلهٔ کلی ریکاتی

$$\frac{dw}{dx}=q_0(x)+q_1(x)w+q_2(x)w^2$$

را درنظر می‌گیریم. نشان دهید که بـا تبدیل $w=-y'/yq_2$، بـه معادلهٔ خطی همگن مرتبهٔ دوم زیر می‌رسیم

$$q_2(x)y''-[q_2'(x)+q_1(x)q_2(x)]y'+q_2^2(x)q_0(x)y=0$$

۶.۳ معادلهٔ ناهمگن

دربندهای پیشین این فصل نظریهٔ عمومی معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ دوم مورد بحث قرارگرفت، و درحالت ضرایب ثابت طـرز ساختن جوابها را نشان دادیم. اکنون

توجه خود را به حل معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad (۱)$$

معطوف می‌داریم. درطول بحث فرض براین است که توابع p، q و g روی فاصلهٔ موردنظر پیوسته‌اند.

درمهندسی نوین مسئلهٔ حل معادلهٔ (۱) را اغلب به‌عنوان یك مسئلهٔ ورودی-خروجی مطرح می کنند. موقتاً فرض کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل (۱) نمایشگر یك دستگاه مکانیکی یا الکتریکی باشد، طبیعی است که می‌توان جواب $y=\phi(x)$ را به عنوان خروجی دستگاه درنظر گرفت. ضرایب p و q بــه وسیلهٔ مکانیسم فیزیکی مزبور معین می گردنــد وجملهٔ ناهمگن g همان تابع ورودی است. مسئلهٔ حل معادلهٔ (۱) متناظر است با تعیین خروجی دستگاه به ازای توابع ورودی مختلف.

پیش ازآنکه بــه حالتهای خاص معادلهٔ (۱) بپردازیم، چند قضیهٔ کلی ساده وبسیار مفید اثبات می کنیم که موجب تسهیل بحث آتی خواهدگردید.

قضیهٔ ۱۰.۳. تفاضل هردوجواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱)،

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر زیر است

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۲)$$

برای‌اثبات این‌قضیه فرض‌کنیم که توابع u_1 و u_2 جوابهای‌معادلهٔ (۱) باشند. آنگاه

$$L[u_1]=g$$

و

$$L[u_2]=g$$

باکم‌کردن معادلهٔ دوم ازمعادلهٔ اول به دست می‌آید

$$L[u_1]-L[u_2]=0$$

وچون L یك عملگرخطی است،

$$L[u_1-u_2]=0$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است. باکمك این قضیه می‌توان قضیهٔ مهم زیر را اثبات‌کرد.

قضیهٔ ۱۱.۳. اگر y_p یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن (۱)

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

باشد، آنگاه می‌توان هرجواب $y=\phi(x)$ این معادله را به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(x)=y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (۳)$$

که درآن y_1 و y_2 دوجواب مستقل خطی معادلهٔ همگن متناظر می‌باشند.

برای اثبات این قضیه، ملاحظه می‌کنیم که بنابرقضیهٔ ۱۰.۳، $\phi - y_p$ یك جواب معادلهٔ همگن مزبوراست. بدین‌سان بنابرقضیهٔ ۴.۳ بند ۲.۳، می‌توان $\phi - y_p$ را به‌صورت یك ترکیب خطی از y_1 و y_2 بیان کرد، وقضیه ثابت می‌شود.

برحسب معمول ترکیب خطی (۳) را جواب عمومی معادلهٔ (۱) می‌نامند.

درنتیجه، برای تعیین جواب عمومی معادلهٔ (۱) باید جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) را به دست آورد وسپس یك جواب دلخواه معادلهٔ ناهمگن را بدان افزود. همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود (بند ۱.۳ را ببینید) جواب عمومی معادلهٔ (۱) شامل دوثابت دلخواه است، و ازاین‌رو برای مشخص کردن یك جواب یکتای معادلهٔ (۱) لازم است دوشرط اضافی تصریح شود، یعنی شرایط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$.

جواب عمومی معادلهٔ همگن (۲) را اغلب جواب مکمل نامیده وبا y_c نشان می‌دهند. بدین‌سان $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. y_p، جواب معادلهٔ ناهمگن، را معمولاً جواب خصوصی[1] می‌نامند. توجه شودکه p_p یکتا نیست، زیرا اگر Y یك جواب معادلهٔ ناهمگن باشد، آنگاه اگر به Y هرترکیب خطی از y_1 و y_2 را بیفزاییم عبارت حاصل همچنان یك جواب معادلهٔ ناهمگن خواهد بود. ازقضیهٔ ۱۱.۳ نتیجه می‌شودکه جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن (۱) چنین است

$$y = y_c(x) + y_p(x) \qquad (۴)$$

دربسیاری‌ازمسائل ممکن‌است جملهٔ‌ناهمگن g خیلی‌پیچیده باشد،اما اگر بتوان آن‌را به صورت مجموع تعداد متناهی ازتوابع بیان‌کرد می‌توان با استفاده ازخطی‌بودن معادلهٔ دیفرانسیل چند مسئلهٔ ساده‌تر را جایگزین مسئلهٔ اصلی‌کرد. به عنوان مثال، فرض‌کنیم‌که بتوان $g(x)$ را به صورت $g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x)$ نوشت، آنگاه معادلهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x) \qquad (۵)$$

اگر بتوان y_{p_i}، جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$L[y] = g_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (۶)$$

را پیداکرد، آنگاه با جایگزینی مستقیم دیده می‌شودکه

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_m}(x) \qquad (۷)$$

یك جواب خصوصی معادلهٔ (۵) است. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۵) به‌صورت زیر خواهد بود

---

۱. این اصطلاح چندان مناسب نیست، زیرا هرجواب‌که درشرایط اولیهٔ مفروض صدق‌کند نیز جواب خصوصی نامیده می‌شود. اما معمولاً می‌توان مقصود را ازخود متن دریافت.

$$y=y_c(x)+y_{p_1}(x)+\cdots+y_{p_m}(x) \qquad (۸)$$

عموماً، تعیین جوابهای معادلات (۶) وجمع نتایج حاصل، ازحل معادلـهٔ (۵) به صورت اصلی آسانتر است. این روش راکه درآن جواب مسائل پیچیده با جمع جوابهای مسائل ساده‌تر ساخته می‌شود، روش انطباق می‌نامند.

مثال. جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید

$$y''+۴y=۱+x+\sin x \qquad (۹)$$

نخست معادلـهٔ همگن متناظر $y''+۴y=۰$ را درنظـر می گیریم. بـا جایگزینی $y=e^{rx}$ معادلـهٔ مشخصهٔ $r^۲+۴=۰$ حاصل می‌شود. بـدین‌سان جواب مکمل عبارت است از

$$y_c(x)=c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x$$

برای تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۹) جوابهای خصوصی معادلات $y''+۴y=۱$، $y''+۴y=x$ و $y''+۴y=\sin x$ را بـا هم جمع می کنیم. به‌آسانی می‌توان تحقیق کردکه جوابهای خصوصی این معادلات به‌ترتیب عبارتنداز $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۴}x$ و $\frac{۱}{۳}\sin x$. بدین‌سان جواب عمومی معادلهٔ (۹) عبارت است از

$$y=c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۳}\sin x$$

۱.۶.۳ روش ضرایب نامعین

برای به‌دست‌آوردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبهٔ دوم می‌توان از روشهای متعددی استفاده‌کرد. روش ضرایب نامعین، درصورتی‌کـه قابل کاربرد باشد، یکی ازساده‌ترین روشهـاست. اساس این روش عبارت است ازآنکه نخست شکل جواب خصوصی را حدس زده و سپس این تابع را کـه معمولاً شامل یك یا چند ضریب مجهول است درمعادلـهٔ دیفرانسیل جایگزین کنیم. هنگامی این روش موفقیت‌آمیز است‌کـه بتوان ضرایب مجهول را طوری تعیین‌کردکـه تابع مزبور واقعاً درمعادلهٔ دیفرانسیل صدق‌کند.

روشن است‌که این روش به مقیاس وسیعی بستگی به‌آن داردکه ازپیش شکل کلی جواب خصوصی را پیداکنیم. درمورد یك معادلهٔ دیفرانسیل کاملاً دلخواه، چیزی نمی‌توان پیش‌بینی‌کرد. اما، اگر معادله به‌صورت

$$a\frac{d^۲y}{dx^۲}+b\frac{dy}{dx}+cy=g(x) \qquad (۱)$$

باشدکه درآن a، b و c ثابتهای حقیقی‌اند و $g(x)$ جملهٔ ناهمگن، یك تابع نمایی ($e^{\alpha x}$)، یا یك چندجمله‌ای ($a_۰x^n+\ldots+a_n$)، یا واجدخاصیت سینوسی ($\sin\beta x$ یا $\cos\beta x$) باشد، می‌توان قواعد ویژه‌ای برای تعیین جواب خصوصی به‌روش ضرایب نامعین به‌دست

داد. این قواعد حالت کلیتری راکه درآن $g(x)$ به‌صورت حاصلضرب جمله‌هایی از نوع بالا مانند

$$g(x)=e^{\alpha x}(a_{0}x^{n}+a_{1}x^{n-1}+\cdots+a_{n})\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases} \qquad (۲)$$

باشد شامل می‌شود. توجه شودکه هرحاصلضرب توابع نمایی، چندجمله‌ای، سینوسی و کسینوسی هم‌ارز با مجموع جمله‌هایی ازنوع (۲) است. به ویژه، همواره می‌توان حاصلضرب دو یا چند تابع سینوسی را با استفاده ازاتحادهای مثلثاتی به مجموع توابع سینوسی تنها تبدیل کرد. حالتی راکه درآن $g(x)$ مجموع جمله‌هایی ازنوع (۲) است می‌توان با استفاده از روش انطباق‌که دربند قبل بیان شد بررسی کرد. روش ضرایب نامعین به‌ندرت می‌تواند درمواردی‌که جمله‌های ناهمگن، ازنوع (۲) پیچیده‌تر باشند یا معادلات با ضرایب متغیر باشند مفید واقع شود.

پیش ازآنکه روش کلی را مورد بحث قرار دهیم، آن را با ذکر چند مثال ساده توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. یك جواب خصوصی برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر بیابید

$$y''-۳y'-۴y=۲\sin x \qquad (۳)$$

می‌خواهیم تابع y_p را طوری تعیین‌کنیم که مجموع مشتق دوم آن منهای سه‌برابر مشتق اول منهای چهاربرابر خود تابع برابر $۲\sin x$ گردد. آزمون توابعی از قبیل $\ln x$ ، e^x یا $x^۲$ به عنوان $y_p(x)$ نمی‌تواند چندان مفید باشد، زیرا غیرممکن است از ترکیب این نوع توابع ومشتقهای آنها $\sin x$ را به دست آورد. توابعی‌که برای $y_p(x)$ مناسب به‌نظر می‌رسند عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$. بنابراین $y_p(x)$ را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$y_p(x)=A\cos x+B\sin x$$

که درآن A و B فعلاً ثابتهای مجهولی هستند. آنگاه

$$y_p'(x)=-A\sin x+B\cos x$$

$$y_p''(x)=-A\cos x-B\sin x$$

با جایگزینی y ، y' و y'' درمعادلهٔ (۳) وجمع‌بندی جمله‌ها داریم

$$(-A-۳B-۴A)\cos x+(-B+۳A-۴B)\sin x=۲\sin x$$

این معادله متحداً برقرار خواهد بود اگر وفقط اگر

$$-۵A-۳B=۰\ ,\ ۳A-۵B=۲$$

ازآنجا $A=\frac{۳}{۱۷}$، $B=-\frac{۵}{۱۷}$ ویك‌جواب خصوصی‌معادلهٔ (۳) به‌صورت زیرحاصل‌می‌شود

$$y_p(x)=\frac{۱}{۱۷}(۳\cos x-۵\sin x)$$

مثال۲. یك جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیررا بیابید

$$y''-۳y'-۴y=۴x^۲ \tag{۴}$$

طبعاً تابع $y_p(x)=Ax^۲$ راکه درآن باید ثابت A را تعیین کرد موردآزمون قرار می‌دهیم. دراین صورت $y_p'(x)=۲Ax$ ، $y_p''(x)=۲A$ ، وبا جایگزینی درمعادلهٔ (۴) خواهیم داشت

$$۲A-۶Ax-۴Ax^۲=۴x^۲$$

اگر این معادله بخواهد به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرارباشد باید ضرایب توانهای مشابه x درهردوطرف معادله برابر باشند. ازاینجا سه معادله حاصل می‌شود وهیچ مقدار A دراین سه معادله صادق نیست. بنابراین تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۴) بـه‌صورت $Ax^۲$ غیرممکن است.

اما، اگر جملهٔ ناهمگن $۴x^۲$ درمعادلهٔ(۴)رابه‌صورت چند جمله‌ای $۴x^۲+۰x+۰$ تصورکنیم، معقول خواهدبودکه برای $y_p(x)$ عبارت $Ax^۲+Bx+C$ را انتخاب کنیم وثابتهای A ، B و C را تعیین‌نماییم. ازجایگزینی y ، y' و y'' درمعادلهٔ (۴) وتساوی ضرایب توانهای متشابه x دردوطرف معادله، یك‌دستگاه سه معادلهٔ جبری ناهمگن خطـی بـرای سه مجهول A ، B و C حاصل می‌گـردد . جواب ایـن دستگاه عبارت است از $A=-۱$، $B=\frac{۳}{۲}$ و $C=-\frac{۱۳}{۸}$، بنابراین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۴)چنین است

$$y_p(x)=-x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۱۳}{۸}$$

ممکن است برای دانشجو این سؤال مطرح شودکه اگریك چند جمله‌ای از درجـهٔ بالاتر مانند $Ax^۴+Bx^۳+Cx^۲+Dx+E$ برای $y_p(x)$ انتخاب می‌کردیم، چه‌اتفاقی رخ می‌داد.پاسخ آن است‌که همهٔ‌ضرایب بالاتراز جملهٔ درجهٔ دوم صفر می‌شدند. بدین‌سان، به‌جز در موارد استثنایی‌که بعداً بیان خـواهد شد، لزومی ندارد درجهٔ چند جمله‌ای‌کـه برای $y_p(x)$ انتخاب می‌کنیم ازدرجهٔ چندجمله‌ای عبارت ناهمگن معادله بیشتر باشد.

مثال۳. یك‌جواب خصوصی برای معادلهٔ زیربیابید

$$y''-۳y'-۴y=e^{-x} \tag{۵}$$

به‌همان دلایلی‌که قبلاً به‌کار رفت، فرض‌می‌کنیم که $y_p(x)=Ae^{-x}$. باجایگزینـی درمعادلهٔ (۵) خواهیم داشت

$$(A+۳A-۴A)e^{-x}=e^{-x}$$

یا

$$0 \cdot Ae^{-x} = e^{-x}$$

که نمی‌توان از آن A را تعیین کرد. بنابراین جواب خصوصی به صورت Ae^{-x} نیست. اشکال این مطلب در آن است که e^{-x} یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر است. درنتیجه، عملیات طرف اول معادلهٔ (۵)، هنگامی که برمضرب ثابت دلخواهی از e^{-x} اجرا شوند حاصل صفرمی‌شود. بدین‌سان این سؤال کلی مطرح می‌شود که آیا روش ضرایب نامعین را درحالتی‌هم که جملهٔ ناهمگن خود جواب معادلهٔ همگن متناظر است می‌توان به کار برد؟ چنان که هم‌اکنون خواهیم دید پاسخ این سؤال مثبت است.

اکنون به بررسی حالتهای کلی که در آن $g(x)$ به یکی از صورتهای زیر است می‌پردازیم

$$g(x) = \begin{cases} P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \\ e^{\alpha x} P_n(x) \\ e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x \\ e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x. \end{cases}$$

$g(x) = P_n(x)$. دراین حالت معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$ay'' + by' + cy = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{۶}$$

برای به‌دست آوردن یك جواب خصوصی فرض می‌کنیم که

$$y_p(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n \tag{۷}$$

با جایگزین کردن درمعادلهٔ (۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & a[n(n-1)A_0 x^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}) \\ & + c(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0 x^n + \cdots + a_n \end{aligned} \tag{۸}$$

ازتساوی ضرایب توانهای متشابه x داریم

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0 \\ cA_1 + nbA_0 &= a_1 \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n \end{aligned}$$

اگر $c \neq 0$، آنگاه $A_0 = a_0/c$ جواب معادلهٔ اول است، و معادلات دیگر به ترتیب

A_1، A_2، . . .، A_n را به دست می‌دهند. اگر $c=0$ و $b\neq 0$ باشد، چندجمله‌ای طرف اول معادلهٔ (۸) ازدرجهٔ $n-1$ خواهد بود، ونمی‌تواند درمعادلهٔ (۸) صدق کند. برای آنکه حاصل $ay_p''(x)+by_p'(x)$ یك چند جمله‌ای درجهٔ n شود باید $y_p(x)$ را یك چندجمله‌ای درجهٔ $n+1$ انتخاب کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم

$$y_p(x)=x(A_0x^n+\cdots+A_n)$$

دراین عبارت جملهٔ ثابت وجود ندارد، اما چون $c=0$ یك جواب ثابت معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر است، در $y_p(x)$ به آن نیازی نیست. چون $b\neq 0$، داریم $A_0=a_0/b(n+1)$، وضرایب A_1، . . .، A_n را می‌توان به‌طریق مشابه تعیین کرد. اگر c و b هردوصفر شوند، قرارمی‌دهیم

$$y_p(x)=x^2(A_0x^n+\cdots+A_n)$$

حاصل $ay_p''(x)$ یك چند جمله‌ای درجهٔ n خواهدبود و می‌توان مانندپیش عمل کرد.[1] دراین حالت نیز جملهٔ ثابت ودرجهٔ اول در $y_p(x)$ حذف شده‌اند، زیرا هر دو جوابهای معادلهٔ همگن متناظرند.

$g(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$. مسئلهٔ تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ

$$ay''+by'+cy=e^{\alpha x}P_n(x) \tag{۹}$$

را می‌توان به مسئله‌ای که هم‌اکنون حل شد برگشت‌داد.[2] فرض کنیم

$$y_p(x)=e^{\alpha x}u(x)$$

آنگاه

$$y_p'(x)=e^{\alpha x}[u'(x)+\alpha u(x)]$$

و

$$y_p''(x)=e^{\alpha x}[u''(x)+2\alpha u'(x)+\alpha^2u(x)]$$

با جایگزینی y ، y' و y'' درمعادلهٔ(۹)، وحذف سازهٔ $e^{\alpha x}$، و دسته‌بندی جمله‌ها خواهیم داشت

---

۱. دانشجو باید توجه کند که درحالت $c=0$, $b\neq 0$ می‌توان ازمعادلهٔ (۶) یك‌بار انتگرال گرفت ومعادلهٔ خطی مرتبهٔ اولی به دست آورد که عبارت ناهمگن آن یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ $n+1$ است. یك جواب خصوصی این معادله با روش ضرایب نامعین که در آن $y_p(x)$ یك چند‌جمله‌ای ازدرجهٔ $n+1$ است به‌دست می‌آید. اگر c و b هردوصفر باشند، آنگـاه می‌توان از معادلهٔ (۶) مستقیماً دوبار انتگرال گرفت وجواب یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ $n+2$ خواهد بود.

۲. یکی ازشیوه‌های مورد علاقهٔ ریاضیدانان آن است که یك مسئلهٔ جدید را به‌مسئله‌ای که قبلاً حل شده است تبدیل کنند.

$$au''(x)+(2a\alpha+b)u'(x)+(a\alpha^2+b\alpha+c)u(x)=P_n(x) \qquad (10)$$

تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱۰) دقیقاً مسئله‌ای است که هم‌اکنون حل شد. اگر $a\alpha^2+b\alpha+c$ صفر نشود، فرض می‌کنیم که $u(x)=A_0x^n+\cdots+A_n$، و بنابراین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۹) به‌صورت

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n) \qquad (11)$$

است. ازطرف دیگر، اگر $a\alpha^2+b\alpha+c$ صفر شود و $(2a\alpha+b)$ مخالف صفر باشد، باید $u(x)$ را به صورت $x(A_0x^n+\cdots+A_n)$ گرفت. دراین حالت عبارت متناظر برای $y_p(x)$، x برابر عبارت طرف دوم معادلهٔ (۱۱) خواهدبود. بایدتوجه داشت که صفرشدن $a\alpha^2+b\alpha+c$ متضمن آن است که $e^{\alpha x}$ یك جواب معادلهٔ همگن متناظر است. اگر $a\alpha^2+b\alpha+c$ و $2a\alpha+b$ هردو صفرشوند (ودرنتیجه $e^{\alpha x}$ و $xe^{\alpha x}$ جوابهای معادلهٔ همگن متناظر خواهند بود) در این صورت عبارت درست $u(x)$ چنین است $x^2(A_0x^n+\cdots+A_n)$، وبنابراین $y_p(x)$، x^2 برابرعبارت‌طرف‌دوم‌معادلهٔ (۱۱) می‌باشد.

$g(x)=e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ یا $e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$. این‌دوحالت‌شبیه‌یکدیگرند، وما حالت‌دوم‌رادرنظرمی‌گیریم. می‌توان این‌مسئله رابا توجه‌به $\sin\beta x=(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})/2i$ به مسئلهٔ قبل تبدیل کرد. بنابراین $g(x)$ به‌صورت

$$g(x)=P_n(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i}$$

است، وباید قرارداد

$$y_p(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}(A_0x^n+\cdots+A_n)+e^{(\alpha-i\beta)x}(B_0x^n+\cdots+B_n)$$

ویا هم‌ارز با آن

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(A_0x^n+\cdots+A_n)\cos\beta x+e^{\alpha x}(B_0x^n+\cdots+B_n)\sin\beta x$$

معمولاً صورت اخیر را ترجیح می‌دهند. اگر $\alpha\pm i\beta$ در معادلهٔ مشخصهٔ متناظر به‌معادلهٔ همگن صدق کند، طبعاً باید هریك از چندجمله‌ایها را در x ضرب کرد تا درجهٔ آنها یك واحد افزایش یابد.

اگر جملهٔ ناهمگن شامل عبارتهایی از قبیل $e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $e^{\alpha x}\sin\beta x$ باشد مناسبتر است آنها را باهم مورد توجه قرار دهیم، زیرا صورت جوابهای خصوصی متناظر بدآنها یکسان است. به‌عنوان مثال، اگر $g(x)=x\sin x+2\cos x$، $y_p(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود

$$(A_0x+A_1)\sin x+(B_0x+B_1)\cos x$$

البته با فرض آنکه $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای معادلهٔ همگن متناظر نباشند.

نتایج پیشین را می‌توان درجدول ۱.۳ خلاصه نمود.

جدول ۱۰۳ جواب خصوصی $ay''+by'+cy=g(x)$

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$	$x^s(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(B_0x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+B_n)e^{\alpha x}\sin\beta x]$

در اینجا s کوچکترین عدد صحیح نامنفی است ($s=0$ ، ۱ یا ۲) به‌طوری‌که به‌ازای آن هیچ جمله‌ای از $y_p(x)$ جواب معادلهٔ همگن متناظر نباشد.

این نتایج همراه با اصل انطباق، که براساس آن می‌توان جواب خصوصی را هنگامی که جملهٔ ناهمگن مجموع چند تابع باشد به‌دست‌آورد، این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان طبقهٔ وسیعی از معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت را به‌طور نسبتاً سریع حل کرد.

اگر معادلهٔ دیفرانسیل دارای ضرایب متغیر، یا جملهٔ ناهمگن از آنچه درمعادلهٔ(۲) آمد پیچیده‌تر باشد، معمولاً بهتر است از روش تغییر پارامتر که در بند بعد مورد بحث قرارمی‌گیرد استفاده شود.

مثال ۴. با استفاده از روش ضرایب نامعین، شکل درست $y_p(x)$ را برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر تعیین کنید

$$y''+4y=xe^x+x\sin 2x \tag{12}$$

نخست معادلهٔ همگن متناظر را حل می‌کنیم. به‌آسانی به‌دست می‌آید که

$$y_c(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

برای تعیین y_p، یک‌جواب خصوصی معادلهٔ (۱۲)، ازاصل انطباق استفاده می‌کنیم ومعادلات زیر را به‌طور جداگانه درنظر می‌گیریم

$$y''+4y=xe^x \tag{13}$$

و

$$y''+4y=x\sin 2x \tag{14}$$

برای معادلهٔ اول فرض می‌کنیم که $y_p(x)=(A_0x+A_1)e^x$. چون e^x جواب معادلهٔ همگن متناظر نیست، لزومی ندارد که درحدس اولیهٔ خود تجدیدنظر کنیم. برای معادلهٔ دوم فرض می‌کنیم که $y_p(x)=(B_0x+B_1)\cos 2x+(C_0x+C_1)\sin 2x$، اما چون

$\cos 2x$ و $\sin 2x$ جوابهای معادلـهٔ همگن متناظرند، لازم است چندجمله‌ایهای ضریب را در x ضرب کنیم. بنابراین صورت درست $y_p(x)$ برای معادلهٔ (۱۲) عبارت است از

$$y_p(x)=(A_0x+A_1)e^x+(B_0x^2+B_1x)\cos 2x+(C_0x^2+C_1x)\sin 2x$$

برای تعیین ضرایب این عبارت آسانتر است،که جواب خصوصی متناظر با xe^x درمعادلهٔ (۱۳) و $x\sin 2x$ در معادلهٔ (۱۴) را جداگانه حساب کنیم، تااینکه تمام این عبارت را یکباره تطبیق دهیم.

مسائل

با استفاده ازروش ضرایب نامعین، مربوط به‌تعیین جواب خصوصی معادلهٔ ناهمگن، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. هنگامی که شرایط اولیه داده شده است، جوابی راکه در آنها صدق می‌کند پیدا کنید.

۱. $y''+y'-2y=2x\,,\quad y(0)=0\,,\quad y'(0)=1$

۲. $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$

۳. $y''+4y=x^2+3e^x\,,\quad y(0)=0\,,\quad y'(0)=2$

۴. $y''+2y'=3+4\sin 2x$

۵. $y''+9y=x^2e^{3x}+6$

۶. $y''-2y'+y=xe^x+4\,,\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=1$

۷. $2y''+3y'+y=x^2+3\sin x$

۸. $y''+y=3\sin 2x+x\cos 2x$

۹. $y''+2y'+y=e^x\cos x$

۱۰. $u''+\omega_0^2u=\cos\omega t\,,\quad \omega^2\neq\omega_0^2$

۱۱. $u''+\omega_0^2u=\cos\omega_0 t$

۱۲. $u''+\mu u'+\omega_0^2u=\cos\omega t \qquad \mu^2-4\omega_0^2<0$

۱۳. $y''+y'+y=\sin^2 x$

۱۴. $y''+y'+4y=2\sinh x$ ، راهنمایی: $\sinh x=\dfrac{(e^x-e^{-x})}{2}$

۱۵. $y''-y'-2y=\cosh 2x$ ، راهنمایی: $\cosh x=\dfrac{(e^x+e^{-x})}{2}$

درمسائل ۱۶ تا ۲۲ شکل مناسبی برای $y_p(x)$، درصورتی کـه بخواهیم از روش ضرایب نامعین استفاده‌کنیم، بیابید. محاسبهٔ ثابتها لازم نیست.

۱۶. $y''+3y'=2x^4+x^2e^{-3x}+\sin 3x$

۱۷. $y''+y=x(1+\sin x)$

۱۸. $y''-5y'+6y=e^x\cos 2x+e^{2x}(3x+4)\sin x$

۱۹. $y''+2y'+2y=3e^{-x}+2e^{-x}\cos x+4e^{-x}x^2\sin x$

۲۰. $y''-4y'+4y=2x^2+4xe^{2x}+x\sin 2x$

۲۱. $y''+4y=x^2\sin 2x+(6x+7)\cos 2x$

۲۲. $y''+3y'+2y=e^x(x^2+1)\sin 2x+3e^{-x}\cos x+4e^x$

۲۳. جواب عمومی

$$y''+\lambda^2 y=\sum_{m=1}^{N} a_m \sin m\pi x$$

راکه در آن $\lambda>0$ و $\lambda\neq m\pi$، $m=1,2,\ldots,N$، تعیین کنید.

۲۴. اگر a، b و c مثبت و Y_1 و Y_2 جوابهای

$$ay''+by'+cy=g(t)$$

باشند، نشان دهید که وقتی $t\to\infty$ داریم $Y_1(t)-Y_2(t)\to 0$. اگر $b=0$ باشد آیا این نتیجه برقرار است؟

۲۵. دربسیاری ازمسائل فیزیکی امکان داردکه تابع ورودی (یعنی، جمله ناهمگن) درفواصل زمانی مختلف دارای فرمولهای متفاوتی باشند. به‌عنوان یک‌مثال ساده از این‌گونه مسائل، برای معادلهٔ

$$y''+y=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant\pi \\ \pi e^{\pi-t}, & t>\pi \end{cases}$$

جواب $y=\phi(t)$ راطوری بیابیدکه درشرایط اولیهٔ $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ صدق کند، و y و y' به‌ازای همهٔ مقادیر t پیوسته باشند. جملهٔ ناهمگن وجواب $y=\phi(t)$ رابه‌عنوان تابعی اززمان رسم کنید.

راهنمایی: نخست مسئلهٔ مقدار اولیه را به ازای $t\leqslant\pi$، وسپس به ازای $t>\pi$ حل کنید و مقدارثابت دلخواه راطوری تعیین کنیدکه y و y' در $t=\pi$ پیوسته باشند.

۲.۶.۳ روش تغییر پارامترها

دربند ۱.۶.۳ برای تعیین جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب‌ثابت که جملهٔ ناهمگن‌آنها به‌صورت مناسبی است، روش ساده‌ای را بحث‌کردیم. دراین‌بند به بررسی روش‌کلی تعیین جواب خصوصی معادلهٔ

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad (1)$$

می‌پردازیم، توابع p ، q و g روی فاصلهٔ موردتوجه پیوسته‌اند. برای‌کاربرد ایـن روش، که به روش تغییرپارامترها[1] موسوم است لازم است یك مجموعهٔ اساسی ازجوابهای‌معادلهٔ همگن متناظر

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{۲}$$

دردست باشد.

فرض‌کنیم y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ همگن (۲) باشند. آنگاه جـواب عمومی معادلهٔ (۲) چنین است

$$y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

در روش تغییر پارامترها به‌جای ثابتهای c_1 و c_2 توابع u_1 و u_2 را قرارمـی‌دهیم. آنگاه توابع u_1 و u_2 را طوری تعیین می‌کنیم‌که

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x) \tag{۳}$$

درمعادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن(۱) صدق‌کند. اهمیت این روش درآن است‌که مـی‌توان به آسانی توابع u_1و u_2 را تعیین‌کرد. برای تعیین u_1و u_2 به دوشرط نیازمندیم. یك شرط، از این‌نکته‌که y_p باید درمعادلهٔ (۱) صدق‌کند برای u_1 و u_2 حاصل می‌شود. شرط دوم را می‌توان به‌طور دلخواه اختیارکرد، وطوری انتخاب می‌شودکـه محاسبات راآسان سازد. ازمشتق‌گیری معادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید

$$y'_p=(u'_1y_1+u'_2y_2)+(u_1y'_1+u_2y'_2) \tag{۴}$$

چنان‌که هم‌اکنون اشاره‌شد، این‌عبارت را باقیدآنکه u_1و u_2 در

$$u'_1y_1+u'_2y_2=0 \tag{۵}$$

صدق‌کنند ساده می‌کنیم. y''_p باتوجه به‌این شرط به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$y''_p=u'_1y'_1+u'_2y'_2+u_1y''_1+u_2y''_2 \tag{۶}$$

توجه شودکه درعبارت y''_p، به علت اعمال شرط (۵)، فقط مشتقهای اول u_1 و u_2 نمایان می‌شوند. باجایگزینی y'_p و y''_p درمعادلهٔ (۱) خواهیم داشت

$$u_1(y''_1+py'_1+qy_1)+u_2(y''_2+py'_2+qy_2)+u'_1y'_1+u'_2y'_2=g$$

جمله‌های داخل پرانتزها صفرند، زیرا y_1 و y_2 جوابهای معادلـهٔ همگن(۲) مـی‌باشند، بنابراین شرط آنکه y_p درمعادلهٔ (۱) صدق‌کند به‌صورت زیردرمی‌آید

---

۱. این روش را به احتـرام ریاضیدان فـرانسوی ژ. ل. لاگرانـژ (J. L. Lagrange)، (۱۷۳۶–۱۸۱۳) روش لاگرانژ نیز می‌نامند، وی برای نخستین‌بار این روش را در ۱۷۷۴ به‌کارگرفت. لاگرانژ به‌سبب‌کارهایش درمکانیك‌سماوی، مکانیك تحلیلی، و آنالیز ریاضی‌مشهور است. وی در سن بیست‌وپنج سالگی به‌عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان زنده شناخته شد.

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g \qquad (7)$$

معادلات (۵) و (۷) را به‌صورت دستگاه دومعادلهٔ

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$$
$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g$$

با دوتابع مجهول u'_1 و u'_2 می‌نویسیم. باحل این دستگاه به‌دست می‌آید

$$u'_1 = \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)} \ ,\ u'_2 = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} \qquad (8)$$

که در آن $W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$. تقسیم بر $W(y_1, y_2)$ بدون اشکال است‌زیرا y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ همگن‌اند، ودرنتیجه $W(y_1, y_2)$ درفاصلهٔ مزبورصفر نمی‌شود. با انتگرال‌گیری ازمعادلات (۸) وجایگزینی درمعادلهٔ (۳) یك جواب خصوصی برای معادلهٔ ناهمگن (۱) به‌دست می‌آید. این‌نتیجه را به‌صورت قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۲.۰۳ اگر توابع p ، q و g روی $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ‌همگن وابسته به معادلهٔ دیفرانسیل (۱)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

باشند، آنگاه یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر خواهد بود

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt + y_2(x)\int^x \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt \qquad (9)$$

معادلهٔ (۹) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$y_p(x) = \int^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)}\,g(t)\,dt \qquad (10)$$

توجه شودکه درمعادلهٔ (۱۰)، t متغیر گنگ انتگرال‌گیری و x متغیر مستقل است.

دربه‌کاربردن روش تغییرپارامترها درمورد یك‌مسئلهٔ خاص معمولاً اطمینان بخش‌تر است که $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ را جایگزین کرده ومانند بالا عمل‌کنیم تا اینکه سعی‌کنیم فرمولهای (۹) یا (۱۰) را به‌خاطربسپاریم. اگربخواهیم یکی ازاین فرمولها را به‌کاربریم باید توجه داشته‌باشیم‌که معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت استاندارد(۱) نوشته شده باشد. باید متذکر شدکه گرچه روابط (۹) و (۱۰) فرمولهایی برای محاسبهٔ $y_p(x)$ به دست می‌دهند، معلوم نیست‌که محاسبهٔ این‌انتگرالها به‌صورت دقیق همیشه‌آسان یا حتی ممکن باشد. باوجود این، حتی دراین حالتها نیز فرمولهای $y_p(x)$ نقطهٔ آغازی برای محاسبهٔ عددی $y_p(x)$ فراهم می‌سازند وممکن است‌که این حد اکثر کاری باشد که بتوان انجام داد. ازدیدگاه عددی معمولاً مناسبتر است‌که جواب به‌صورت انتگرالی‌باشد،

زیرا غالباً محاسبهٔ عددی یك انتگرال به‌طور قابل توجهی، ازانتگرال‌گیری عددی مستقیم معادلهٔ دیفرانسیل آسانتر است.

باردیگر تأکید می‌کنیم که درمحاسبهٔ جواب خصوصی با روش تغییرپارامترها لزومی ندارد که ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل ثابت باشند، فقط باید دوجواب مستقل خطی معادلهٔ همگن را داشته باشیم.

مثال. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیررا تعیین‌کنید

$$y''+y=\sec x, \quad ۰<x<\pi/۲ \tag{۱۱}$$

دوجواب مستقل خطی معادلهٔ همگن عبارتند از $y_۱(x)=\cos x$ ،$y_۲(x)=\sin x$. با وجود آنکه معادلهٔ (۱۱) دارای ضرایب ثابت است و $y_c(x)$ را می‌شناسیم، نمی‌توان ازروش ضرایب نامعین استفاده‌کرد، زیرا طرف دوم معادلهٔ (۱۱) به صورت $e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ یا $e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$ نیست. پس از روش تغییر پارامترها استفاده کرده، ومی نویسیم

$$y_p(x)=u_۱(x)\cos x+u_۲(x)\sin x$$

آنگاه

$$y'_p(x)=[-u_۱(x)\sin x+u_۲(x)\cos x]+[u'_۱(x)\cos x+u'_۲(x)\sin x]$$

کروشهٔ دوم را برابر صفر قرار داده و دوباره مشتق می‌گیریم، و درمعادلهٔ (۱۱) جایگزین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$u'_۱(x)\cos x+u'_۲(x)\sin x=۰$$

$$-u'_۱(x)\sin x+u'_۲(x)\cos x=\sec x$$

و ازحل آن به دست می‌آید

$$u'_۱(x)=-\operatorname{tg} x\,, \quad u'_۲(x)=۱$$

$$u_۱(x)=\ln\cos x\,, \quad u_۲(x)=x$$

بنابراین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱۱) عبارت است از

$$y_p(x)=x\sin x+(\cos x)\ln\cos x$$

وجواب عمومی چنین است

$$y=c_۱\cos x+c_۲\sin x+x\sin x+(\cos x)\ln\cos x$$

می‌توان نتایجی راکه در بندهای پیشین این فصل دربارهٔ روشهای حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱)

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

آمده‌است بافرض پیوسته بودن p ، q و g روی $\alpha < x < \beta$ به‌صورت زیرخلاصه کرد.

۱. اگر p و q ثابت باشند، همواره می‌توان برای معادلهٔ همگن دوجواب مستقل خطی پیداکرد. آنگاه می‌توان با روش تغییر پارامترها یك جواب خصوصی وازآنجا جواب‌کامل را به دست آورد. اگر g به‌صورت مناسبی باشد، محتملاً استفاده از روش ضرایب نامعین برای تعیین یك جواب خصوصی آسانتر از روش تغییرپارامترها خواهدبود.

۲. اگر p و q ثابت نباشند، روش‌کلی برای حل معادلهٔ (۱) برحسب تعدادی متناهی از توابع مقدماتی وجود ندارد.[1] اما اگر بتوان یك جواب معادلهٔ همگن را پیدا کرد، می‌توان اصولاً جواب دومی را با کاهش مرتبهٔ معادله به‌دست‌آورد. دراین صورت یك جواب خصوصی با روش تغییر پارامترها به‌دست می‌آید، وبدین‌سان جواب کامل معین می‌گردد. در واقع می‌توان هر دومحاسبه را توأماً به‌کار گرفت. اگر یك جواب معادلهٔ همگن معلوم باشد، می‌توان با روش کاهش مرتبه، معادلهٔ ناهمگن را حل کرده، هم جواب خصوصی وهم جواب مستقل خطی دومی برای معادلهٔ همگن به دست آورد. این مطلب در مسائل ۱۵ و ۱۶ توضیح داده شده است. ازاین‌رو، به‌طورکلی، مسئلهٔ حل معادلهٔ (۱) به یافتن یك جواب معادلهٔ همگن متناظر موکول می‌گردد.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۷، یك جواب خصوصی‌را بااستفاده از روش تغییرپارامترها بیابید.

۱. $$y'' - ۵y' + ۶y = ۲e^x$$

۲. $$y'' - y' - ۲y = ۲e^{-x}$$

۳. $$y'' + ۲y' + y = ۳e^{-x}$$

۴. $$y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

۵. $$y'' + ۹y = ۹\sec^۲ ۳x, \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۶}$$

۶. $$y'' + ۴y' + ۴y = e^{-۲x}/x^۲, \quad x > ۰$$

۷. $$y'' + ۴y = ۳\operatorname{cosec} ۲x, \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

۸. تحقیق‌کنیدکه x و xe^x جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به

---

۱. روش سریها راکه برای طبقهٔ وسیعی ازمسائل با ضرایب متغیر به‌کار می‌رود، درفصل ۴ مورد بحث قرار داده‌ایم. روشهای عددی درفصل ۸ بررسی شده‌اند.

$$x^{۲}y''-x(x+۲)y'+(x+۲)y=۲x^{۳}, \quad x>۰$$

می‌باشند، وجواب عمومی را بیابید.

۹. تحقیق کنید که $(x+۱)$ و e^{x} جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به

$$xy''-(۱+x)y'+y=x^{۲}e^{۲x}, \quad x>۰$$

می‌باشند، وجواب عمومی را بیابید.

۱۰. دوجواب مستقل خطی معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲،

$$x^{۲}y''+xy'+\left(x^{۲}-\frac{۱}{۴}\right)y=۰, \quad x>۰$$

عبارتند از $x^{-۱/۲}\sin x$ و $x^{-۱/۲}\cos x$. جواب عمومی

$$x^{۲}y''+xy'+\left(x^{۲}-\frac{۱}{۴}\right)y=۳x^{۳/۲}\sin x, \quad x>۰$$

را بیابید.

۱۱. تحقیق کنید که e^{x} و x جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به

$$(۱-x)y''+xy'-y=۲(x-۱)^{۲}e^{-x}, \quad ۰<x<۱$$

می‌باشند، وجواب عمومی را بیابید.

۱۲. فرمولی برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر بیابید

$$y''-۵y'+۶y=g(x)$$

۱۳. فرمولی برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر بیابید

$$x^{۲}y''+xy'+\left(x^{۲}-\frac{۱}{۴}\right)y=g(x), \quad x>۰$$

(مسئلهٔ ۱۰ را ببینید.)

۱۴*. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+y=g(t), \quad y(۰)=۰, \quad y'(۰)=۰$$

را درنظر می‌گیریم. دراینجا پریم نمایشگر مشتق نسبت به زمان t است.

(الف) نشان دهیدکه جواب عمومی $y''+y=g(t)$ عبارت است از

$$y=\phi(t)=\left(c_{۱}-\int_{\alpha}^{t}g(s)\sin s\,ds\right)\cos t+\left(c_{۲}+\int_{\beta}^{t}g(s)\cos s\,ds\right)\sin t$$

که در آن $c_{۱}$ و $c_{۲}$ ثابتهای دلخواه و α و β نقاطی می‌باشندکه به طور مناسب انتخاب شده‌اند.

(ب) با استفاده از (الف) نشان دهیدکه اگر

$$c_1 = \int_\alpha^0 g(s)\sin s\,ds\,,\qquad c_2 = -\int_\beta^0 g(s)\cos s\,ds$$

آنگاه $y(0)=0$ و $y'(0)=0$، سپس نشان دهید که جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ بالا به‌ازای $g(t)$ دلخواه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$y=\phi(t)=\int_0^t g(s)\sin(t-s)\,ds$$

توجه شود که این رابطه فرمولی برای محاسبهٔ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ اصلی، به ازای هرجملهٔ ناهمگن مفروض $g(t)$، به‌دست می‌دهد. تابع ϕ نه‌تنها درمعادلهٔ دیفرانسیل مزبور صدق می‌کند، بلکه خود به خود درشرایط اولیه نیز صادق است. این فرمول رابطهٔ موجود بین تابع ورودی $g(t)$ وخروجی $\phi(t)$ را نیز نشان می‌دهد. علاوه براین، دیده می‌شود که تابع خروجی در زمان t_0 تنها بستگی به تغییرات تابع ورودی ازلحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ مورد توجه $t=t_0$ دارد. این انتگرال را اغلب تلفیق $\sin t$ و $g(t)$ می‌نامند.

(ج) اکنون که جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن راکه درشرایط اولیهٔ همگن صدق می‌کند دراختیار داریم، می‌توان همان مسئله را برای شرایط اولیهٔ ناهمگن به‌وسیلهٔ اضافه‌کردن جوابی ازمعادلهٔ همگن که درشرایط اولیهٔ ناهمگن صدق کند، حل کرد. نشان دهید که جواب $y''+y=g(t)$ با شرایط $y(0)=y_0$، $y'(0)=y'_0$ چنین است

$$y=\phi(t)=\int^t g(s)\sin(t-s)\,ds+y_0\cos t+y'_0\sin t$$

۱۵. معادلهٔ ناهمگن

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad \text{(یك)}$$

را درصورتی که یك جواب معادلهٔ همگن متناظر معلوم باشد، می‌توان با روش کاهش مرتبه نیز حل کرد (بند ۴.۳ را ببینید). با فرض آنکه y_1 یك جواب معلوم معادلهٔ همگن باشد.

(الف) نشان دهید که $y=y_1(x)v(x)$ یك جواب معادلهٔ (یك) خواهد بود به‌شرط آنکه v درمعادلهٔ زیر صدق کند

$$y_1v''+(2y'_1+py_1)v'=g \qquad \text{(دو)}$$

(ب) معادلهٔ (دو) یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به v' است. نشان دهید که جواب آن چنین است

$$y_1^2(x)h(x)v'(x)=\int^x y_1(s)h(s)g(s)\,ds+k$$

که درآن $h(x)=\exp[\int^x p(s)\,ds]$ و k مقدار ثابتی است.

(ج) با استفاده ازقسمت (ب) نشان دهیدکه جواب عمومی معادلهٔ (یك) عبارت است از

$$y=c_۱ y_۱(x)+c_۲ y_۱(x)\int^x \frac{ds}{y_۱^۲(s)h(s)}$$
$$+y_۱(x)\int^x \frac{۱}{y_۱^۲(s)h(s)}\left[\int^s y_۱(t)h(t)g(t)dt\right]ds$$

۱۶. بااستفاده از روشی که درمسئلهٔ ۱۵ بیان‌شد، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

(الف) $x^۲y''-۲xy'+۲y=۴x^۲\,,\quad x>\circ\,;\, y_۱(x)=x$

(ب) $x^۲y''+۷xy'+۵y=x\,,\quad x>\circ\,;\, y_۱(x)=x^{-۱}$

۷.۳ ارتعاشات مکانیکی

دربندهای ۱.۳ تا ۲.۶.۳ این فصل روشهای حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبهٔ دوم بیان شد. دیده شدکه وقتی معادلهٔ دیفرانسیل دارای ضرایب ثابت باشد، می‌توان آن‌را مستقیماً حل کرد. دو زمینهٔ مهم کاربرد این نظریه درمباحث نوسانات الکتریکی ومکانیکی می‌باشد، که درآن تعداد بسیار زیادی ازپدیده‌ها طبق معادلاتی به شکل

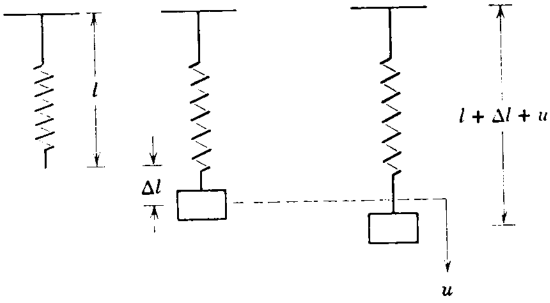
$$m\frac{d^۲u}{dt^۲}+c\frac{du}{dt}+ku=F(t) \qquad (۱)$$

صورت می‌پذیرند. در اینجا m ، c و k مقادیر ثابت، F تابعی مفروض، و $u=\phi(t)$ نمایشگرجواب یك دستگاه فیزیکی به صورت تابعی از زمان t است. به‌ویژه، حرکت جرم مرتعشی‌که به‌یك سر فنر قائمی آویخته شده باشد، طبق این معادله انجام می‌گیرد. شایسته است‌که طرز به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۱) را درمورد این مسئله دقیقاً مورد توجه قرار دهیم، زیرا مسائل بسیاری دراین اصول مشترکند.

نخست افزایش‌طول فنری به‌طول‌طبیعی l رادرهنگام تعادل دراثراضافه‌کردن یك‌جرم m درنظر می‌گیریم. گیریم Δl افزایش طول مزبور را نشان دهد (شکل ۱.۳ را ببینید). نیروهای وارد بر جرم عبارتند ازنیروی ثقل‌که اثرآن به‌سوی پایین است، $mg=w$ ، که درآن g شتاب ثقل و w وزن جرم مزبور است، ونیروی فنرکه اثر آن به سوی بالاست. چون جرم مزبور دراین وضعیت درتعادل است، این‌نیروها ازلحاظ اندازهٔ عددی برابرند. اگر تغییرمکان Δl درمقایسه با طول l کوچك باشد، بنا برقانون هوك[۱] نیروی فنر با Δl متناسب است،وبنابراین اندازهٔ آن $k\Delta l$ می‌باشد. ثابت k بستگی به‌فنر دارد و آن‌را ثابت

---

۱. هوك (Hooke)، (۱۶۳۵ــ۱۷۰۳) نخستین‌بار قانون خود را در ۱۶۷۶ به‌صورت رمزی، *ceiii nosssttuv* منتشرکرد، و در ۱۶۷۸ حل آن را بــه‌صورت *ut tensio sic vis* ارائه داد، وتقریباً بدین معنی است‌که «هرقدر نیرو، همان‌قدر تغییرمکان.»



شکل ۱۰۳

فنر می‌نامند. با معلوم بودن وزن w واندازه‌گیری Δl واستفاده از

$$k\Delta l = mg \qquad (۲)$$

می‌توان مقدار آن‌را محاسبه‌کرد. توجه شود که k دارای ابعاد $mg/\Delta l$ یعنی، طول/نیرو است.

ازلحاظ دینامیك، موضوع مورد توجـه دراین مسئله بـررسی حرکت جرم مزبور تحت تأثیر یك نیروی خارجی یـا یك تغییرمکان اولیه است. فرض‌کنیم u که جهت مثبت مقادیر آن به‌سوی پایین است، نمایشگـر تغییرمکان جـرم مزبور از وضعیت تعادل باشد. این تغییرمکان u، تـابع t است و ارتباط آن بـا نیروهای وارد برجرم مزبور به وسیلهٔ قانون نیوتن بیان‌می‌شود، یعنی باید md^2u/dt^2 ازحیث اندازه وراستا با برآیند نیروهای وارد برجرم m برابر باشد. درهنگام نوشتن معادلهٔ ناظر برحرکت جرم، باید توجه داشت که علامت صحیح هریك از نیروهای مختلف وارد برجرم، به دقت تعیین شود. دربررسی زیر جهت مثبت نیروها را به سوی پایین، وجهت منفی را به سوی بالا انتخاب‌کرده‌ایم. چهار نیرو برجرم مزبور اثر می‌کند:

۱. وزن آن، $w=mg$ که همواره به سوی پایین اثر می‌کند.

۲. نیروی ناشی ازفنر F_s، که با طول $\Delta l+u$ متناسب است، وتأثیرش همواره در جهت برگرداندن فنر به وضعیت طبیعی است. اگر $\Delta l+u>0$، فنرکشیده شده ونیرو، که جهت آن به سوی بالاست، با $F_s(t)=-k(\Delta l+u)$ بیان می‌شود. دیده می‌شود که اندازهٔ نیرویی‌کـه ازفنر بـه جـرم وارد می‌شود، برابر $k(\Delta l+u)$ است، علامت منفی نمایشگر آن‌است که جهت این‌نیرو دراین حالت خاص به‌سوی بالاست. اگر $u+\Delta l<0$ (یعنی،$-u>\Delta l$)، فنربه‌اندازهٔ مسافت[1] $(-u)-(\Delta l)$ فشرده‌شده‌است،ونیروکه‌راستای آن به‌سوی پایین‌است، برابربا $k[(-u)-(\Delta l)]$ می‌باشد. بنابراین به‌ازای همهٔ مقادیر u

۱. توجه شودکه اگرجرم دربالای وضعیت تعادل واقع باشد، مسافت آن دربالای وضعیت تعادل برابر $-u$ است، نه u.

داریم

$$F_s(t)=-k(\Delta l+u) \qquad (۳)$$

بار دیگر تأکید می‌کنیم که رابطهٔ (۳) نه فقط نمایشگر اندازهٔ نیرویی است که فنر درهر وضعیت u برجرم وارد می‌کند، بلکه راستای آن را نیز به دست می‌دهد.

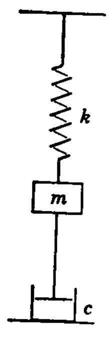
۳. $F_d(t)$ نیروی مقاوم یا استهلاك. این نیرو ممکن است دراثر خواص چسبندگی سیالی که جرم مزبور درآن حرکت می‌کند به وجود آید (مانند مقاومت هوا)؛ یا آنکه جرم متحرك به‌یك دستگاه متشکل ازپیستونی که دراستوانه‌ای مملو از روغن حرکت می‌کند (داشپوت) متصل‌شده باشد (شکل ۲.۳ را ببینید). درهر دوحالت نیروی‌استهلاك درخلاف جهت حرکت جرم اثر می‌کند. بنا به‌شواهد تجربی می‌دانیم که تا هنگامی‌که تندی جرم زیاد بزرگ نباشد می‌توان مقاومت را با تندی $|du/dt|$ متناسب گرفت. اگرجرم به‌سوی پایین درحرکت باشد، u صعودی وبنابراین du/dt مثبت است، درنتیجه $F_d(t)$ که سوی آن به طرف بالا می‌باشد با $-c(du/dt)$ داده می‌شود. ثابت مثبت c را، ثابت استهلاك می‌نامند؛ واحد آن ازجنس نیرو برسرعت است. اگر جرم به سوی بالا درحرکت باشد، u نزولی و du/dt منفی است، و $F_d(t)$ که دراین حالت به‌سوی پایین است، همچنان با $-c(du/dt)$ معین می‌شود. بنابراین به ازای هر u داریم

$$F_d(t)=-c\frac{du}{dt} \qquad (۴)$$

۴. $F(t)$ نیروی اعمال شونده، که اگر مثبت باشد جهت آن به‌سوی پایین واگر منفی باشد جهت آن به‌سوی بالاست. این نیرو ممکن است ازحرکت پایه‌ای که فنر به‌آن بسته شده‌است ایجاد شود، یاآنکه نیرویی باشدکه مستقیماً به جرم اعمال شده‌است.

طبق قانون نیوتن

$$mg+F_s(t)+F_d(t)+F(t)=m\frac{d^2u}{dt^2}$$



شکل ۲.۳

با جایگزینی $F_s(t)$ و $F_d(t)$ خواهیم داشت

$$mg-k(\Delta l+u)-c\frac{du}{dt}+F(t)=m\frac{d^۲u}{dt^۲} \qquad (۵)$$

چون $k\Delta l=mg$، معادلهٔ (۵) به معادلهٔ دیفرانسیل (۱) بدل می‌شود

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F(t)$$

درنوشتن این معادله ازقرارداد معمول که مشتقهای نسبت به زمان را با نقطه نشان می‌دهند استفاده شده است.

این نکتهٔ مهم را باید به‌خاطر داشت که درمعادلهٔ (۱)، جرم m، ضریب استهلاك c، وثابت فنر k همه ثابتهای مثبت‌اند. همچنین باید به‌این نکتهٔ مهم توجه داشت که معادلهٔ (۱) فقط نمایشگریك معادلهٔ تقریبی برای تعیین u می‌باشد. در واقع رابطهٔ بین $F_s(t)$ و $\Delta l+u$ خطی نیست؛ اما، برای اکثرمواد معمولی، مانندفولاد، وهمچنین هنگامی که $(\Delta l+u)/l\ll ۱$، رابطه با درجهٔ دقت زیاد، تقریباً خطی است. به همین نحو، عبارت نیروی بازدارنده نیز تقریبی است. همچنین در به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۱) ازجرم فنر درمقایسه با جرم جسمی که به‌آن بسته شده است صرف‌نظر کرده‌ایم. خوشبختانه، درکاربردهای وسیع وگوناگونی، معادلهٔ (۱) مدل ریاضی رضایت‌بخشی از دستگاه فیزیکی مزبور است.

بیان کامل مسئلهٔ ارتعاش مستلزم مشخص‌کردن دوشرط اولیه است ــ تغییرمکان اولیهٔ $u_۰$، وسرعت اولیهٔ $\dot{u}_۰$. ازاستدلال فیزیکی چندان روشن نمی‌شودکه آیا فقط باید دوشرط اولیه مشخص شود، ویا آنکه این دوشرط باید همان شرایط مذکور باشد. اما ازقضیهٔ وجود ویکتایی ۲.۳ نتیجه می‌شودکه با این شرایط یك مسئلهٔ ریاضی خواهیم داشت که دارای جوابی یکتاست. جوابی ازمعادلهٔ (۱) که دراین شرایط اولیه صدق کند، وضعیت جرم مزبور را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد.

مثال. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مربوط به دستگاه جرم-داشپوت-فنر زیر را بیابید. افزایش طول فنر به‌ازای وزن ۵ پوندی برابر ۱ اینچ است. دستگاه داشپوت به‌ازای سرعت ۲ اینچ درثانیه نیرویی برابر ۰٫۰۲ پوند اعمال می‌کند. یك وزنهٔ ۲ پوندی به‌فنر بسته شده است و از وضعیت ۲ اینچ پایینتر ازموضع تعادل رها می‌شود.

داریم

$$m=\frac{w}{g}=\frac{۲\,\text{lb}}{۳۲\,\text{ft/sec}^۲}=\frac{۱}{۱۶}\,\frac{\text{lb-sec}^۲}{\text{ft}}$$

$$c=\frac{۰٫۰۲\,\text{lb}}{۲\,\text{in./sec}}=\frac{۰٫۰۲\,\text{lb}}{(۱/۶)\,\text{ft/sec}}=۰٫۱۲\,\frac{\text{lb-sec}}{\text{ft}}$$

$$k=\frac{۵\,\text{lb}}{۱\,\text{in.}}=\frac{۵\,\text{lb}}{(۱/۱۲)\,\text{ft}}=۶۰\,\frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

و بنابراین

$$\frac{1}{16}\ddot{u}+0.12\dot{u}+60u=0$$

یا

$$\ddot{u}+1.92\dot{u}+960u=0$$

که درآن u برحسب فوت و t برحسب ثانیه است. شرایط اولیه عبارتند از $u(0)=\frac{1}{6}$ ، $\dot{u}(0)=0$.

۱.۷.۳ ارتعاشات آزاد

ارتعاشات آزاد بدون استهلاك. اگر نیروی خارجی واستهلاکی وجود نداشته‌باشد، آنگاه معادلهٔ (۱) بند پیش به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$m\ddot{u}+ku=0 \qquad (1)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$u=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \qquad (2)$$

که درآن

$$\omega_0^2=k/m \qquad (3)$$

و ω_0 را فرکانس دوری می‌نامند، و روشن است‌که دارای واحدی از جنس معکوس زمان می‌باشد. درهرمورد خاص، ثابتهای A و B به‌وسیلهٔ شرایط اولیهٔ داده شده معین‌می‌گردند.

در بحث جواب معادلهٔ (۱) مناسبتر است که رابطهٔ (۲) را به‌صورت

$$u=R\cos(\omega_0 t-\delta) \qquad (4)$$

درآوریم. مقادیر A و B هرچه باشند همواره می‌توان این تبدیل را با قراردادن $R=(A^2+B^2)^{1/2}$ وحل معادلات $A=R\cos\delta$ و $B=R\sin\delta$ نسبت به δ انجام داد.

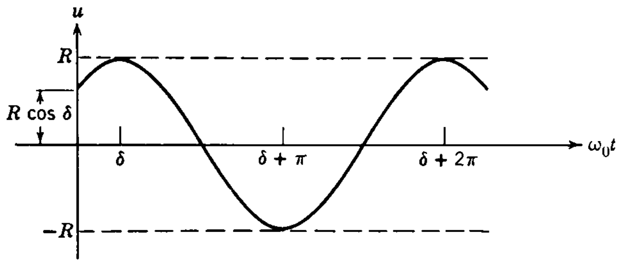
به‌علت تناوب تابع کسینوس، معادلهٔ (۴) نمایشگر یك حرکت تناوبی، یا حرکت هارمونیك ساده با تناوب

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \qquad (5)$$

است. برای تمایز بین مسائل ارتعاشات آزاد بدون استهلاك ومسائل ارتعاشات استهلاکی یا ارتعاشات تقویت شونده، فرکانس دوری ω_0 وتناوب $2\pi/\omega_0$ مربوط به‌حرکت بدون استهلاك وبدون‌تقویت را معمولاً فرکانس دوری طبیعی وتناوب طبیعی ارتعاش می‌نامند.

چون $|\cos(\omega_0 t-\delta)|\leqslant 1$ ، u همواره بین دوخط $u=\pm R$ قراردارد. ماکزیمم

تغییرمکان در زمانهای $\omega_\circ t-\delta=\circ\ ,\ \pm\pi\ ,\ \pm ۲\pi\ ,\ \ldots$ روی می‌دهد. ثابتهای R و δ را به‌ترتیب دامنه و زاویهٔ فاز حرکت مزبور می‌نامند. نمودار اجمالی حرکتی که بامعادلهٔ (۴) نمایش داده می‌شود در شکل ۳.۳ آمده است. توجه شودکه این حرکت تناوبی با افزایش زمان ازبین نمی‌رود. علت این امر آن است‌که نیروی مقاوم را درنظرنگرفته‌ایم، این نیرو موجب می‌شودکه انرژیی‌که در دستگاه از تغییرمکان اولیه و سرعت ذخیره شده است، اتلاف گردد.



شکل ۳.۳ حرکت هارمونیك ساده

مثال. مطلوب است تعیین تناوب طبیعی یك دستگاه فنر-جرم درصورتی‌که وزن‌جرم ۱۰ پوند و افزایش طول فنر ۲ اینچ باشد. اگر فنر را ۲ اینچ دیگرکشیده و سپس رها سازیم حرکت حاصل را معین‌کنید.

ثابت فنر برابر است با $k=۱۰\ \mathrm{lb}/۲\ \mathrm{in.}=۶۰\ \mathrm{lb/ft}$. جرم m برابر است با

$$m=w/g=\frac{۱۰}{۳۲}\ \mathrm{lb}/(\mathrm{ft}/\mathrm{sec}^۲)$$

بنابراین

$$T=۲\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{۱/۲}=۲\pi\left[\frac{۱۰}{(۳۲)۶۰}\right]^{۱/۲}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}\ \mathrm{sec}$$

معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\frac{۱۰}{۳۲}\ddot{u}+۶۰u=\circ$$

ازآنجا

$$u=A\cos(۸\sqrt{۳}t)+B\sin(۸\sqrt{۳}t).$$

جوابی که در شرایط اولیهٔ فوت $u(\circ)=۱/۶$ و $\dot{u}(\circ)=\circ\ \mathrm{ft/sec}$ صدق می‌کند چنین است

$$u=\frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t)$$

که در آن t برحسب ثانیه و u برحسب فوت است.

ارتعاشات آزاد با استهلاك. اگر تأثیر نیروی مقاوم را منظور کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت جرم چنین خواهد بود

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \tag{6}$$

ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ آن عبارتند از

$$r_1,\, r_2=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}=-\frac{c}{2m}\pm\left(\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}\right)^{1/2} \tag{7}$$

چون c ، k و m مثبت‌اند، c^2-4km همواره از c^2 کوچکتر است، بنابراین اگر $c^2-4km\geqslant 0$ ، آنگاه r_1 و r_2 حاصل ازمعادلهٔ (۷) منفی‌اند. اگر $c^2-4km<0$ ، آنگاه مقادیر r_1 و r_2 حاصل از معادلهٔ (۷) مختلط‌اند، اما بخش حقیقی آنها منفی است. جدول جوابهای معادلهٔ (۶) عبارت است از

$$c^2-4km>0,\quad u=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t},\quad r_1,\, r_2<0 \tag{8}$$

$$c^2-4km=0,\quad u=(A+Bt)e^{-(c/2m)t} \tag{9}$$

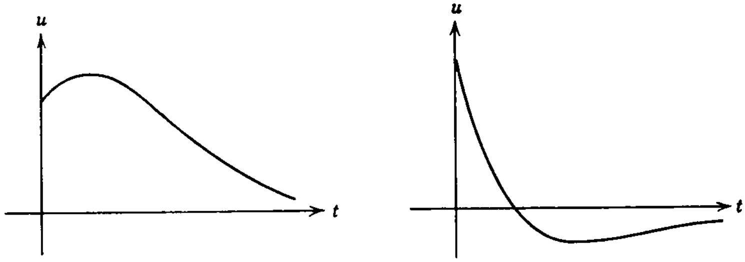
$$c^2-4km<0,\quad u=e^{-(c/2m)t}(A\cos\mu t+B\sin\mu t)$$

$$\mu=(4km-c^2)^{1/2}/2m>0 \tag{10}$$

در همهٔ این حالتها، بدون توجه به‌شرایط اولیه، یعنی، بدون توجه به‌مقادیر A و B ، وقتی که $t\to\infty$ داریم $u\to 0$ ، وبنابراین‌حرکت‌با افزایش زمان‌مستهلك می‌شود. بدین‌سان جوابهای معادلات (۱) و (۶) آنچه راکه انتظارش می‌رفت تأیید می‌کنند-بدون نیروی مقاوم، حرکت همواره بدون آنکه‌کند شود ادامه خواهد داشت، وبا نیروی مقاوم،حرکت با افزایش زمان به‌صفر تنزل می‌کند.

دوحالت نخست، یعنی معادلات (۸) و (۹)،که به‌ترتیب استهلاکی شدیدواستهلاکی بحرانی نامیده می‌شوند،نمایشگرحرکاتی هستندکه درآنها جرمی‌که درآغاز تغییرمکان یافته است به موضع تعادل خود «کشیده می‌شود». برحسب شرایط اولیه، امکان داردکه در این دو حالت جرم یك‌بار ازموضع تعادل بگذرد، اما این یك «حرکت ارتعاشی» نیست. در شکل ۴.۳ طرح دو نمونه از این نوع حرکت آمده است. در مسائل ۱۵ و ۱۶ بازهم از این موضوع بحث خواهد شد.

حالت سوم، که آن را حرکت استهلاکی ضعیف می‌نامند، اغلب در دستگاههای مکانیکی روی می‌دهد، ونمایشگر«ارتعاش استهلاکی» است. برای توضیح، درمعادلهٔ (۱۰)



شکل ۴.۳ حرکتهای استهلاکی شدید یا بحرانی

قرار می‌دهیم $A=R\cos\delta$ و $B=R\sin\delta$ ، وخواهیم داشت

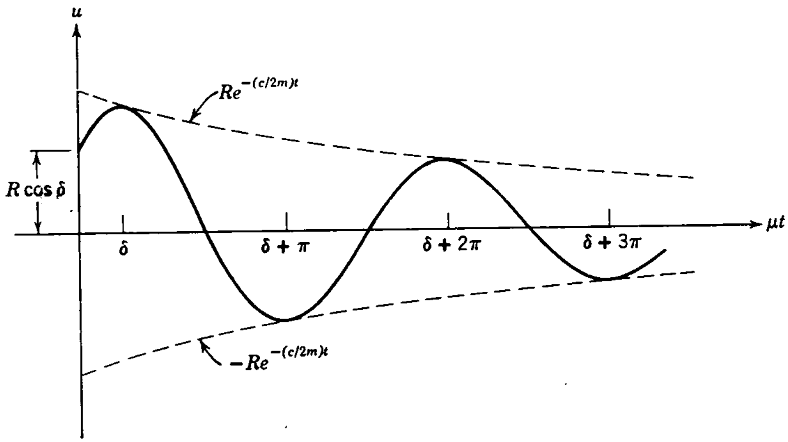
$$u=Re^{-(c/2m)t}\cos(\mu t-\delta) \qquad (11)$$

تغییر مکان u باید بین دوخم $u=\pm Re^{-(c/2m)t}$ واقع باشد، وبنا براین بدیك‌خم کسینوسی شباهت دارد که دامنهٔ آن کاهش می‌یابد. طرح یك نمونه درشکل ۵.۳ آمده است.

باوجود آنکه حرکت دقیقاً متناوب نیست، می‌توان یك شبه دورهٔ تناوب $T_d=2\pi/\mu$ را به‌عنوان زمان بین ماکزیممهای متوالی تغییرمکان تعریف کرد. رابطهٔ بین T_d و T جالب توجه است. داریم

$$T_d=\frac{2\pi}{\mu}=2\pi\left(\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}\right)^{-1/2}=2\pi\left(\frac{k}{m}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{c^2}{4km}\right)^{-1/2}$$

$$=T\left(1-\frac{c^2}{4km}\right)^{-1/2}$$



شکل ۵.۳ ارتعاش استهلاکی

بنابراین اگر $c^2/4km$ کوچك باشد،

$$T_d \cong T\left(1+\frac{c^2}{8km}\right)$$

در نتیجه هنگامی که نیروی مقاوم بسیار کوچك باشد (یعنی، هنگامی که کمیت مطلق $c^2/4km \ll 1$)، می‌توان در محاسبهٔ شبه دورهٔ تناوب ارتعاش از نیروی مقاوم صرف‌نظر کرد. در بسیاری از مسائل فیزیکی دقیقاً همین وضعیت وجود دارد. ازطرف دیگر، اگر بخواهیم حرکت دقیق جرم را برای تمام مدت بررسی کنیم، هرگز نمی‌توان از نیروی مقاوم هرقدر هم کوچك باشد صرف‌نظر کرد. در بند بعدی که به‌بحث پیرامون ارتعاشات تقویت شونده می‌پردازیم، نیروی مقاوم اهمیت بیشتری خواهد یافت.

مسائل

۱. یك وزنه ۲ پوندی طول یك فنر ۲ فوتی را ۶ اینچ افزایش می‌دهد. اگر وزنه را ۳ اینچ دیگر به‌طرف پایین‌کشیده ورهاسازیم، باصرف‌نظر کردن‌ازمقاومت هواحرکت حاصل را معین‌کنید. دامنه، فرکانس دوری، وتناوب حرکت را بیابید.

۲. یك جرم ۱۰۰ گرمی به‌یك فنر فولادی به‌طول طبیعی ۵۰ سانتی‌متر آویزان‌است. طول فنر دراثر این جرم ۵ سانتی‌متر افزایش یافته است. اگر سرعت اولیهٔ جرم برابر ۱۰ سانتی‌متر برثانیه به‌سوی پایین باشد، حرکت حاصل را معین‌کنید. از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.

۳. یك وزنهٔ ۳ پوندی طول یك فنر مارپیچی را ۳ اینچ افزایش می‌دهد. اگر با فشاردادن وزنه به‌سوی‌بالا، فنر را ۱ اینچ منقبض‌کرده وسپس وزنه را با سرعت ۲ فوت بر ثانیه به‌سوی پایین رها کنیم، حرکت حاصل را معین‌کنید. از مقاومت هوا صرف‌نظر شود. دامنه، فرکانس دوری، و تناوب حرکت را بیابید.

۴. نشان دهیدکه تناوب حرکت ارتعاشی بدون استهلاك جرمی‌که به‌یك فنر شاغولی آویزان است برابر $2\pi\sqrt{\Delta l/g}$ می‌باشد، که درآن Δl افزایش طول دراثر w وزن جرم مزبور است.

۵. درمسئلهٔ ۳ فرض‌کنیم مقاومت هوا یك نیروی‌استهلاکی برابر $0.03\,\dot{u}$ پونداعمال کند. شبه تناوب حرکت استهلاکی حاصل را باتناوب طبیعی حرکت بدون استهلاك مقایسه کنید. تغییر تناوب چه درصدی ازتناوب طبیعی است؟

۶. درمسئلهٔ ۵، ضریب استهلاك باید چقدر باشد، تاموجب ۵۰ درصد تغییردرتناوب حرکت گردد؟

۷. نشان دهیدکه $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ رامی‌توان به‌صورت $r\sin(\omega_0 t-\theta)$ نوشت. r و θ را برحسب A و B معین‌کنید. اگر $R\cos(\omega_0 t-\delta) = r\sin(\omega_0 t-\theta)$، رابطهٔ بین r، R، θ و δ چیست؟

۸. جواب معادلهٔ دیفرانسیل $m\ddot{u}+ku=0$ را که درشرایط اولیهٔ زیرصدق‌می‌کند بیابید. جواب خود را به‌صورت $R\cos(\omega_0 t-\delta)$ بیان کنید.

(الف) $u(0)=u_0\,,\quad \dot{u}(0)=0$

(ب) $u(0)=0\,,\quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0$

(ج) $u(0)=u_0\,,\quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0$

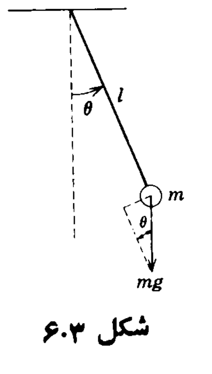
۹. تناوب طبیعی نوسان آونگی به‌طول l راکه درشکل ۶.۳ نشان داده شده است بیابید. از مقاومت هوا و وزن نخ درمقایسه باوزن جرم مزبور صرف‌نظر کنید. θ را به‌قدر کافی کوچك فرض‌کنید به‌طوری‌که $\sin\theta\simeq\theta$.
راهنمایی: قانون نیوتن را برای مؤلفهٔ مماسی حرکت بنویسید.

۱۰. جسمی مکعبی شکل و همگن به‌ضلع l و چگالی حجمی ρ در مایعی به‌چگالی حجمی $\hat{\rho}$ شناور است. اگر جسم را اندکی درمایع فروبرده ورهاسازیم، درامتداد شاغولی به‌نوسان درمی‌آید. با فرض آنکه بتوان از استهلاك ناشی از غلظت مایع و مقاومت هوا صرف‌نظر کرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت وتناوب آن را بیابید.

۱۱. افزایش طول یك فنر مارپیچی براثر یك جرم ۲۰ گرمی برابر ۵ سانتی‌متر است. اگر فنر را به‌یك داشپوت روغنی با ضریب مقاومت ۴۰۰ دین ثانیه برسانتی‌متر، متصل کنیم، وجرم را ۲ سانتی‌متر دیگرکشیده ورها سازیم، حرکت حاصل را معین‌کنید.

۱۲. افزایش طول یك فنر براثر وزنهٔ ۱۶ پوندی برابر ۳ اینچ است. وزنه را به‌یك دستگاه داشپوت باضریب مقاومت ۲ پوند ثانیه برفوت متصل می‌کنیم. مطلوب است تعیین حرکت حاصل، در صورتی‌که وزنه را از موضع تعادل با سرعت ۳ اینچ بر ثانیه به‌سوی پایین رهاکنیم.

۱۳. یك وزنهٔ ۸ پوندی به‌یك فنر فولادی به‌طول ۱۵ اینچ آویزان است. افزایش طول فنر براثر وزنه برابر ۱/۸ فوت است. اگر وزنه را به‌یك داشپوت روغنی باضریب مقاومت c نیز متصل‌کنیم، مقادیر c را طوری تعیین‌کنیدکه به‌ازای آنها حرکت، استهلاکی



شکل ۶.۳

شدید، استهلاکی بحرانی، واستهلاکی ضعیف باشد. واحدهای c را مشخص کنید.

۱۴. جوابی ازمعادلهٔ دیفرانسیل $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$ را درحالت $c^2-4km<0$ که درشرایط اولیهٔ زیر صدق می‌کند بیابید. جواب خودرا به‌صورت $Re^{-(c/2m)t}\cos(\mu t-\delta)$ بیان کنید.

$$u(0)=u_0\,,\quad \dot{u}(0)=0 \qquad \text{(الف)}$$

$$u(0)=0\,,\quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0 \qquad \text{(ب)}$$

$$u(0)=u_0\,,\quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0 \qquad \text{(ج)}$$

۱۵. نشان دهیدکه اگر ضریب مقاومت c در معادلهٔ $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$ طوری باشدکه حرکت استهلاکی شدید یا بحرانی باشد، آنگاه شرایط اولیه هرچه باشد، جرم می‌تواند حداکثر یك بارازموضع صفر تغییر مکان بگذرد.

راهنمایی: همهٔ مقادیر ممکن t را به‌طوری‌که $u=0$، بیابید.

۱۶. برای حالت استهلاکی بحرانی، جواب عمومی معادلهٔ (۶) راکه در شرایط اولیهٔ $u(0)=u_0$، $\dot{u}(0)=\dot{u}_0$ صدق می‌کند بیابید. اگر $\dot{u}_0=0$، نشان دهیدکه وقتی $t\to\infty$ داریم $u\to 0$، اما به‌ازای هرمقدار متناهی t خواهیم داشت $u\neq 0$. فرض کنیم u_0 مثبت باشد، برای $\dot{u}_0$ شرطی تعیین کنیدکه موجب شود جرم پس از رهاشدن از موضع صفر تغییرمکان بگذرد.

*۱۷. برای نوسان استهلاکی که بامعادلهٔ (۱۱) داده شده‌است، زمان بین‌ماکزیممهای متوالی برابر است با $T_d=2\pi/\mu$. نسبت تغییرمکان دوماکزیمم متوالی (متناظر به t و $t+T_d$) با $e^{(c/2m)T_d}$ معین می‌شود. بدین‌سان تغییرمکانهای متوالی متناظر به‌فواصل زمانی T_d تشکیل یك تصاعد هندسی با قدر نسبت $e^{(c/2m)T_d}$ می‌دهند. لگاریتم طبیعی این نسبت راکه با $\Delta=(c/2m)T_d=(\pi c/m\mu)$ نشان داده می‌شود، کاهش لگاریتمی می‌نامند. چون m، μ و Δ مقادیری هستندکه می‌توان به‌آسانی اندازه‌گیری کرد، این معادله روش عملی مناسبی برای محاسبهٔ ضریب مقاومت دستگاه مکانیکی فراهم می‌سازد. به‌ویژه، در مورد حرکت ارتعاشی جرم دریك مایع غلیظ، ضریب مقاومت به غلظت مایع بستگی دارد؛ نوع این رابطه برای اشکال هندسی ساده معلوم است، و با استفاده از رابطهٔ بالا می‌توان به‌طور تجربی غلظت را معین کرد. این یکی از دقیقترین روشهای تعیین غلظت گاز در فشارهای بالاست.

(الف) درمسئلهٔ ۱۲، کاهش لگاریتمی را بیابید.

(ب) اگر درمسئلهٔ ۱۳ اندازهٔ کاهش لگاریتمی برابر ۳، وثانیه $T_d=0.3$ باشد، ضریب مقاومت c را بیابید.

۲.۷.۳ ارتعاشات تقویت شونده

اکنون حالتی راکه درآن یك نیروی خارجی متناوب، مانند $F_0\cos\omega t$، به‌دستگاه فنر-جرم

وارد می‌شود درنظر می‌گیریم. دراین حالت معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F_{\circ}\cos\omega t \qquad (۱)$$

نخست فرض‌کنیم که نیروی مقاومی وجود ندارد؛ آنگاه معادلهٔ (۱) به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$m\ddot{u}+ku=F_{\circ}\cos\omega t \qquad (۲)$$

هنگامی که $\omega_{\circ}=\sqrt{k/m}\neq\omega$ ، جواب عمومی معادلهٔ (۲) چنین است

$$u=c_{۱}\cos\omega_{\circ}t+c_{۲}\sin\omega_{\circ}t+\frac{F_{\circ}}{m(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})}\cos\omega t \qquad (۳)$$

ثابتهای $c_{۱}$ و $c_{۲}$ به‌وسیلهٔ شرایط اولیه تعیین می‌شوند. حرکت حاصل، عموماً، مجموع دو حرکت متناوب با فرکانسهای ($\omega_{\circ}$ و ω) و دامنه‌های مختلف است. دراینجا دومثال رامورد توجه قرار می‌دهیم.

ضربان. فرض‌کنیم کــه جرم در آغاز ساکن باشد، یعنی، $u(\circ)=\circ$ ، $\dot{u}(\circ)=\circ$. دراین صورت ثابتهای $c_{۱}$ و $c_{۲}$ درمعادلهٔ (۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$c_{۱}=\frac{-F_{\circ}}{m(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})},\quad c_{۲}=\circ \qquad (۴)$$

وجواب معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$u=\frac{F_{\circ}}{m(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})}(\cos\omega t-\cos\omega_{\circ}t) \qquad (۵)$$

این عبارت مجموع دوتابع متناوب با تناوبهای مختلف و دامنهٔ یکسان است. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

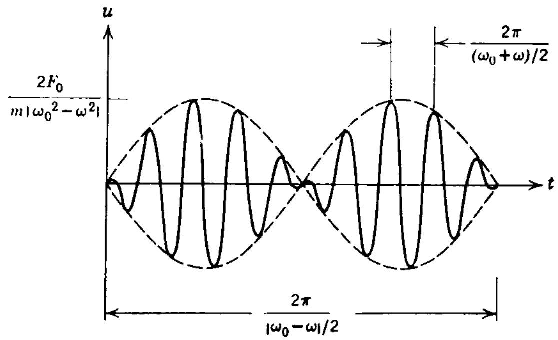
$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

که در آن $A=(\omega_{\circ}+\omega)t/۲$ و $B=(\omega_{\circ}-\omega)t/۲$ ، می‌توان رابطهٔ (۵) را به‌صورت زیر نوشت

$$u=\frac{۲F_{\circ}}{m(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})}\sin\frac{(\omega_{\circ}-\omega)t}{۲}\sin\frac{(\omega_{\circ}+\omega)t}{۲} \qquad (۶)$$

اگر $|\omega-\omega_{\circ}|$ کوچك باشد، آنگاه $|\omega_{\circ}-\omega|\ll\omega_{\circ}+\omega$ ، ودرنتیجه $\sin(\omega_{\circ}+\omega)t/۲$ تابعی است که درمقایسه با $\sin(\omega_{\circ}-\omega)t/۲$ دارای نوسانهای سریعتری است. بنابراین، حرکت نوسانی سریع بافرکانس دوری $(\omega_{\circ}+\omega)/۲$ می‌باشد، ودامنهٔ آن دارای تغییرات بطیئی سینوسی است. این‌نوع حرکت، که دامنهٔ آن دارای تغییرات تناوبی‌است، نمایانگر پدیده‌ای است که ضربان نامیده می‌شود. درآکوستیك هنگامی که دو دیاپازون بافرکانسهای

تقریباً برابر همزمان به‌صدا درآیند، چنین پدیده‌ای به‌وجود می‌آید. دراین حالت تغییرات تناوبی دامنه را می‌توان بـه‌طور ساده با گوش تشخیص داد. در الکترونیك تغییرات دامنه برحسب‌زمان را مدولاسیون دامنه[1] می‌نامند. طرح اجمالی تابع $u=\phi(t)$ مربوط به‌رابطهٔ (۶) درشکل ۷.۳ ترسیم شده است.

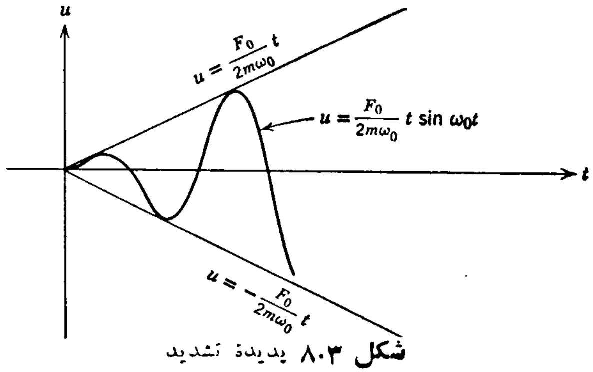


شکل ۷.۳ پدیدهٔ ضربان

تشدید. بـه‌عنوان مثال دیگر، حالت $\omega=\omega_0$ را درنظر می‌گیریم؛ درایـن حالت، تناوب تابع تقویت بـا تناوب طبیعی دستگاه برابر است. در این صورت جملـهٔ ناهمگن $F_0\cos\omega t$ یك جواب معادلـهٔ همگن متناظر است. در ایـن حالت، جواب معادلـهٔ (۲) عبارت است از

$$u=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \qquad (۷)$$

به‌علت وجود جملهٔ $t\sin\omega_0 t$ دررابطهٔ (۷)، روشن است کـه c_1 و c_2 هرچه باشند، دامنهٔ حرکت وقتی $t\to\infty$ نامحدود خواهد شد (شکل ۸.۳ را ببینید). این پدیده بـه تشدید



شکل ۸.۳ پدیدهٔ تشدید

1. amplitude modulation

موسوم است. اما، درتحقق عملی، فنر محتملاً می‌شکند. البته، به محض آنکه u بـزرگ شود، این نظریه دیگر معتبر نخواهـد بود، زیرا هنگامی‌که از یك رابطهٔ خطی برای تعیین ثابت فنر استفاده کردیم، فرض این بودکه u کوچك است. اگر دستگاه شامل نیروی مقاوم باشد، حرکت محدود باقی می‌ماند؛ اما، دراین حالت نیزامکان داردکه به‌ازای‌تابع ورودی $F_0 \cos \omega t$ ، هنگامی‌که نیروی مقاوم‌کوچك و ω نزدیك به ω_0 باشد، دامنه بسیار بزرگ شود.

ارتعاشات تقویت‌شوندهٔ استهلاکی. حـرکت دستگاه فنر-جرم بـا استهلاك وتابع تقویت $F_0 \cos \omega t$ را می‌توان مستقیماً تعیین‌کـرد. گرچه محاسبات نسبتاً مفصل‌اند، امـا دشوار نیستند. جواب معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$u = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \qquad (۸)$$

کـه درآن δ از $\cos\delta = m(\omega_0^2 - \omega^2)/\Delta$ و $\sin\delta = c\omega/\Delta$ بـا درنظـرگـرفتن $\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}$ به دست می‌آید. دراینجا r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ وابسته به معادلهٔ (۱) می‌باشند. چنانکه دربند آخر دیدیم وقتی $t \to \infty$ هردوتابع $e^{r_1 t}$ و $e^{r_2 t}$ به صفر می‌گرایند. بدین‌سان وقتی $t \to \infty$ داریم

$$u \to u_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \qquad (۹)$$

بـدین‌علت $u_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ را جواب گذرا و $u_p(t)$ را جواب حـالت دائمی می‌نامند، به‌طوراجمال می‌توان گفت‌که جواب گذرا موجب می‌شود تا شرایط اولیه برقرار باشند، با افزایش زمان انرژی‌که با تغییرمکان وسرعت اولیه به دستگاه داده شده‌است در اثرنیروی استهلاك ازبین می‌رود، وسپس حرکت نمایشگرجواب دستگاه به‌نیروی خارجی $F(t)$ خواهد بود. بدون استهلاك (که طبعاً، درهر دستگاه فیزیکی غیرممکن است) اثـر شرایط اولیه برای همیشه پا برجا می‌ماند.

توجه شودکه $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$ هیچگاه، حتی به‌ازای $\omega = \omega_0$ صفرنمی‌شود، بنابراین وجود نیروی‌استهلاك حرکت موجب می‌شودکه همواره دامنهٔ حرکت محدود باقی بماند. به‌ازای مقادیرثابت m ، c و k دامنهٔ جواب حالت دائمی هنگامی ماکزیمم‌است‌که $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$ مینیمم باشد؛ واین متناظر است با انتخاب ω^2 به‌صورت

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2 \qquad (۱۰)$$

برای طرح یك دستگاه فنر-جرم[1] به منظورکشف نیروهای متناوب دریك همسایگی

---

۱. معمولاً چنین ابزارهایی را، ابزارهای لرزه می‌نامند، زیرا اصولاً با لرزه‌نگارکه برای کشف حرکات سطح زمین به‌کار می‌رود مشابه‌اند. حرکت تناوبی پایه‌ای‌که فنر به‌آن نصب شده است با مسئله‌ای‌که درآن یك نیروی تناوبی برجرم مزبور اثر می‌کند معادل است.

کوچك ω باید k، c و m را طوری انتخاب کنیم که معادلهٔ (۱۰) به طور تحقیقی یا تقریبی برقرار باشد. بدین‌طریق پاسخ دستگاه به‌این‌گونه نیروها ماکزیمم خواهد بود و کشف آنها را آسانتر می‌کند. درمسائل مربوط به‌کشف علایم الکتریکی درشبکه‌های الکتریکی نیز وضعیت مشابهی رخ می‌دهد.

مسائل

۰۱ عبارت $\cos 9t - \cos 7t$ را به‌صورت $A \sin \alpha t \sin \beta t$ بیان کنید.

۰۲ عبارت $\sin 7t - \sin 6t$ را به صورت $A \sin \alpha t \cos \beta t$ بیان کنید.

۰۳ یك فنرمارپیچی دراثر وزنهٔ ۴ پوندی ۱/۸ فوت کشیده شده‌است. فنر تحت‌تأثیر یك نیروی خارجی $2\cos 3t$ پوند قرار دارد. اگر وزنه را از وضعیت تعادل ۲ اینچ تغییرمکان داده و سپس رها کنیم، حرکت حاصل را معین کنید، ازنیروی استهلاك صرف‌نظر شود. اگر نیروی خارجی برابر $4\sin \omega t$ پوند باشد، به‌ازای چه مقدار ω تشدید به‌وجود می‌آید.

۰۴ اگریك دستگاه فنر-جرم با وزن ۶ پوند وضریب ثابت فنر ۱ پوند براینچ ناگهان در $t=0$ با نیروی خارجی $4\cos 7t$ پوند وبدون استهلاك به حرکت درآید، حرکت حاصل را تعیین کرده ونمودار تغییرمکان برحسب زمان t را رسم کنید.

۰۵ جواب معادلهٔ دیفرانسیل $m\ddot{u}+ku=F_0 \cos \omega t$، $\omega \neq \sqrt{k/m}$ را برای هریك ازشرایط اولیهٔ زیر بیابید:

(الف) $u(0)=u_0, \quad \dot{u}(0)=0$

(ب) $u(0)=0, \quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0$

(ج) $u(0)=u_0, \quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0$

۰۶ تعمیمی ازپدیدهٔ ضربان را درحرکتی‌که مجموع دوتابع متناوب با دامنه‌های مختلف $A\cos \omega t$ و $B\cos \omega_0 t$ باشد، می‌توان مشاهده‌کرد. نشان دهیدکه این‌نوع حرکت را می‌توان به‌صورت

$$R(t)\cos\left[\frac{\omega_0+\omega}{2}t-\delta(t)\right]$$

بیان‌کرد. اگر $|A-B| \ll 1$ و $|\omega-\omega_0| \ll 1$، نشان دهیدکه R تابعی با تغییرات‌کند است. تغییرات زاویهٔ فاز δ را برحسب زمان t، مدولاسیون فرکانسی می‌نامند.

۰۷* مطلوب است تعیین حرکت $u=\phi(t)$ یك جرم m که به فنری با ثابت k آویزان است ونیروی

$$F(t)=F_\circ\begin{cases} t & \circ\leqslant t\leqslant \pi \\ ۲\pi-t\,, & \pi< t\leqslant ۲\pi \\ \circ & ۲\pi<t\end{cases}$$

برآن اثر می‌کند. برای سهولت فرض شود ۱ $=\omega_\circ^۲=k/m$. ازمقاومت هوا صرف‌نظر کرده وفرض می‌کنیم که جرم درآغاز ساکن باشد.

«راهنمایی: هرفاصلهٔ زمانی را جداگانـه بررسی‌کنید، وجوابهای متناظر به فواصل مختلف را با استفاده ازاین شرط که هر ϕ تابع پیوسته‌ای از t است با هم پیوند دهید.

۸. افزایش طول یك فنر مارپیچی دراثر وزنهٔ ۸ پوندی، برابر ۶ اینچ است. جرم به‌یك دستگاه داشپوت با ثابت استهلاك ۲۵ر∘ پوند ثانیه‌برفوت وصل شده‌است. اگر جرم تحت‌تأثیر یك نیروی خارجی به‌صورت $۴\cos ۲t$ پوند واقع باشد، جواب دایمی دستگاه را تعیین‌کنید. m را طوری انتخاب کنیدکه جواب دستگاه به‌این نیروی خارجی ماکزیمم باشد.

۹. جواب معـادلـهٔ دیفـرانسیل $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F_\circ\sin\omega t$ را بـا فـرض $c^۲-۴km<\circ$ برای هریك ازشرایط اولیهٔ زیر بیابید.

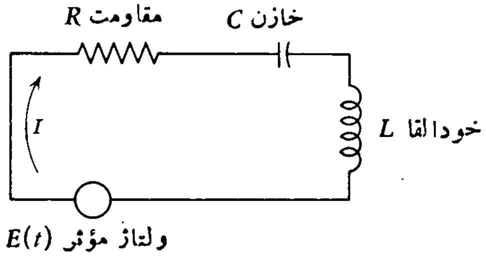
(الف) $u(\circ)=u_\circ\,,\quad \dot{u}(\circ)=\circ$

(ب) $u(\circ)=\circ\,,\quad \dot{u}(\circ)=\dot{u}_\circ$

(ج) $u(\circ)=u_\circ\,,\quad \dot{u}(\circ)=\dot{u}_\circ$

۸.۳ شبکه‌های الکتریکی.

به عنوان دومین مثال برای کاربرد نظریهٔ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بـا ضرایب ثابت، به‌بررسی شدت جریان دریك مدار ساده به‌صورت سری، می‌پردازیم. مدار را در شکل ۹.۳ نشان داده‌ایم. شدت جریان $I=\phi(t)$ (برحسب آمپر) تابعی از زمان t است. مقاومت R (اهم)، ظرفیت‌خازن C (فاراد)، وضریب‌القای L (هنری) همه مثبت می‌باشند، و عموماً ممکن‌است تابع‌زمان t وشدت‌جریان I باشند. در دستهٔ وسیعی‌ازکاربردها می‌توان‌ازاین



شکل ۹.۳

بستگی صرف‌نظر کرد، وما فرض می‌کنیم که R ، C و L ثابتهای معلومی باشند. ولتاژ مؤثر E (ولت) تابعی‌اززمان است واغلب به‌صورت $E_{\circ}\cos\omega t$ می‌باشد. کمیت فیزیکی‌دیگری که دربحث وارد می‌شود عبارت است از بارکل‌خازن $Q=\psi(t)$ (کولن) درزمان t. بستگی بار Q وشدت جریان I با رابطهٔ $I=dQ/dt$ مشخص می‌شود.

شدت‌جریان درمدار مزبور مطابق قانون دوم کیرشهف[1] صورت می‌گیرد: دریک‌مدار بسته، ولتاژ مؤثر باмجموع افتهای ولتاژ دربقیهٔ مدار برابراست.

بنا برقوانین مقدماتی الکتریسیته می‌دانیم که

افت ولتاژ بین دوسرمقاومت $=IR$

افت ولتاژ بین دوسرخازن $=\frac{1}{C}Q$

افت ولتاژ بین دوسرسیم پیچ $=L\frac{dI}{dt}$

بنابراین

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=E(t) \tag{۱}$$

واحدها به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که

$$\text{۱ ولت} = \text{۱ اهم} \times \text{۱ آمپر} = \frac{\text{۱ کولن}}{\text{۱ فاراد}} = \text{۱ هنری} \times \frac{\text{۱ آمپر}}{\text{۱ ثانیه}}$$

چون $I=dQ/dt$، می‌توان‌باجایگذاری I درمعادله (۱)، برای Q معادلهٔ ناهمگن خطی مرتبهٔ دوم زیررا به دست‌آورد:

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E(t) \tag{۲}$$

که درآن نقطه‌ها نمایشگر مشتق‌گیری نسبت به t می‌باشند. شرایط اولیه‌که باید مثلا در زمان $t=\circ$ مشخص گردند، عبارتند از

$$Q(\circ)=Q_{\circ},\quad \dot{Q}(\circ)=I(\circ)=I_{\circ} \tag{۳}$$

بدین‌سان باید باراولیهٔ خازن وشدت جریان اولیه درمدار را بدانیم.

همچنین می‌توان بامشتق‌گیری ازمعادلهٔ (۱) نسبت به t، وجایگزینی dQ/dt،معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی برای جریان I به دست‌آورد. بدین‌سان

---

۱. گوستاو کیرشهف (Gustav Kirchhoff)، (۱۸۲۴–۱۸۸۷) فیزیکدان‌آلمانی است‌که به سبب پژوهشهایش درالکتریسیته(قوانینی‌که به نام اوست) وتحقیقاتش درطیف‌نگاری مشهور است.

$$L\ddot{I}+R\dot{I}+\frac{1}{C}I=\dot{E}(t) \tag{۴}$$

شرایط اولیه‌ای که باید مشخص کرد عبارتند از

$$I(0)=I_0, \quad \dot{I}(0)=\dot{I}_0 \tag{۵}$$

با توجه به معادلهٔ (۱) داریم

$$\dot{I}_0=\frac{1}{L}\left[E(0)-RI_0-\frac{1}{C}Q_0\right] \tag{۶}$$

بدین‌سان اگر $I(0)$ و $Q(0)$ را مشخص کنیم $\dot{I}_0$ معین خواهد شد. کمیتهای جریان و بار اولیه را می‌توان با دستگاههای فیزیکی اندازه‌گیری کرد، و بدین‌وسیله شرایط اولیهٔ (۳) متناظر به معادلهٔ (۲) یا شرایط اولیهٔ (۵) متناظر به معادلهٔ (۴) معین می‌گردد.

شباهت بین این مسئلهٔ مدار الکتریکی و مسئلهٔ ارتعاش مکانیکی که قبلا بحث شد، شایان توجه است. این نکته در جدول ۲.۳ به وضوح نشان داده شده است. با استفاده از شباهت بین دودستگاه می‌توان مسائل ارتعاشات مکانیکی را باساختن مدار الکتریکی متناظر و اندازه‌گیری بار Q حل کرد. این مطلب درزمینهٔ کامپیوترهای آنالوگ دارای نقش اساسی است.[۱]

جدول ۲.۳

دستگاه مکانیکی	مدار الکتریکی
$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F(t)$	$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E(t)$
تغییرمکان u	بار Q
سرعت $\dot{u}$	جریان $I=\dot{Q}$
جرم m	القاء L
استهلاك c	مقاومت R
ثابت فنر k	الاستانس $1/C$
نیروی مؤثر $F(t)$	ولتاژمؤثر $E(t)$

۱. بـه عنوان مقدمهٔ بسیار ساده‌ای بـر نظریـهٔ کامپیوترهای آنالوگ کتابترویت و راجرز (T.D.Truitt and A.E. Rogers) را ببینید.

واضح است که مسئلهٔ کلی مقدار اولیهٔ

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=g(t);\quad y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0 \tag{۷}$$

برای یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت، حداقل با دومسئلهٔ فیزیکی متناظر قرار می‌گیرد: حرکت یك‌جرم درارتباط با یك‌فنر مرتعش، وجریان الکتریسیته دریك مدارساده به‌صورت سری. درواقع، مسائل فیزیکی دیگر، ازقبیل نوسان پیچشی یك میله درارتباط با یك چرخ لنگر نیزبه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۷) می‌انجامند. این وضعیت مبین یکی‌از روابط اساسی بین ریاضیات وفیزیك می‌باشد: بسیاری ازمسائل فیزیکی، همین‌که به‌صورت‌ریاضی فرمول‌بندی شوند، یکسان می‌شوند. بدین‌سان جواب مسائل فیزیکی متعددی را می‌توان‌از حل تنها یك مسئلهٔ ریاضی باتعبیرمناسب علامتها به دست آورد.

اکنون معادلهٔ (۲) راکه درآن ولتاژ مؤثربه صورت یك تابع متناوب $E_0\cos\omega t$ باشد، درنظر می‌گیریم. درست همانند دستگاه جرم ـ فنرکه در بندهای ۱.۷.۳ و ۲.۷.۳ بررسی شد، می‌توان به بسط مفاهیم فرکانس طبیعی، استهلاك بحرانی، تشدید، ضربان، جواب گذرا، وجواب حالت دایمی درمورد مدارسری پرداخت. این موضوع در مثال و مسائل زیرآمده است.

مثال. رفتار جواب معادلهٔ (۲) را هنگامی‌که $t\to\infty$ و $E(t)=E_0\cos\omega t$، بافرض $R\neq 0$ بررسی‌کنید.

نخست، چون L،RوC مثبت‌اند، همهٔ جوابهای معادلهٔ همگن متناظر بـه معادلهٔ (۲) با $t\to\infty$ به‌صفرمی‌گرایند (بند۱.۷.۳ را ببینید). برای تعیین یك‌جواب خصوصی‌معادلهٔ

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E_0\cos\omega t \tag{۸}$$

ازروش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم. با جایگزینی

$$Q_p(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{۹}$$

دیده می‌شودکه A و B باید درمعادلات زیرصدق‌کنند

$$\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)A+\omega RB=E_0$$

$$-\omega RA+\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)B=0$$

با تعیین مقادیر A و B وقراردادن‌آنها درمعادلهٔ (۹) نتیجه می‌شود

$$Q_p(t)=\frac{E_0(1/C-L\omega^2)\cos\omega t+\omega RE_0\sin\omega t}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2R^2} \tag{۱۰}$$

معادلهٔ (۱۰) را می‌توان به‌صورت زیر نیزنوشت

واضح است که مسئلهٔ کلی مقدار اولیهٔ

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=g(t); \quad y(0)=y_0, \quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0 \tag{۷}$$

برای یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت، حداقل با دومسئلهٔ فیزیکی متناظر قرار می‌گیرد: حرکت یك‌جرم درارتباط با یك‌فنر مرتعش، وجریان الکتریسیته دریك مدارساده به‌صورت سری. درواقع، مسائل فیزیکی دیگر، ازقبیل نوسان پیچشی یك میله درارتباط با یك چرخ لنگر نیزبه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۷) می‌انجامند. این وضعیت مبین یکی‌از روابط اساسی بین ریاضیات وفیزیك می‌باشد: بسیاری ازمسائل فیزیکی، همین‌که به‌صورت‌ریاضی فرمول‌بندی شوند، یکسان می‌شوند. بدین‌سان جواب مسائل فیزیکی متعددی را می‌توان‌از حل تنها یك مسئلهٔ ریاضی باتعبیرمناسب علامتها به دست آورد.

اکنون معادلهٔ (۲) راکه درآن ولتاژ مؤثربه صورت یك تابع متناوب $E_0 \cos \omega t$ باشد، درنظر می‌گیریم. درست همانند دستگاه جرم ـ فنرکه در بندهای ۱.۷.۳ و ۲.۷.۳ بررسی شد، می‌توان به بسط مفاهیم فرکانس طبیعی، استهلاك بحرانی، تشدید، ضربان، جواب گذرا، وجواب حالت دایمی درمورد مدارسری پرداخت. این موضوع در مثال و مسائل زیر آمده است.

مثال. رفتار جواب معادلهٔ (۲) را هنگامی‌که $t \to \infty$ و $E(t)=E_0 \cos \omega t$، بافرض $R \neq 0$ بررسی کنید.

نخست، چون L،RوC مثبت‌اند، همهٔ جوابهای معادلهٔ همگن متناظر به معادلهٔ (۲) با $t \to \infty$ به‌صفرمی گرایند (بند۱.۷.۳ را ببینید). برای تعیین یك‌جواب خصوصی‌معادلهٔ

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E_0 \cos \omega t \tag{۸}$$

ازروش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم. با جایگزینی

$$Q_p(t)=A\cos \omega t+B\sin \omega t \tag{۹}$$

دیده می‌شودکه A و B باید درمعادلات زیرصدق کنند

$$\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)A+\omega RB=E_0$$

$$-\omega RA+\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)B=0$$

با تعیین مقادیر A و B وقراردادن‌آنها درمعادلهٔ (۹) نتیجه می‌شود

$$Q_p(t)=\frac{E_0(1/C-L\omega^2)\cos \omega t+\omega RE_0 \sin \omega t}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2 R^2} \tag{۱۰}$$

معادلهٔ (۱۰) را می‌توان به‌صورت زیر نیزنوشت

$$Q_p(t)=\frac{E_\circ \sin(\omega t+\delta)}{\sqrt{(۱/C-L\omega^۲)^۲+\omega^۲R^۲}} \qquad (۱۱)$$

کــه در آن δ از روابط $\sin\delta=(۱/C-L\omega^۲)/\Delta$ ، $\cos\delta=\omega R/\Delta$ و
$$\Delta=\sqrt{(۱/C-L\omega^۲)^۲+\omega^۲R^۲}$$
به دست می‌آید. چون $Q=Q_c(t)+Q_p(t)$ و وقتی‌کــه $t\to\infty$ داریم $Q_c(t)\to \circ$ ، درنتیجه وقتی‌که $t\to\infty$ خواهیم داشت $Q\to Q_p(t)$. بــه‌همین علت اغلب $Q_p(t)$ را جواب حالت دایمی معادلهٔ (۸) می‌نامند

هنگامی‌که بخواهیم جریان‌حالت دایمی مداررا معین‌کنیم،کافی است از $Q_p(t)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$I_p(t)=\frac{E_\circ \cos(\omega t+\delta)}{\sqrt{R^۲+[\omega L-۱/(\omega C)]^۲}}. \qquad (۱۲)$$

توجه شود کــه جــریان حالت دایمــی دارای همان فــرکانس ولتاژ مؤثر است. جــملهٔ $\omega L-۱/(\omega C)$ راکه درمعادلهٔ (۱۲) آمده استراکتانس[1] مدار وعبارت

$$\sqrt{R^۲+[\omega L-۱/(\omega C)]^۲}$$

را امپدانس[2] مدار می‌نامند.

مسائل

۱. اگر دریك مدارسری ساده مقاومت نباشد، نشان دهیدکه در صورت عدم ولتاژ موثر،بار Q روی‌خازن‌نسبت‌به‌زمان متناوب‌است‌وفرکانس آن برابراست‌با $\omega_\circ=\sqrt{۱/LC}$. این مقداررا فرکانس طبیعی مدار می‌نامند.

۲. نشان دهیدکه اگــر در مدار مقاومت وجــود نداشته و ولتاژ مؤثر بــه صورت $E_\circ \cos\omega t$ باشد،آنگاه بار روی خازن هنگامی‌که $\omega=\sqrt{۱/LC}$ باشدوقتی‌که $t\to\infty$ نامحدود خواهدشد. این پدیدهٔ تشدید است. نشان‌دهیدکه ω هرچه باشد بارهمواره‌محدود باقی می‌ماند، به‌شرط آنکه درمدار مقاومتی ولوهرقدرکوچك وجود داشته باشد.

۳. نشان دهیدکه جواب $L\ddot{I}+R\dot{I}+(۱/C)I=\circ$ به‌صورت زیراست

$$I=Ae^{r_۱t}+Be^{r_۲t}, \qquad \text{به ازای } R^۲-۴L/C>\circ$$
$$=(A+Bt)\,e^{\lambda t}, \qquad \text{به ازای } R^۲-۴L/C=\circ$$
$$=e^{\lambda t}(A\cos\mu t+B\sin\mu t), \qquad \text{به ازای } R^۲-۴L/C<\circ$$

مدارمتناظربه این سه‌حالت را به‌ترتیب استهلاکی شدید، بحرانی، وضعیف می‌نامند.

---

1. reactance 2. impedance

۴. فرض کنیم مداری به‌صورت سری شامل یك خودالقا، یك مقاومت و یك خازن، باز باشد، و بار اولیهٔ خازن برابر $Q_0 = 10^{-6}$ باشد. تغییرات بار و جریان را پس از بسته شدن مدار در هر یك از حالتهای زیر بیابید

(الف) $L=0.2,\quad C=10^{-5},\quad R=3\times 10^{2}$

(ب) $L=1\quad,\quad C=4\times 10^{-6},\quad R=10^{3}$

(ج) $L=2\quad,\quad C=10^{-5},\quad R=4\times 10^{2}$

۵. اگر $L=0.2$ و $C=0.8\times 10^{-6}$ فاراد باشد، مقاومت R را طوری تعیین کنید که مدار استهلاکی بحرانی باشد.

۶. مداری به‌صورت سری شامل یك خازن 0.25×10^{-6} فاراد، و یك مقاومت 5×10^{3} اهم، و یك خودالقای ۱ هنری است. بار اولیهٔ خازن صفر است. اگر یك باطری ۱۲ ولتی را در مدار قرارداده و در $t=0$ مدار را ببندیم، بار خازن را در $t=0.001$ و $t=0.01$ ثانیه، و بار حالت دایمی را بیابید.

۷. مطلوب است تعیین جریان حالت دایمی مداری به صورت سری در صورتی که ولتاژ مؤثر، $E=110\cos 120\pi t$ ولت، و $L=10$ هنری، $R=3\times 10^{3}$ اهم، و $C=0.25\times 10^{-5}$ فاراد باشد.

۸. در مداری به‌صورت سری با مقادیر داده شدهٔ L، R و C و ولتاژ مؤثر $E_0\cos\omega t$، به ازای چه‌مقدار ω جریان حالت دایمی ماکزیمم خواهد بود؟

*۹. اغلب در مسائل مهندسی برق مناسبتر است که $E_0\cos\omega t$ را بـه عنوان بخش حقیقی $E_0 e^{j\omega t}$ درنظر بگیرند ($j=\sqrt{-1}$ نماد متداولی در مهندسی برق است). در ایـن صورت به‌جای معادلهٔ (۸) مذکور در متن باید معادلهٔ

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E_0 e^{j\omega t} \qquad \text{(یك)}$$

را درنظر گرفت، با این قرارداد که پس از پایان محاسبات بخش حقیقی جواب را اختیار کنیم.[1] فرض کنیم که $R\neq 0$.

---

۱. استفاده از نماد مختلط بـرای مسائل مـدار الکتریکـی به وسیلهٔ شارل پ. اشتاین متز (Charles P. Steinmetz)، (۱۸۶۵–۱۹۲۳) ریاضیدان ومخترع، پایـه گذاری شد. استفاده از این نماد سمبولیك در بررسی پدیده‌های جریان متناوب موجب پیشرفت سریع در گسترش تجاری وسایل الکتریکی با جریان متناوب گردید. وی همچنین کاشف قانون هیسترزیس می‌باشد ودارای تحقیقات مهمی در بررسی پدیدهٔ آذرخش است. درجوانی یك سوسیالیست پرحرارت بود ودر ۱۸۸۸ درحالی که مورد پیگرد پلیس بود بدون دریافت درجهٔ دکترای خود آلمان را ترك کرد. در ۱۸۸۹ به ایالات متحده وارد شد و به استخدام شرکتی درآمد که امروز جنرال الکتریك نام دارد.

(الف) نشان دهیدکه جواب حالت دایمی معادلهٔ (یك) عبارت است از

$$Q=\frac{E_0}{j\omega R-\omega^2 L+1/C}e^{j\omega t}$$

راهنمایی: قراردهید $Q=Ae^{j\omega t}$.

(ب) بدین‌سان نشان‌دهیدکه جریان حالت دایمی عبارت است از

$$I=\frac{E_0}{R+j(\omega L-1/\omega C)}e^{j\omega t}$$

(ج) با استفاده از رابطهٔ $\alpha+j\beta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{j\gamma}$ که‌درآن $\gamma=\tan^{-1}(\beta/\alpha)$، نشان دهیدکه

$$I=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}e^{j(\omega t-\delta)}$$

که درآن $\delta=\tan^{-1}[(\omega L-1/\omega C)/R]$. بالاخره، نشان دهید که بخش حقیقی این عبارت با آنچه درمثال همین‌بند به‌دست آمده متحد است.

(د) اگر ولتاژ مؤثر، $E(t)=E_0\sin\omega t$ باشد،جریان حالت دایمی چه‌خواهدبود؟

(ه) پارامتر مختلط $Z=R+j(\omega L-1/\omega C)$ را امپدانس مختلط[1] مـی‌نامند. معکوس Z را ادمیتانس[2] وبخش‌های حقیقی وموهومی $1/Z$ را به ترتیب کندوکتانس[3] و سوسپتانس[4] می‌نامند. مطلوب است تعیین ادمیتانس،کندوکتانس، و سوسپتانس.

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.

درارتباط باکامپیوترهای آنالوگ دوکتاب زیر معرفی می‌شوند:

Truitt, T. D. and Rogers, A. E., *Basics of Analog Computers*, Rider, NewYork, 1960.

Jenners, Roger R., *Analog Computation and Simulation: Laboratory Approach.*, Allyn and Bacon, Boston, 1965.

دربارهٔ ارتعاشات مکانیکی ومدارهای الکتریکی کتابهای بسیاری وجود دارد. کتاب زیر

1. complex impedance 2. admittance 3. conductance
4. susceptance

دربارهٔ ارتعاشات مکانیکی کلاسیك است:

Den Hartog, J. P., *Mechanica. .rations,* McGraw-Hill, New York, 1947.

دو کتاب زیر جدیدتر و درسطح متوسط هستند.

Thomson, W.T., *Theory of Vibrations with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1972.

Vierck, R. K., *Vibration Analysis,* International, Scranton, Pa., 1967.

کتابی مقدماتی درموضوع مدارهای الکتریکی در زیر معرفی می‌شود:

Smith, J. R. J., *Circuits, Devices, and Systems,* Second Edition, Wiley, New York, 1976.

۴

سریهای جواب معادلات خطی مرتبهٔ دوم

۱.۴ مقدمه. مروری برسریهای توانی

درفصل ۳ روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی‌مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت را شرح‌دادیم. اکنون به‌بررسی روشهای حل معادلات خطی مرتبهٔ دوم که ضرایب آنها توابعی از متغیر مستقل است می‌پردازیم. برای این منظورکافی است به بررسی معادلهٔ همگن

$$P(x)\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=۰ \qquad (۱)$$

بپردازیم، زیرا دراینجا نیز برای معادلهٔ ناهمگن متناظرمی‌توان ازهمان روش‌استفاده‌کرد.

طبقه وسیعی ازمسائل فیزیك ریاضی به‌معادلاتی به‌صورت (۱) می‌انجامدکه دارای ضرایب چند جمله‌ای می‌باشند، به‌عنوان مثال، معادلهٔ بسل

$$x^{۲}y''+xy'+(x^{۲}-\nu^{۲})y=۰$$

که درآن ν مقدارثابتی است، ومعادلهٔ لژاندر

$$(۱-x^{۲})y''-۲xy'+\alpha(\alpha+۱)y=۰$$

که درآن α مقدارثابتی است. به‌همین علت، ونیز برای ساده‌کردن محاسبات جبری‌نخست به‌بررسی حالتی می‌پردازیم‌که درآن توابع P، Q و R چند جمله‌ای‌می‌باشند. اما چنانکه خواهیم دید، روش حل مزبور را می‌توان در مورد طبقه‌ای از توابع اعم از چند جمله‌ایها به‌کار گرفت.

دراینجا P ، Q و R را چندجمله‌ای فرض می‌کنیم، وبعد به‌بررسی حالتهای‌عمومیتر می‌پردازیم. همچنین فرض می‌کنیم که می‌خواهیم معادلهٔ (۱) را درهمسایگی یك نقطهٔ $x_{۰}$

وجود داشته باشد. روشن است که سری به ازای $x = x_\circ$ همگراست. امکان دارد سری به‌ازای همهٔ مقادیر x همگرا باشد، یا آنکه به‌ازای برخی از مقادیر x همگرا و به‌ازای مقادیر دیگر واگرا باشد.

۲. سری $\sum\limits_{n=\circ}^{\infty} a_n(x-x_\circ)^n$ را هنگامی در یك نقطهٔ x همگرای مطلق می‌گویند که سری

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} |a_n(x-x_\circ)^n|$$

همگرا باشد. می‌توان نشان داد که اگر یك سری همگرای مطلق باشد، دراین صورت سری مزبور همگرا نیز هست، اما، صحت عکس این مطلب ضروری نیست.

۳. یکی از مفیدترین آزمونها برای همگرایی مطلق یك سری توانی، آزمون نسبت است. اگر به‌ازای مقدار مشخصی از x داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_\circ)^{n+1}}{a_n(x-x_\circ)^n}\right| = |x-x_\circ| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

دراین صورت سری توانی مزبور به‌ازای مقداری از x به‌طوری‌که $l < 1$ همگرای مطلق است، واگر $l > 1$، واگراست. به‌ازای $l = 1$ این‌آزمون نتیجه‌ای به‌دست نمی‌دهد.

مثال ۱. به‌ازای چه‌مقادیری از x سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

همگراست؟

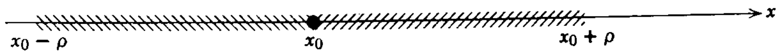
برای این منظور ازآزمون نسبت استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}\right| = |x-2| \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|$$

بنا برگزارهٔ ۳ به‌ازای $|x-2| < 1$ یعنی $1 < x < 3$ سری همگرای مطلق است، و به‌ازای $|x-2| > 1$ سری واگراست. مقادیر x متناظر به $|x-2| = 1$ عبارتند از $x = 1$ و $x = 3$. سری مزبور به‌ازای هریك ازاین مقادیر x واگراست، زیرا جمله nام آن وقتی $n \to \infty$ به‌صفر نمی‌گراید.

۴. اگر سری توانی $\sum\limits_{n=\circ}^{\infty} a_n(x-x_\circ)^n$ در $x = x_1$ همگرا باشد، به ازای $|x-x_\circ| < |x_1-x_\circ|$ همگرای مطلق است، و اگر در $x = x_1$ واگرا باشد، به ازای $|x-x_\circ| > |x_1-x_\circ|$ نیز واگراست.

۵. می‌توان عـدد $\rho \geqslant ۰$ را طوری تعیین کـرد کـه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$ به‌ازای $|x-x_۰|<\rho$ همگـرای مطلق و به ازای $|x-x_۰|>\rho$ واگـرا باشد، ρ را شعاع همگرایی می‌نامند. هر گـاه یك سری در هیچ نقطه، به‌جز $x_۰$، همگرا نبـاشد، ρ را صفر می‌گیریم؛ هنگامی که سری به‌ازای همهٔ مقادیر x همگرا باشد، می‌گوییم ρ بینهایت است. فاصلهٔ همگرایی را در شکل ۱.۴ با سایه مشخص کرده‌ایم.



شکل ۱.۴

مثال ۲. مطلوب است تعیین شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(x+۱)^n}{n۲^n}$$

آزمون نسبت را به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+۱)^{n+۱}}{(n+۱)۲^{n+۱}}\,\frac{n۲^n}{(x+۱)^n}\right| = |x+۱|\,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲(n+۱)} = \frac{|x+۱|}{۲}.$$

پس سری به‌ازای $|x+۱|<۲$، یعنی $-۳<x<۱$ همگرای مطلق است، و به‌ازای $|x+۱|>۲$ واگـراست. $\rho=۲$ شعاع همگـرایی این سری توانی است. بالاخـره، به‌بررسی نقاط انتهایی فاصلهٔ همگرایی می‌پردازیم. در $x=-۳$ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۳+۱)^n}{n۲^n} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}$$

که یك سری همگراست، اما همگرای مطلق نیست. سری مزبور را در $x=-۳$ همگرای مشروط می‌گویند. در $x=۱$ سری به‌صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$$

درمی‌آید که واگراست. خلاصه آنکه، سری مزبور بـه‌ازای $-۳\leqslant x<۱$ همگرا، و به‌ازای $-۳<x<۱$ همگرای مطلق است، و شعاع همگرایی‌آن ۲ است.

اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n(x-x_۰)^n$ بـه‌ازای $|x-x_۰|<\rho$، $\rho>۰$، به ترتیب به $f(x)$ و $g(x)$ همگـرا باشند، آنگاه به ازای $|x-x_۰|<\rho$ نتایج زیر برقرار است.

۶. سریها را می‌توان جمله به‌جمله جمع و یا تفریق کرد، و داریم

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n$$

۷. سریها را می‌توان به‌طور صوری ضرب کرد، و

$$f(x)g(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

که در آن $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$، به‌علاوه، اگر $g(x_0)\neq 0$، سریها را می‌توان به‌طور صوری تقسیم کرد، و

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n$$

هرچند محاسبهٔ d_n تا اندازه‌ای دشوار است. همچنین، امکان دارد که شعاع همگرایی سری توانی خارج قسمت کوچکتر از ρ باشد.

۸. تابع f به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ پیوسته و دارای مشتقهای همهٔ مراتب است. علاوه‌براین، f'، f''، ... را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ سری محاسبه کرد؛ یعنی،

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

وغیره، و هریك از سریها به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ همگرای مطلق است.

۹. مقدار a_n از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

این سری را سری تیلر[1] تابع f حول $x=x_0$ می‌نامند.

۱۰. اگر تساوی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ به‌ازای هر x برقرار باشد، آنگاه $a_n=b_n$، $n=0,1,2,\ldots$. به‌ویژه، اگر به ازای هر x داشته باشیم $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=0$، آنگاه $a_0=a_1=\cdots=a_n=\cdots=0$.

هرگاه تابع f حول $x=x_0$ دارای بسط به‌سری تیلر

1. Taylor (1685–1731)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

با شعاع همگرایی $\rho>0$ باشد، آن‌را در $x=x_0$ تحلیلی می‌نامند. بنا بر گزاره‌های بالا، اگر f و g در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه $f\pm g$، $f\cdot g$ و f/g (باشرط $g(x_0)\neq 0$) در $x=x_0$ تحلیلی‌اند. نتیجه‌ای کـه در بندهای آتی اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد، آن است که هرچند جمله‌ای در هر نقطه تحلیلی است؛ بدین‌سان مجموع، تفاضل، حاصلضرب، وخارج قسمت (به‌جز در صفرهای مخرج) چند جمله‌ایها درهر نقطه تحلیلی‌اند.

تعویض اندیس جمع‌بندی. اندیس جمع‌بندی در یك سری پارامتری گنگ است، درست به‌همان گونه‌که متغیرانتگرال گیری دریك انتگرال معین یك متغیر گنگ است. مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j x^j}{j!}$$

درست به‌همان طریق‌که درانتگرال معین به‌تعویض متغیر انتگرال گیری می‌پردازیم، درمحاسبهٔ جوابهای معادلات دیفرانسیل به‌صورت سری‌لازم می‌آیدکه اندیسهای‌جمع بندی را تعویض کنیم. باچند مثال به‌توضیح چگونگی تعویض اندیس جمع‌بندی می‌پردازیم.

۱.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n&=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots\\&=a_{0+2}x^{0+2}+a_{1+2}x^{1+2}+\cdots+a_{m+2}x^{m+2}+\cdots\\&=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2}x^{m+2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}\end{aligned}$$

اندیس شماره‌گذاری را بـه‌اندازهٔ ۲ واحد تغییر داده‌ایم ($n\to n+2$) و از ۲ واحد کمتر شروع کرده‌ایم.

۲.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-a)^{n-2}$$

ممکن است بخواهیم این سری را به‌صورت یك سری با جملـهٔ عمومی $(x-a)^n$ به‌جای $(x-a)^{n-2}$ بنویسیم. برای این کار مانند مثال پیش اندیس را بـه‌اندازه ۲ واحد انتقال می‌دهیم ($n\to n+2$). خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}(x-a)^n$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کردکه جمله‌های این دو سری دقیقاً برابرند.

۳.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

نخست x^{2} را به‌داخل علامت جمع‌بندی می‌بریم، به‌دست می‌آید

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_{n}x^{n+r+1}$$

برای آنکه این سری را به‌صورت یك سری جدید با جملهٔ عمومی x^{n+r} بنویسیم، اندیس را ۱ واحد تنزل می‌دهیم ($n \to n-1$) و شماره‌گذاری را از یك جملهٔ بالاتر شروع می‌کنیم. بدین‌سان

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_{n}x^{n+r+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}$$

دراینجا نیز به‌آسانی می‌توان تحقیق‌کرد که جمله‌های این دوسری دقیقاً باهم برابرند.

۴. به‌عنوان آخرین مثال به‌بررسی نتیجهٔ حاصل ازمعادلهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

می‌پردازیم. می‌خواهیم با استفاده ازگزارهٔ ۱۰، a_n را بیابیم. برای‌آنکه ضرایب‌توانهای مشابه x را برابر قرار دهیم، بهتراست در هر دو سری جمله عمومی مشتمل بـر x^{n} باشد. برای این‌کاراندیس جمع‌بندی درطرف اول را با استفاده ازدستور $n \to n+1$ تعویض می‌کنیم، و شماره‌گذاری را یك واحد تنزل می‌دهیم. خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

بنابر گزارهٔ ۱۰ نتیجه می‌شود که

$$(n+1)a_{n+1}=a_{n}, \quad n=0, 1, 2, 3, \ldots$$

و یا

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_{n}$$

بنابراین

$$a_{1}=\frac{1}{1}a_{0}, \quad a_{2}=\frac{1}{2}a_{1}=\frac{1}{2\cdot 1}a_{0}=\frac{a_{0}}{2!}$$

$$a_{3}=\frac{1}{3}a_{2}=\frac{1}{3}\frac{a_{0}}{2!}=\frac{a_{0}}{3!}, \ldots$$

و به‌طورکلی

$$a_{n}=\frac{1}{n!}a_{0}, \quad n=1, 2, \ldots$$

بدین‌سان رابطهٔ مزبور همهٔ ضرایب را برحسب a_0 به‌دست می‌دهد. علاوه براین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{x^n}{n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که دقیقاً همان $a_0 e^x$ است. درنوشتن سری بالا ازقرارداد معمول $0! = 1$ استفاده کرده‌ایم.

مسائل

۱. شعاع همگرایی هریك ازسریهای توانی زیررا تعیین کنید.

(الف) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

(ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ (د) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

(ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$ (و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$

۲. سری تیلر هریك از توابع زیر را حول نقطهٔ x_0 بیابید. شعاع همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

(الف) $\sin x, \quad x_0 = 0$ (ب) $e^x, \quad x_0 = 0$

(ج) $x, \quad x_0 = 1$ (د) $x^2, \quad x_0 = -1$

(ه) $\ln x, \quad x_0 = 1$ (و) $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$

(ز) $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$ (ح) $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

۳. با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$، y' و y'' را محاسبه کنید وچهارجملهٔ اول هریك ازاین سریها وضریب x^n درجملهٔ عمومی را بنویسید.

۴. با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله اول هریك از این سریها وضریب x^n درجمله عمومی را بنویسید. نشان دهیدکه اگر $y'' = y$، آنگاه ضرایب a_0 و a_1 دلخواه‌اند، و a_2 و a_3 را برحسب a_0 و a_1 محاسبه کنید. نشان دهید که $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$، $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

۵. صحت تساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$$ (الف)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$ (ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$ (ج)

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m}x^{n+p}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k}x^{n+p+k}, \quad x>0$$ (د)

که درآن p یك ثابت، و k و m اعداد صحیح مفروضی می باشند.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}+\alpha x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$ (ه)

$$+\beta x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$=[r(r-1)+\alpha r]a_0 x^r+[(r+1)r+\alpha(r+1)]a_1 x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)a_n+\alpha(n+r)a_n+\beta a_{n-2}]x^{n+r}, \quad x>0$$

که درآن r مقدار ثابتی است.

۶. a_n را طوری تعیین کنید که معادلهٔ زیر برقرار باشد

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

تابعی راکه با سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمایش داده شده است، مشخص کنید.

۲.۴ سریهای جواب درمجاورت یك نقطهٔ عادی، بخش اول

دراین بند باذکر چند مثال روش حل

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad (1)$$

را هنگامی که توابع P، Q و R چندجمله‌ای باشند، توضیح می‌دهیم. می‌خواهیم معادلهٔ (۱) را در همسایگی یك نقطهٔ عادی x_0، یعنی نقطه‌ای که در آن $P(x_0)\neq 0$ است حل کنیم. چون $P(x_0)\neq 0$ و P پیوسته است، در نتیجه یك فاصله حول نقطهٔ x_0 وجود دارد

که در آن P هیچگاه صفر نیست.[1] دراین فاصله Q/P و R/P توابعی پیوسته‌اند. بنابراین طبق قضیهٔ وجود و یکتایی ۲.۳ معادلهٔ (۱) دارای جوابی یکتاست که در شرایط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ ، $y'(x_0)=y'_0$ با انتخاب دلخواه y_0 و y'_0 صدق می‌کند.

می‌خواهیم برای معادلهٔ (۱) جوابهایی به‌صورت

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (۲)$$

جستجو کنیم، برای این‌کار باید دو سؤال را بررسی کرد. نخست آنکه آیا می‌توان a_n را به‌طور صوری به‌گونه‌ای تعیین[2] کرد که y حاصل از رابطهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق کند. دوم آنکه آیا سری حاصل واقعاً همگراست، و اگر چنین است، این همگرایی به‌ازای چه مقادیری از $x-x_0$ تحقق می‌یابد. اگر بتوان نشان داد که سری مزبور به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ ، $\rho>0$ ، همگراست در این صورت همهٔ عملیات صوری از قبیل مشتق‌گیری جمله به‌جمله را می‌توان توجیه کرد، وبدین‌سان برای معادلهٔ (۱) جوابی ساخته شده است که به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ معتبر خواهد بود.

نکاتی که بیشتر جنبهٔ نظری دارند، مانند شعاع همگرایی سری (۲) را به‌بند ۱.۲.۴ موکول می‌کنیم. دراینجا با فرض وجود جواب طرز تعیین a_n را نشان می‌دهیم. عملیترین روش برای انجام این‌کار آن است که سری (۲) و مشتقهای آن‌را به‌جای y ، y' و y'' در معادله (۱) قراردهیم؛ آنگاه a_nها را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل مزبور به‌طورصوری برقرارباشد. مثالهای زیراین روش را توضیح می‌دهند. معادلات‌دیفرانسیلی که عنوان می‌شوند خود از اهمیت بسیاری برخوردارند.

مثال ۱. بحث را بامسئلهٔ تعیین سری جواب معادلهٔ

$$y''+y=0, \quad -\infty<x<\infty \qquad (۳)$$

آغاز می‌کنیم.

همان‌طور که می‌دانیم، دوجواب مستقل‌خطی‌این معادله عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$. برای ممارست درتعیین سری جواب دراینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جوابهای $\sin x$ و $\cos x$ را با استفاده از سریهای توانی به‌دست آورد. در معادلهٔ (۳) داریم $P(x)=1$ ، $Q(x)=0$ و $R(x)=1$ ؛ بنابراین $x=0$ یك نقطه عادی است.

می‌خواهیم جوابی به‌صورت زیر بیابیم

---

۱. این نکته ازلحاظ هندسی واضح است، ومی‌توان آن را به‌طور دقیق نیزاثبات‌کرد.

۲. مقصود ازاصطلاح «تعیین صوری» آن است که همهٔ محاسبات جبری لازم برای تعیین‌جواب را بدون آنکه درهرگام مجاز بودن آن‌را توجیه‌کنیم انجام دهیم.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (۴)$$

چون جمله به‌جمله مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$y'=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n$$
$$+(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad (۵)$$

$$y''=2a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$$
$$+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \qquad (۶)$$

با گذاشتن سریهای (۴) و (۶) به‌جای y و y'' درمعادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

درمجموع اول، اندیس جمع‌بندی را تعویض می‌کنیم، و به‌جای n قرار می‌دهیم $n+2$ و بدین‌سان مجموع با اندیس ۰ آغاز می‌شود نه با اندیس ۲. داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

و یا

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n]x^n=0$$

برای اینکه این معادله به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشد، لازم است که ضریب هریك از توانهای x صفر باشد؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0\,,\quad n=0\,,\,1,\,2,\,3,\,\ldots \qquad (۷)$$

معادله (۷) را رابطهٔ بازگشت می‌نامند. طبق‌این‌رابطه ضرایب زوج (a_0 ، a_2، a_4، ...) وضرایب فرد (a_1، a_3، a_5، ...) جداگانه تعیین می‌شوند. داریم

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 1}=-\frac{a_0}{2!},\quad a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=+\frac{a_0}{4!}\,,$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6\cdot 5}=-\frac{a_0}{6!}\,,\ \ldots$$

وبه‌طورکلی، اگر $n=2k$ ، آنگاه

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0 , \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{8}$$

و به‌همین ترتیب

$$a_3 = -\frac{a_1}{2.3} = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = +\frac{a_1}{5!},$$

$$a_7 = -\frac{a_5}{7.6} = -\frac{a_1}{7!}, \cdots$$

وبه‌طور کلی، اگر $n = 2k+1$ ، آنگاه

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1 , \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{9}$$

بدین‌سان سری (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots \right]$$

$$+ a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \right]$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{10}$$

سری اول دقیقاً سری تیلر $\cos x$ ؛ و سری دوم سری تیلر $\sin x$ است. بدین‌سان، همان‌طور که از آغاز انتظار می‌رفت، جواب $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ به‌دست می‌آید. توجه شود که هیچ قیدی بر a_0 و a_1 ؛ تحمیل نمی‌شود، بنابراین دلخواه‌اند. این نکته برای سری جواب در یك نقطهٔ عادی عمومیت دارد؛ و شگفتی‌آور نیست. از معادلهٔ (۲) دیده می‌شود که مقادیر y و y' در x_0 به‌ترتیب برابرند با a_0 و a_1 . چون شرایط اولیهٔ $y(x_0)$ و $y'(x_0)$ را می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب کرد، در نتیجه باید a_0 و a_1 دلخواه باقی بمانند تا هنگامی که شرایط اولیهٔ خاصی عنوان شود.

این‌مثال را با توضیحی به‌پایان می‌بریم. حل‌را با آگاهی به‌اینکه جوابهای معادلهٔ(۳) باید $\sin x$ و $\cos x$ باشند آغاز کردیم. اما فرض کنید که این نکته را نمی‌دانستیم و

معادلهٔ (۳) را باروش سری حل کرده وجواب (۱۰) را به‌دست آورده‌ایم. با توجه به‌این مطلب که معادلهٔ (۳) درعمل زیاد مطرح می‌شود، ممکن است تصمیم بگیریم که برای این جوابها نام خاصی قایل شویم؛ مثلاً

$$\cos x \text{ برای } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{و} \quad \sin x \text{ برای } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

آنگاه دربارهٔ خواص این توابع به بررسی بپردازیم. نخست، روشن است که $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$، $\cos(-x) = \cos x$، و $\sin(-x) = -\sin x$، فرمول دیگری که به‌آسانی به‌دست می‌آید عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos x$$

به‌همین ترتیب، $d(\cos x)/dx = -\sin x$. علاوه براین، بامحاسبه‌روی سریها، می‌توان همهٔ خواص جبری وتحلیلی معمولی توابع سینوس و کسینوس ازقبیل $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را به‌دست آورد.

نکتهٔ جالب آنکه می‌توان این توابع را که درفیزیك ریاضی اهمیت بسیاری دارند به‌عنوان جوابهای یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ساده که مکرراً به‌آن برخورد می‌شود، تعریف کرد وخواص آنهارا بدون استفاده ازمبحثی که درآن محتملاً این توابع را برای نخستین‌بار آموختیم، یعنی مثلثات مسطحه به‌دست آورد.[1] دقیقاً، تابع $\sin x$ را می‌توان به عنوان جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y''+y=0$، $y(0)=0$، $y'(0)=1$؛ و به همین نحو، تابع $\cos x$ را به‌عنوان جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y''+y=0$، $y(0)=1$، $y'(0)=0$ تعریف کرد. برای تعریف همین توابع می‌توان ازمسائل مقدار اولیهٔ دیگر نیز استفاده کرد. مثلاً، مسئلهٔ مقدار اولیه غیرخطی $(y')^2 = 1 - y^2$، $y(0)=0$، $y'(0)>0$ معرف تابع $\sin x$ خواهد بود (مسئلهٔ ۵ را ببینید).

مثال ۲. مطلوب است تعیین سری جواب معادله آیری[2]

---

۱. چنین تحلیلی دربند ۲۴ کتاب

K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Hafner, New York, 1951

آمده است.

۲. سرجورج آیری (Sir George Airy)، (۱۸۰۱–۱۸۹۲) منجم وریاضیدان انگلیسی، در ۲۵ سالگی استاد ریاضیات کامبریج شد، واز ۱۸۳۵ تا ۱۸۸۱ رئیس رصدخانه گرینویچ بود. یکی ازنکات جالب درمعادلهٔ آیری آن است که به‌ازای xهای منفی، جوابها همانند توابع مثلثاتی نوسانی‌اند، و به‌ازای xهای مثبت یکی ازجوابها به‌طور نمایی صعود می‌کند، و دیگری به‌طورنمایی نزول می‌نماید. آیا شما می‌توانید پیش‌بینی این رفتار را توجیه کنید؟

$$y''=xy\ ,\ -\infty<x<\infty \tag{۱۱}$$

دراین معادله داریم $P(x)=1$ ، $Q(x)=0$ ، و $R(x)=-x$ ؛ بنابراین، $x=0$ یك نقطهٔ عادی است. فرض کنیم که

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{۱۲}$$

سری y'' با رابطهٔ (۶) مشخص می‌شود؛ اما، باتوضیحی که درمثال قبل آمد، می‌توان آن را به صورت

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \tag{۱۳}$$

نوشت. باگذاشتن سریهای (۱۲) و (۱۳) به‌جای y و y'' درمعادلهٔ (۱۱)، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} \tag{۱۴}$$

اکنون، اندیس جمع‌بندی در سری طرف دوم معادلهٔ بالا را با قراردادن $n-1$ به جای n تغییر داده ، و جمع‌بندی را به جای صفر از ۱ آغاز می‌کنیم. بدین‌سان، خواهیم داشت

$$2\cdot1\ a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\ x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\ x^n$$

در اینجا نیز برای‌آنکه معادله به ازای همهٔ x ها برقرار باشد، لازم است‌که ضرایب توانهای متشابه x برابر باشند؛ بنابراین $a_2=0$ ، و رابطهٔ بازگشتی زیر به دست می‌آید

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1}\qquad \text{به ازای } n=1,2,3,\ldots \tag{۱۵}$$

چون a_{n+2} برحسب a_{n-1} داده می‌شود، بنابراین a ها باگامهای سه واحدی تعیین می‌شوند. بدین‌سان a_0 مقدار a_3، وآن به نوبهٔ خود a_6 ، . . . ؛ را تعیین‌می‌نماید، همچنین a_1 مقدار a_4 ، و آن به نوبهٔ خود مقدار a_7 ، . . . ؛ را تعیین می کند، و به همین‌ترتیب‌از a_2 مقدار a_5 ، و از آن a_8 ، . . . به دست می‌آید. چون $a_2=0$ ، مستقیماً نتیجه می‌شود که $a_5=a_8=a_{11}=\ldots=0$.

برای دنباله a_0 ، a_3 ، a_6 ، a_9 ، . . . در رابطهٔ بازگشت به جای n متوالیاً مقادیر ۱، ۴، ۷، ۱۰، . . . را قرارمی‌دهیم:

$$a_3=\frac{a_0}{3\cdot2},\quad a_6=\frac{a_3}{6\cdot5}=\frac{a_0}{(6\cdot5)(3\cdot2)},\quad a_9=\frac{a_6}{(9\cdot8)}$$

$$=\frac{a_0}{(9\cdot8)(6\cdot5)(3\cdot2)},\ \cdots$$

برای‌این دنبالهٔ ضرایب مناسب است‌فرمولی برای $a_{۳n}$ به‌ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$ بنویسیم. نتایج بالا فرمول‌کلی زیررا به‌دست می‌دهد

$$a_{۳n} = \frac{۱}{[(۳n)(۳n-۱)][(۳n-۳)(۳n-۴)]\cdots[۶\cdot۵][۳\cdot۲]}a_۰, \quad n = ۱,۲,\ldots$$

این عبارت را می‌توان به‌ترتیب زیرنیز ازرابطهٔ بازگشت (۱۵) به دست‌آورد. نخست با قراردادن $n-۲$ به‌جای n به دست می‌آید $n(n-۱)a_n = a_{n-۳}$؛ سپس، بـرای ایجـاد ضرایب متناظربا $a_۰$ به‌جای n، $۳n$ را قرارمی‌دهیم، درنتیجه

$$(۳n)(۳n-۱)a_{۳n} = a_{۳n-۳}$$

ازتکرار این رابطه فرمول بالا برای $a_{۳n}$ به‌دست می‌آید.

برای دنباله $a_۱$، $a_۴$، $a_۷$، $a_{۱۰}$، ... دررابطهٔ بازگشت به‌جای n متوالیاً مقادیـر ۲،۵،۸،۱۱،... را قرارمی‌دهیم:

$$a_۴ = \frac{a_۱}{۴\cdot۳}, \quad a_۷ = \frac{a_۴}{۷\cdot۶} = \frac{a_۱}{(۷\cdot۶)(۴\cdot۳)},$$

$$a_{۱۰} = \frac{a_۷}{۱۰\cdot۹} = \frac{a_۱}{(۱۰\cdot۹)(۷\cdot۶)(۴\cdot۳)},\ldots$$

به همان روش بالا خواهیم داشت

$$a_{۳n+۱} = \frac{۱}{[(۳n+۱)(۳n)][(۳n-۲)(۳n-۳)]\cdots[۷\cdot۶][۴\cdot۳]}a_۱,$$
$$n = ۱,۲,۳,\ldots$$

وجواب‌معادلهٔ‌آیری عبارت است از

$$\begin{aligned} y &= a_۰\left[۱ + \frac{x^۳}{۳\cdot۲} + \frac{x^۶}{۶\cdot۵\cdot۳\cdot۲} + \cdots + \frac{x^{۳n}}{(۳n)(۳n-۱)\cdots۳\cdot۲} + \cdots\right] \\ &\quad + a_۱\left[x + \frac{x^۴}{۴\cdot۳} + \frac{x^۷}{۷\cdot۶\cdot۴\cdot۳} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^{۳n+۱}}{(۳n+۱)(۳n)(۳n-۲)(۳n-۳)\cdots۴\cdot۳} + \cdots\right] \\ &= a_۰\left[۱ + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{۳n}}{(۳n)(۳n-۱)(۳n-۳)(۳n-۴)\cdots۳\cdot۲}\right] \\ &\quad + a_۱\left[x + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{۳n+۱}}{(۳n+۱)(۳n)(۳n-۲)(۳n-۳)\cdots۴\cdot۳}\right] \end{aligned} \tag{۱۶}$$

به‌علت رشد سریع مخرج جمله‌های سریهای (۱۶)، می‌توان حدس زد که باید شعاع همگرایی آنها بسیار بزرگ باشد. در واقع، چنانکه در بند بعد خواهیم دید هردو سری به‌ازای همهٔ مقادیر x همگرا می‌باشند. مسئلهٔ ۴ را نیز ببینید.

موقتاً فرض کنیم که سریهای مزبور به ازای همهٔ مقادیر x همگرا باشند، و توابعی را که با گروشهٔ اول و دوم در رابطهٔ (۱۶) معین می‌شوند، به‌ترتیب با y_1 و y_2 نشان می‌دهیم. آنگاه، با انتخاب $a_0 = 1$ ، $a_1 = 0$ و بار دیگر با انتخاب $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ ، دیده می‌شود که y_1 و y_2 جوابهای خصوصی معادلهٔ (۱۱) می‌باشند. توجه شود که y_1 در شرایط اولیه $y_1(0) = 1$ ، $y_1'(0) = 0$ و y_2 در شرایط اولیه $y_2(0) = 0$ ، $y_2'(0) = 1$ صدق می‌کنند. بدین‌سان $w(y_1 , y_2)(0) = 1 \neq 0$، و در نتیجه y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ آیری عبارت است از

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad -\infty < x < \infty$$

مثال ۳. برای معادلهٔ آیری جوابی برحسب توانهای $x - 1$ بیابید.

نقطهٔ $x = 1$ یك نقطهٔ عادی معادله (۱۱) است، و بدین‌سان جواب را به‌صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

در نظر می‌گیریم. آنگاه

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n$$

و

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n$$

با قراردادن y و y'' در معادلهٔ (۱۱) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \qquad (۱۷)$$

اکنون برای استفاده از برابری ضرایب توانهای متشابه $x - 1$، باید x، ضریب y در معادلهٔ (۱۱) را نیز برحسب توانهای $x - 1$ بنویسیم؛ یعنی $x = 1 + (x-1)$. توجه شود که این عبارت دقیقاً سری تیلر x حول $x = 1$ است. آنگاه معادلهٔ (۱۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1}$$

با تغییر اندیس جمع‌بندی درسری دوم طرف دوم، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$$

ازتساوی ضرایب توانهای مشابه $x-1$ به‌دست می‌آید

$$2a_2=a_0$$
$$(3\cdot2)a_3=a_1+a_0$$
$$(4\cdot3)a_4=a_2+a_1$$
$$(5\cdot4)a_5=a_3+a_2$$
$$\vdots$$

رابطهٔ عمومی بازگشت عبارت‌است از

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_n+a_{n-1}\quad n\geqslant 1 \text{ به‌ازای} \qquad (18)$$

نخستین جمله‌های a_n را برحسب a_0 و a_1 به دست می‌آوریم

$$a_2=\frac{a_0}{2},\quad a_3=\frac{a_1}{6}+\frac{a_0}{6}$$

$$a_4=\frac{a_2}{12}+\frac{a_1}{12}=\frac{a_0}{24}+\frac{a_1}{12}$$

$$a_5=\frac{a_3}{20}+\frac{a_2}{20}=\frac{a_0}{30}+\frac{a_1}{120}\cdots$$
$$\vdots$$

بنابراین

$$y=a_0\left[1+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{24}+\frac{(x-1)^5}{30}+\cdots\right]$$
$$+a_1\left[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{12}+\frac{(x-1)^5}{120}+\cdots\right]\qquad (19)$$

به طورکلی، هنگامی‌که رابطهٔ بازگشت مانند رابطهٔ (۱۸) دارای سه جمله باشد، تعیین ضرایب سری جواب دشوارخواهد بود. در این مثال فرمول a_n برحسب a_0 و a_1 را نمی‌توان به‌فوریت مشخص کرد. اما، دربند ۱.۲.۴ خواهیم دیدکه حتی بدون معلوم بودن‌فرمول a_n می‌توان ثابت‌کردکه سریهای(۱۹) به‌ازای همهٔ مقادیر x همگرامی‌باشند، وعلاوه براین دوجواب مستقل خطی y_1 و y_2 برای معادلهٔ‌آیری (۱۱) به دست می‌دهند. بدین‌سان

$$y=a_0 y_1(x)+a_1 y_2(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ آیری به‌ازای $-\infty < x < \infty$ است.

شایان توجه است که اگر بخواهیم برای معادلهٔ (۱) جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ بیابیم، همان‌گونه که درمثال ۳ دیدیم، بایدضرایب $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ را برحسب توانهای $(x-x_0)$ بیان کنیم. روش دیگر آنکه با تعویض متغیر $x-x_0=t$، معادلهٔ دیفرانسیل جدیدی برای y به عنوان تابع t به دست‌آوریم، وآنگاه برای‌آن جوابی به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ پیدا کنیم. باقراردادن $x-x_0$ به‌جای t محاسبات را به پایان می‌بریم (مسئلهٔ ۳ را ببینید).

نکتهٔ جالب دیگر آنکه، توابع y_1 و y_2 که باسریهای‌رابطه (۱۶) مشخص‌می‌شوند، جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (۱۱)، به‌ازای همهٔ مقادیر x، می‌باشند، وهمین مطلب‌درمورد توابع y_1 و y_2 که با سریهای رابطهٔ (۱۹) معین می‌شوند، نیز صادق است. بنا بر نظریهٔ عمومی معادلات خطی مرتبهٔ دوم، هریك ازدوتابع نخست را می‌توان به صورت ترکیبه خطی ازدوتابع اخیرنوشت، وبرعکس، واین نتیجه را مطمئناً نمی‌توان تنها بابررسی‌سریها به‌دست آورد.

مثال۴. معادلهٔ هرمیت[1] عبارت است از

$$y''-2xy'+\lambda y=0, \quad -\infty < x < \infty \tag{۲۰}$$

که درآن λ یك ثابت است. این‌معادله دربسیاری ازشعب فیزیك ریاضی‌دارای اهمیت‌است؛ مثلا، درمکانیك‌کوانتومی دربررسی معادلهٔشرودینگر[2] درمورد نوسانگر هارمونیك به‌معادلهٔ هرمیت می‌رسیم.

برای‌آنکه درهمسایگی نقطهٔ عادی $x=0$، جوابی برای معادلهٔ (۲۰) بیابیم، سریهای (۴)، (۵)و(۱۳) را درمعادلهٔ (۲۰) به‌جای y، y' و y'' قرارمی‌دهیم، وازآنجا

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=0$$

ویا

$$(2a_2+\lambda a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n]x^n=0 \tag{۲۱}$$

---

۱. شارل هرمیت (Charles Hermite)، (۱۸۲۲–۱۹۰۱) یکی از ریاضیدانان برجستهٔ فرانسوی،که تحقیقاتش درزمینهٔ جبر ازاهمیت خاصی برخوردار است.

2. Schrödinger (1887–1961)

بنا بر این $a_2=-\lambda a_0/2$ ، ورابطهٔ بازگشت عمومی عبارت است از

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n,\quad n\geqslant 1 \tag{22}$$

توجه شود که رابطهٔ بازگشت (۲۲) درواقع شامل نتیجهٔ $a_2=-\lambda a_0/2$ که متناظر بـه $n=0$ است می‌باشد. از رابطه (۲۲) دیده می‌شود که از a_0 مقدار a_2 ، و از a_2 مقـدار a_4 وبه‌همین‌ترتیب سایرضرایب زوج به‌دست می‌آیند. ضرایب توانهای فرد x نیز برحسب a_1 معین می‌شوند. سری صوری جواب معادلهٔ هرمیت عبارت است از

$$\begin{aligned}y=a_0&\left[1-\frac{\lambda}{2!}x^2-\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4-\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6-\dots\right]\\&+a_1\left[x+\frac{(2-\lambda)}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5\right.\\&\left.+\frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7+\dots\right]=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)\end{aligned} \tag{23}$$

باردیگر نتایج بند ۱.۲.۴، همگرایی این‌سریها را به ازای همهٔ مقادیـر x ثابت می‌کند. اگر λ یك‌عدد صحیح زوج نامنفی باشد، یکی ازسریهای بالا به‌صورت یك چند جمله‌ای درمی‌آید. به‌ویژه، به‌ازای $\lambda=0,2,4,6$ ، یك‌جواب معادلهٔ هرمیت بـه ترتیب عبارت خواهد بود از ۱، x، $2x^2-1$، و $x-2x^3/3$. چند جمله‌ای جواب متناظر به $\lambda=2n$، پس ازضرب دریك ثابت مناسب[1] به‌چند جمله‌ای هرمیت $H_n(x)$ موسوم است.

مسائل

۱. به‌روش صوری، برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر، دوجواب مستقل خطی به‌صورت سری توانی برحسب $x-x_0$ بیابید. رابطهٔ بازگشت را معین‌کنید.

(الف) $y''-y=0,\qquad x_0=0$

(ب) $y''-xy'-y=0,\quad x_0=0$

(ج) $y''-xy'-y=0,\quad x_0=1$

---

۱. معمولاً به‌این عمل نرمال‌سازی اطلاق می‌شود. ثابت‌مزبور را اغلب به‌گونه‌ای انتخاب‌می‌کنند که جواب دریك نقطهٔ خاص دارای مقدارویژه‌ای باشد، یا آن‌که یك‌انتگرال جواب در فاصلهٔ مفروضی دارای مقدارمعینی باشد. به‌عنوان مثال، چند جمله‌ای هرمیت مرتبهٔ n به‌طوریکتا با این‌بیان مشخص می‌گردد که یك‌چند جمله‌ای درجهٔ n است، که جواب معادلهٔ هرمیت با $\lambda=2n$ می‌باشد ودرآن ضریب x^n برابر 2^n است.

(د) $y''+K^{2}x^{2}y=0, \quad x_{0}=0, \quad$ ثابت k

(ه) $(1-x)y''+y=0, \quad x_{0}=0$

(و) $(2+x^{2})y''-xy'+4y=0, \quad x_{0}=0$

۰۲ جواب مسئلهٔ ۱ (ب) را باشرایط اولیهٔ $y(0)=0$، $y'(0)=1$ و همچنین با شرایط اولیهٔ $y(0)=2$، $y'(0)=1$ بیابید.

۰۳ با تعویض متغیر $t=x-1$، دو سری جواب مستقل خطی برحسب $x-1$ برای معادلهٔ زیر بیابید

$$y''+(x-1)^{2}y'+(x^{2}-1)y=0$$

نشان‌دهید که همین نتیجه را می‌توان با بسط $x^{2}-1$ به‌سری تیلر حول $x=1$، وجایگزینی

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x-1)^{n}$$

به‌دست آورد.

۰۴ مستقیماً با استفاده از آزمون نسبت، نشان دهیدکه سریهای جواب معادلهٔ آیری درحول $x=0$ به ازای همه مقادیر x همگرا می‌باشند. معادلهٔ (۱۶) متن را ببینید.

۰۵ مسئلهٔ مقداراولیهٔ $(y')^{2}=1-y^{2}$، $y(0)=0$ رابا شرط‌اضافی $y'(0)>0$ درنظرمی‌گیریم. این‌شرط اضافی برای تعیین‌جواب به‌طوریکتا لازم است، زیرا معادلهٔ دیفرانسیل‌فقط‌شامل‌مربعات y و y' می‌باشد؛ بنابراین اگر $\phi(x)$ یك‌جواب این‌معادلهٔ‌دیفرانسیل باشد، $-\phi(x)$ نیز یك‌جواب‌خواهدبود. برای این‌مسئلهٔ مقداراولیهٔ یك‌سری‌جواب به‌صورت

$$y=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\cdots$$

بیابید، و نشان دهیدکه $a_{0}=0$ ، $a_{1}=1$ ، $a_{2}=0$ ، و $a_{3}=-1/3!$. توجه شودکه نخستین دوجمله غیرصفر این‌سری، دوجملهٔ اول بسط سری تیلر $\sin x$ حول $x=0$ است.

۴۰۲۰۱ سریهای جواب درمجاورت یك‌نقطهٔ عادی، بخش دوم

دربند پیش مسئلهٔ تعیین جوابهای

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \tag{1}$$

راکه درآن P ، Q و R چند جمله‌ای می‌باشند، درهمسایگی یك‌نقطهٔ عادی x_{0} بررسی کردیم. بافرض‌آنکه معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌صورت $y=\phi(x)$ است، و ϕ دارای بسط تیلر

$$y=\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x-x_{0})^{n} \tag{2}$$

می‌باشد، که به‌ازای $|x-x_{0}|<\rho$ ، $\rho>0$ ، همگراست، دیده شدکه می‌توان a_{n} را

مستقیماً باقراردادن سری (۲) به‌جای y درمعادلهٔ (۱) تعیین کرد.

اکنون می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان این گزاره را توجیه کرد که اگر x_0 یك نقطهٔ عادی معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه جوابهایی به‌صورت (۲) وجود دارد. علاوه براین به بررسی شعاع همگرایی این‌گونه‌سریها خواهیم پرداخت. با این بررسی تعریف نقطهٔ‌عادی تعمیم خواهد یافت.

اکنون فرض کنیم که معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌صورت (۲) است. روشن است که با m بارمشتق‌گیری ازمعادلهٔ (۲) وقراردادن x_0 به‌جای x خواهیم داشت

$$m!a_m=\phi^{(m)}(x_0)$$

بنابراین، برای محاسبهٔ a_n درسری (۲)، باید نشان دهیم که می‌توان $\phi^{(n)}(x_0)$ را به ازای $n=0,1,2,\ldots$ ازمعادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌دست‌آورد.

فرض کنیم که $y=\phi(x)$ جوابی از معادلهٔ (۱) است که درشرایط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$، $y'(x_0)=y'_0$ صدق‌می‌کند. آنگاه $a_0=y_0$ و $a_1=y'_0$. اگرفقط بخواهیم جوابی برای معادلهٔ (۱) بیابیم بدون آنکه شرایط اولیه‌ای مشخص شده باشد، آنگاه a_0 و a_1 مقادیری دلخواه‌خواهندبود. برای تعیین $\phi^{(n)}(x_0)$ ومتناظراً a_n به‌ازای $n=2,3,\ldots$ به معادلهٔ (۱) برمی‌گردیم. چون ϕ جوابی ازمعادلهٔ (۱) است، خواهیم داشت

$$P(x)\phi''(x)+Q(x)\phi'(x)+R(x)\phi(x)=0$$

درفاصله‌ای حول x_0 که P درآن‌صفر نمی‌شود، می‌توان این‌معادله را به‌صورت زیرنوشت

$$\phi''(x)=-p(x)\phi'(x)-q(x)\phi(x) \tag{۳}$$

که درآن $p(x)=Q(x)/P(x)$ و $q(x)=R(x)/P(x)$. باقراردادن x_0 به جای x در معادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید

$$\phi''(x_0)=-p(x_0)\phi'(x_0)-q(x_0)\phi(x_0)$$

بنابراین a_2 با

$$2!a_2=\phi''(x_0)=-p(x_0)a_1-q(x_0)a_0 \tag{۴}$$

داده می‌شود. برای تعیین a_3 ازمعادلهٔ (۳) مشتق می‌گیریم، وبه جای x مقدار x_0 را قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}3!a_3=\phi'''(x_0)&=-[p\phi''+(p'+q)\phi'+q'\phi]_{x=x_0}\\&=-2!p(x_0)a_2-[p'(x_0)+q(x_0)]a_1-q'(x_0)a_0\end{aligned} \tag{۵}$$

با جایگزینی a_2 ازمعادلهٔ (۴)، a_3 برحسب a_1 و a_0 به‌دست می‌آید. چون P ، Q و R چندجمله‌ای‌اند و $P(x_0)\neq 0$، همهٔ‌مشتقهای p و q در x_0 وجود دارند. بنابراین‌می‌توان به‌مشتق‌گیری ازمعادلهٔ (۳) تابینهایت ادامه داد، ومتوالیاً ضرایب a_4، ... را با جایگزینی x_0 به‌جای x تعیین کرد.

باید توجه داشت که خاصیت مهمی که در تعیین a_n به‌کار رفت، این بود که امکان بینهایت مشتق‌گیری از توابع p و q وجود داشت. به نظر می‌رسید که بتوان فرض اینکه توابع p و q خارج قسمت دوچند جمله‌ای باشند را تخفیف داده، وفقط قید کنیم که در یک همسایگی x_0 بینهایت بارمشتق پذیرند. متأسفانه، ایـن شرط ضعیفتر از آن است که همگرایـی‌سری حاصل برای $y=\phi(x)$ را تأمین کند. اما، شرط کلیتر دیگری برای p و q وجود دارد. براساس آن می‌توان محاسبات بالا را برای a_n انجام داد، وهمگرایی سری جواب رانیز اثبات کرد. این شرط آن است که p و q در x_0 تحلیلی باشند، یعنی دارای بسط سری تیلر باشندکه درفاصله‌ای حول نقطهٔ x_0 همگرا باشند:

$$p(x)=p_0+p_1(x-x_0)+\dots+p_n(x-x_0)^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n \quad (۶)$$

$$q(x)=q_0+q_1(x-x_0)+\dots+q_n(x-x_0)^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n \quad (۷)$$

چنانکه در بند ۱.۴ بیان شد، اگرهریک ازتـوابع p و q خـارج قسمت دوچند جمله‌ای باشد، آنگاه دارای بسطهایی[1] به‌صورت (۶) و (۷) خواهند بود. با این اندیشه می‌توان تعریف نقطهٔ عادی ونقطهٔ غیرعادی معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر تعمیم داد: اگر تـوابع $p=Q/P$ و $q=R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه نقطهٔ x_0 را یك نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل (۱)می‌نامند؛ درغیر این‌صورت آن را نقطهٔ غیرعادی گویند.

اکنون برگردیم به مسئله فاصلهٔ همگرایی سری جواب. یك‌راه (که‌چندان هم‌جالب نیست)آن‌است که برای‌هرمسئله سری‌جواب را محاسبه‌کرده وسپس بااستفاده ازآزمونهای همگرایی، شعاع همگرایی سری جواب را تعیین‌کنیم. خوشبختانه، این‌سؤال را مـی‌توان برای طبقهٔ وسیعی ازمسائل باقضیهٔ زیرجواب داد.

قضیهٔ ۴.۱.۰ اگر x_0 یك نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل (۱)

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

باشد، یعنـی اگـر $p=Q/P$ و $q=R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه جواب عمومـی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x) \quad (۸)$$

که در آن a_0 و a_1 دلخواه، و y_1 و y_2 دوسری جواب مستقل خطی‌اند که در x_0 تحلیلی می‌باشند. علاوه براین شعاع همگرایی هریك ازسریهای جواب y_1 و y_2 حداقل برابرمی‌نیم

---

۱. خوانندهٔ دقیق محتملا به‌این نتیجه (صحیح) رسیده است‌که اگر p به‌صورت (۶) باشد، در x_0 بینهایت بارمشتق‌پذیر خواهدبود، اما عکس آن درست نیست. مثالی بـرای تـوابعی‌که بینهایت بار در $x=0$ مشتق‌پذیرند اما دارای بسط سری تیلر نیستند، درمسئلهٔ ۸ آمده‌است.

شعاع همگرایی سریهای p و q خواهد بود. ضرایب سریهای جواب با قراردادن سری (۲) به جای y در معادلهٔ (۱) تعیین می‌شوند.

از صورت سریهای جواب دیده می‌شود که

$$y_1(x)=1+b_2(x-x_0)^2+\cdots \quad \text{و} \quad y_2(x)=(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

بنابراین y_1 جوابی است که در شرایط اولیهٔ $y_1(x_0)=1$ ، $y_1'(x_0)=0$ و y_2 جوابی است که در شرایط اولیهٔ $y_2(x_0)=0$ ، $y_2'(x_0)=1$ صدق می‌کند. همچنین توجه شود که با وجود آنکه محاسبهٔ ضرایب با مشتق‌گیری متوالی ازمعادلهٔ دیفرانسیل ازلحاظ نظری بسیار عالی است، اما عموماً یك روش محاسباتی عملی نیست. مناسبتر است که سری (۲) را درمعادلهٔ دیفرانسیل (۱) به جای y قرارداده و مانند مثال قبل ضرایب را طوری تعیین کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل برقرار باشد.

گرچه اثبات این قضیه دشوار نیست، وآن را به صورتی که تا اندازه‌ای کلیتر است، فوکس[1] اثبات کرده است، امـا در این کتاب قصد انجام این کار را نداریم. آنچه برای هدف ما مهم است،آن است که سری جواب به صورت (۲) وجود دارد، وشعاع همگرایی آن ازکوچکترین شعاعهای همگرایی سریهای p و q کوچکتر نخواهد بود؛ بنابراین ما فقط باید آنها را تعیین کنیم.

این کار را بـه دو طریق می‌توان انجام داد. در اینجا نیز می‌توان مستقیماً سریهای توانی p و q را محاسبه کرد، و با استفاده ازآزمونهای همگرایی سریها شعاعهای همگرایی آنها را معین نمود. اما، هنگامی که P ، Q و R چند جمله‌ای باشند، روش آسانتری وجود دارد. در نظریهٔ توابع مختلط اثبات می‌شود که خارج قسمت دوچند جمله‌ای، مثلاً Q/P، درحول $x=x_0$ اگر $P(x_0)\neq 0$ ، دارای بسط به سری توانی همگرا است. علاوه براین، با فرض آنکه عوامل مشترك Q و P حذف شده باشند، شعاع همگرایی‌سری توانی Q/P حول نقطهٔ x_0 دقیقاً برابر است با مسافت x_0 تا نزدیکترین صفر P . در تعیین این مسافت باید توجه داشت که $P(x)=0$ ، ممکن است دارای ریشه‌های مختلط باشد، وآنها را نیز باید ملحوظ داشت.

مثال ۱. شعاع همگرایی سری تیلر تابع $(1+x^2)^{-1}$ را حول $x=0$ بیابید.

می‌دانیم که به ازای $x^2<1$ تابع $(1+x^2)^{-1}$ دارای بسط سری توانی همگرا به صورت زیر است

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

روشن است کـه این سری بـه ازای $x^2\geqslant 1$ واگراست، زیرا جملـهٔ nام آن بـه ازای $n\to\infty$ به صفرمیل نمی‌کند. بنابراین شعاع همگرایی آن عبارت است از $\rho=1$. (این مطلب را می‌توان با آزمون نسبت تحقیق کرد.)

1. Fuchs (1833–1902)

برای تعیین شعاع همگرایی ، با استفاده از نظریه‌ای که هم‌اکنون شرح آن گذشت، دیده می‌شود که چند جمله‌ای $x^{۲}+۱$ در $x=\pm i$ صفر می‌شود؛ وچون مسافت از ۰ تا i در صفحهٔ مختلط برابر ا است ، شعاع همگرایی سری توانی مزبور حول $x=۰$ برابر ۱ خواهد بود.

مثال ۲ . شعاع همگرایی سری تیلر $(x^{۲}-۲x+۲)^{-۱}$ را حول $x=۰$ ، و حول $x=۱$ بیابید.

نخست دیده می‌شود که

$$x^{۲}-۲x+۲=۰$$

دارای جوابهای $x=۱\pm i$ است. مسافت از $x=۰$ تا $x=۱+i$ یا $x=۱-i$ درصفحهٔ مختلط برابر $\sqrt{۲}$ است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط تابع مزبور به سری تیلر $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_n x^n$ حول $x=۰$ برابر $\sqrt{۲}$ است.

مسافت از $x=۱$ تا $x=۱+i$ یا $x=۱-i$ برابر ۱ است ؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط تابع مزبور به سری تیلر $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}b_n(x-۱)^n$ حول $x=۱$ برابر ۱ است.

بنابر قضیهٔ ۱.۴ سریهای جواب معادلهٔ آیری در مثالهای ۲ و ۳، و معادلهٔ هرمیت در مثال۴ بند پیش، به ترتیب به ازای همهٔ مقادیر x ، $x-۱$ و x همگرایند، زیرا دراین مسائل $P(x)=۱$ و هیچگاه صفر نمی‌شود.

باید تأکیدکرد که سری جواب ممکن است به ازای x در دامنهٔ وسیعتری از آنچه قضیهٔ ۱.۴ معین می‌کند همگرا باشد، بنابراین قضیه در واقع یك کران پایین برای شعاع همگرایی سری جواب به دست می‌دهد. این مطلب با چند جمله‌ای لژاندر، جواب معادلهٔ لژاندر، در مثال زیر توضیح داده می‌شود.

مثال۳. مطلوب است تعیین یك کران پایین برای شعاع همگرایی سری جواب معادلهٔ لژاندر

$$(۱-x^{۲})y''-۲xy'+\alpha(\alpha+۱)y=۰$$

حول $x=۰$ ، α مقداری است ثابت.

چون $P(x)=۱-x^{۲}$ ، $Q(x)=-۲x$ ، و $R(x)=\alpha(\alpha+۱)$ چند جمله‌ای می‌باشند ، و مسافت صفرهای P ، یعنی $x=\pm ۱$ از $x=۰$ برابرا است ، بنابراین سری جواب به صورت $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_n x^n$ حداقل به ازای $|x|<۱$ همگرااست، وامکان دارد به ازای مقادیر بزرگتر x نیزهمگرا باشد. درواقع، می‌توان نشان دادکه اگر α عدد صحیح مثبتی باشد، یکی از سریهای جواب شامل تعداد محدودی جمله خواهد بود، و بنابراین نه فقط به ازای $|x|<۱$ بلکه به ازای همهٔ مقادیر x همگرا خواهد بود. بـه عنوان مثال، اگر

$\alpha = 1$ باشد، چند جمله‌ای جواب عبارت است از $y = x$. مسائل ۱۰ تا ۱۶ درپایان‌این بند را برای بحث کاملتری دربارهٔ معادلهٔ لژاندر ببینید.

مثال ۴. مطلوب است تعیین یک کران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0 \qquad (9)$$

حول نقاط $x=0$ و $x=-1/2$

در اینجا نیز، P، Q و R چند جمله‌ای‌اند، و صفرهای P عبارتند از $x=\pm i$. در صفحهٔ مختلط مسافت از ۰ تا $\pm i$ برابر ۱، و از $-1/2$ تا $\pm i$ برابر $\sqrt{1+1/4}=\sqrt{5}/2$ است. بنابراین در حالت اول سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به ازای $|x|<1$ همگراست، و در حالت دوم سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x+1/2)^n$ حداقل به ازای $|x+1/2|<\sqrt{5}/2$ همگرا خواهد بود.

نکتهٔ جالبی که دربارهٔ معادلهٔ (۹) می‌توان بیان کرد، نتیجه‌ای است ازقضیهٔ وجود ویکتای ۲.۳ و قضیهٔ ۱.۴ که هم‌اکنون گذشت. فرض کنیم که شرایط اولیهٔ $y(0)=y_0$ و $y'(0)=y'_0$ داده شده‌اند. چون به ازای هر x داریم $1+x^2 \neq 0$، بنابر قضیهٔ ۲.۳ یك جواب یکتا برای این مسئلهٔ مقدار اولیه روی $-\infty<x<\infty$ وجود دارد. اما از طرف دیگر، قضیهٔ ۱.۴ تنها وجود سری جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0=y_0, a_1=y'_0)$ را به ازای $-1<x<1$ تضمین می‌نماید. امکان داردکه جواب یکتا روی فاصلهٔ $-\infty<x<\infty$ حول $x=0$ دارای بسطی به سری توانی نباشدکه به ازای همهٔ مقادیر x همگرا باشد.

مثال ۵. آیا می‌توان یك سری جواب حول $x=0$ برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+(\sin x)y'+(1+x^2)y=0$$

تعیین کرد و اگر چنین است شعاع همگرایی آن را بیابید.

در این معادله دیفرانسیل، $p(x)=\sin x$ و $q(x)=1+x^2$. با یادآوری از بند ۱.۴، $\sin x$ دارای بسط سری تیلرحول $x=0$ است، و این بسط به ازای همهٔ مقادیر x همگراست. علاوه براین، q نیز حول $x=0$ دارای بسط به سری تیلر است و آن $q(x)=1+x^2$ می‌باشد، که به ازای همهٔ مقادیر x همگراست. بدین‌سان یك سری جواب به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با a_0 و a_1 دلخواه وجودخواهد داشت، وبه ازای همهٔ مقادیر x همگرا خواهد بود.

مسائل

۱. مطلوب است تعیین $\phi''(x_{۰})$ ، $\phi'''(x_{۰})$ ، و $\phi^{(۴)}(x_{۰})$ بـه‌ازای نقطهٔ داده شدهٔ $x_{۰}$ درصورتی‌که $y=\phi(x)$ یك جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده باشد.

(الف) $y''+xy'+y=۰ ; \quad y(۰)=۱ , \quad y'(۰)=۰$

(ب) $y''+(\sin x)y'+(\cos x)y=۰ ; \quad y(۰)=۰ , \quad y'(۰)=۱$

(ج) $x^{۲}y''+(۱+x)y'+۳(\ln x)y=۰ ; \quad y(۱)=۲ , \quad y'(۱)=۰$

(د) $y''+x^{۲}y'+(\sin x)y=۰ ; \quad y(۰)=a_{۰} , \quad y'(۰)=a_{۱}$

درقسمت (د)، $\phi''(۰)$ ، $\phi'''(۰)$ ، و $\phi^{(۴)}(۰)$ را برحسب $a_{۰}$ و $a_{۱}$ بیان کنید.

۲. درهریك ازمعادلات دیفرانسیل زیریك‌کران پایین‌برای شعاع همگرایی سریهای جواب حول نقطهٔ داده شدهٔ $x_{۰}$ بیابید.

(الف) $y''+۴y'+۶xy=۰ ; \quad x_{۰}=۰ , \quad x_{۰}=۴$

(ب) $(x^{۲}-۲x-۳)y''+xy'+۴y=۰ ; \quad x_{۰}=۴ , \quad x_{۰}=-۴ , \quad x_{۰}=۰$

(ج) $(۱+x^{۳})y''+۴xy'+y=۰ ; \quad x_{۰}=۰ , \quad x_{۰}=۲$

(د) $xy''+y=۰ ; \quad x_{۰}=۱$

۳. درهریك از معـادلات دیفرانسیل مسئلهٔ ۱ بند ۲.۴ یك‌کـران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب بیابید.

۴. معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف[1] عبارت است از

$$(۱-x^{۲})y''-xy'+\alpha^{۲}y=۰$$

که درآن α مقداری است ثابت.

(الف) دوجواب مستقل خطی برحسب توانهای x به‌ازای $|x|<۱$ بیابید.

(ب) نشان دهیدکـه اگـر α برابر یك عدد صحیح نـامنفی n بـاشد، آنگاه یك چندجمله‌ای جواب ازدرجهٔ n وجود خواهد داشت. این‌چندجمله‌ایها را هنگامی‌که به‌طور مناسبی یکانی شوند، چندجمله‌ایهای چبیشف می‌نامند، و درمسائلی‌که بخواهند برای‌توابعی که درفاصلهٔ $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ تعریف شده‌اند، تقریب چندجمله‌ای بیابند‌کاربردهای بسیاری دارند.

(ج) برای هریك‌ازحالتهای $\alpha=n=۰ , ۱ , ۲ , ۳$ یك جواب چندجمله‌ای‌بیابید.

۵. سه جملهٔ اول هر یك از دوسری جواب مستقل خطی معادلهٔ

$$y''+(\sin x)y=۰$$

1. Tchebycheff (1821-1894)

برحسب توانهای x، را بیابید.

راهنمایی: $\sin x$ را حول $x=0$ به سری تیلر بسط دهید، وتعدادکافی ازجملههای آن‌را که برای محاسبهٔ ضرایب $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لازم است درنظر بگیرید.

۶. سه جملهٔ اول هریك از دوسری جواب مستقل خطی معادلهٔ

$$e^x y''+xy=0$$

برحسب توانهای x، را بیابید. شعاع همگرایی هریك ازسریهای جواب را تعیین کنید.

راهنمایی: e^x یا xe^{-x} را حول $x=0$ بهسری توانی بسط دهید.

۷. اگر بدانیم که x و x^2 جوابهای یك معادله دیفرانسیل

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

می‌باشند، دربارهٔ عادی یا غیرعادی بودن نقطهٔ $x=0$ چه می‌توان گفت؟

راهنمایی: ازقضیهٔ ۲.۳ استفاده کنید، و مقادیر x و x^2 را به ازای $x=0$ موردتوجه قرار دهید.

۸*. برای اثبات آنکه امکان دارد تابعی دریك نقطه بینهایت‌بار مشتق‌پذیر باشد، اما درحول این نقطه دارای بسط بهسری تیلر نباشد تابع زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

با استفاده‌از تعریف مشتق به‌عنوان حدخارج‌قسمت نموها ثابت کنیدکه $f'(0)=f''(0)=0$. می‌توان ثابت کردکه f درمبدأ بینهایت‌بار مشتق‌پذیر است، و به ازای هر n داریم $f^{(n)}(0)=0$. بنابراین سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

بهازای همهٔ مقادیر x صفر می‌شود، وتنها در $x=0$ به $f(x)$ می‌گراید.

۹. روش سریها راکه دراین بندمورد بحث قرارگرفت می‌توان مستقیماً برای‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول $P(x)y'+Q(x)y=0$ درنقطهٔ x_0، هنگامی‌که $p=Q/P$ حول نقطهٔ مزبور دارای بسط بهسری تیلر باشد به‌کار برد. چنین نقطه‌ای را نقطهٔ عادی می‌نامند، وعلاوه براین، شعاع همگرایی سری

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

حداقل برابرشعاع همگرایی سری Q/P خواهد بود. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش

سری برحسب توانهای x حل کنید، وتحقیق کنید که درهرحالت a_0 دلخواه است. مسائل (ه) و (و) مشتمل برمعادلات دیفرانسیل ناهمگن است، و روش سریها را می‌توان به‌آسانی دراین مورد تعمیم داد.

(الف) $y' - y = 0$ (ب) $y' - xy = 0$

(ج) سه جملهٔ $y' = e^{x^2} y$,   (د) $(1-x)y' = y$

(ه)* $y' - y = x^2$ (و)* $y' + xy = 1 + x$

درصورت‌امکان، سری جواب‌را باجوابی‌که به‌روشهای‌فصل ۲ به‌دست می‌آید مقایسه‌کنید.

معادلهٔ لژاندر. مسائل ۱۰ تا ۱۶ دربارهٔ معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

است. چنانکه درمثال ۳ بیان شد، نقطهٔ $x=0$ یك نقطه عادی این معادله است، ومسافت مبدأ تا نزدیکترین صفر $P(x) = 1 - x^2$ برابر ۱ است. بنابراین شعاع همگرایی سری جواب حول $x=0$ حداقل برابر ۱ است. باید توجه داشت که دراین معادله تنها لازم است حالت $\alpha > -1$ را درنظر بگیریم، زیرا اگر $\alpha \leqslant -1$، آنگاه با جایگزینی $\alpha = -(1+\gamma)$ که درآن $\gamma \geqslant 0$ است، به معادلهٔ لژاندر زیر می‌رسیم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma+1)y = 0$$

۱۰. نشان دهیدکه دوجواب‌مستقل خطی‌معادلهٔ لژاندر، به‌ازای $|x| < 1$ عبارتند از

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

۱۱. نشان دهیدکه اگر α، برابر صفر ویا یك عدد صحیح زوج مثبت $2n$ باشد، سری جواب y_1 به‌یك چندجمله‌ای از درجهٔ $2n$ تبدیل می‌شود،که تنها شامل‌توانهای زوج x است. نشان دهیدکه این چندجمله‌ایها متناظر به $\alpha = 0, 2, 4$، عبارتند از

$$1,\ 1 - 3x^2,\ 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$$

نشان دهیدکه اگـر α، برابر یك عدد صحیح فرد مثبت $۲n+۱$ باشد، سری جواب $y_۲$ به‌یك چندجمله‌ای از درجهٔ $۲n+۱$ که تنها شامل توانهـای فرد x است تبدیل می‌شود،و چندجمله‌ایهای متناظر به $\alpha=۱\ ,\ ۳\ ,\ ۵$ عبارتند از

$$x\ ,\ x-\frac{۵}{۳}x^{۳}\ ,\ x-\frac{۱۴}{۳}x^{۳}+\frac{۲۱}{۵}x^{۵}$$

۱۲. چندجمله‌ای لژاندر P_n با جواب چندجمله‌ای معادلهٔ لژاندر بـه‌ازای $\alpha=n$ که درشرط $P_n(۱)=۱$ صدق کند تعریف می‌شود. بـا استفاده ازنتایج مسئلهٔ ۱۱، نشان دهیدکه

$$P_{\circ}(x)=۱\ ,\quad P_{۱}(x)=x\ ,\quad P_{۲}(x)=\frac{۱}{۲}(۳x^{۲}-۱)\ ,\quad P_{۳}(x)=\frac{۱}{۲}(۵x^{۳}-۳x)$$

می‌توان نشان دادکه فرمول عمومی آن عبارت است از

$$P_n(x)=\frac{۱}{۲^n}\sum_{k=\circ}^{[n/۲]}\frac{(-۱)^k(۲n-۲k)!}{k!(n-k)!(n-۲k)!}\,x^{n-۲k}$$

که در آن $[n/۲]$ نمایشگر بزرگترین عدد صحیحی است که از $n/۲$ تجاوز نکند. باتوجه به‌عبارت $P_n(x)$ متناظر به‌مقادیر زوج وفرد n نشان دهیدکه $P_n(-۱)=(-۱)^n$.

۱۳. چندجمله‌ای لژانـدر درفیزیك ریاضی دارای نقش مهمی است. مثلاً، درحل معادلهٔ لاپلاس (معادلهٔ پتانسیل) درمختصات کروی به معادلهٔ

$$\frac{d^{۲}F(\varphi)}{d\varphi^{۲}}+\operatorname{cotg}\varphi\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}+n(n+۱)F(\varphi)=\circ\ ,\qquad \circ<\varphi<\pi$$

برمی‌خوریم کـه در آن n یك عـدد صحیح مثبت است. نشان دهیدکـه بـا تعویض متغیر $x=\cos\varphi$ برای تابع $y=f(x)=F(\cos^{-۱}x)$ به معادلهٔ لژاندر با $\alpha=n$می‌رسیم.

۱۴. نشان دهیدکـه به ازای $n=\circ\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳$ چندجمله‌ایهای لژاندر متناظر از فرمول

$$P_n(x)=\frac{۱}{۲^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{۲}-۱)^n$$

به‌دست می‌آیند. این فرمول، کـه به‌فرمول رودریك[1] معروف است، به‌ازای همهٔ مقادیـر صحیح ومثبت n صادق است.

۱۵. نشان دهیدکه معادلهٔ لژاندر را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$[(۱-x^{۲})y']'=-\alpha(\alpha+۱)y$$

1. Rodrigues (1794–1851)

و از اینجا نتیجه می‌شود که $[(1-x^2)P_n'(x)]'=-n(n+1)P_n(x)$ و $[(1-x^2)P_m'(x)]'=-m(m+1)P_m(x)$ باضرب معادلهٔ اول در $P_m(x)$ ومعادلهٔ دوم در $P_n(x)$، وسپس باانتگرال گیری جزء به جزء نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=0 \quad n\neq m \text{ اگر}$$

این خاصیت چندجمله‌ایهای لژاندر را خاصیت تعامدی می‌نامند. اگر $m=n$ باشد، می‌توان نشان داد که مقدار انتگرال بالا برابر است با $2/(2n+1)$.

۱۶. می‌توان هرچندجمله‌ای درجهٔ nام f را برحسب ترکیب خطی از P_0، P_1، P_2، ...، P_n بیان کرد:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$$

با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۵، نشان دهید که

$$a_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx$$

۳.۴ نقاط غیرعادی منظم

در این بند به‌بررسی معادلهٔ

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad (1)$$

در همسایگی یك نقطهٔ غیرعادی x_0 می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر توابع P، Q و R چندجمله‌ایهایی بدون عامل مشترك باشند، نقاط غیرعادی معادلهٔ (۱) نقاطی هستند که به‌ازای آنها داریم $P(x)=0$.

مثال ۱. مطلوب است تعیین نقاط غیرعادی ونقاط عادی معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (2)$$

روشن است که نقطهٔ $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی است، زیرا $P(x)=x^2$ به‌ازای آن صفر می‌شود. علاوه براین، اگر معادلهٔ (۲) را بر x^2 تقسیم کنیم، ضرایب y' و y در $x=0$ نامعین خواهند بود. همهٔ نقاط دیگر، نقاط عادی معادلهٔ (۲) می‌باشند.

مثال ۲. مطلوب است تعیین نقاط غیرعادی ونقاط عادی معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \qquad (3)$$

که در آن α مقداری است ثابت.

نقاط غیرعادی عبارتند ازصفرهای $P(x)=1-x^2$، یعنی نقاط $x=\pm 1$. همهٔ نقاط دیگر نقاط عادی‌اند.

جوابهای معادلهٔ (۱) غالباً درهمسایگی یك نقطهٔ غیرعادی x_0 ازلحاظ مقدار بسیار بزرگ می‌شوند، ومبین تغییرات سریع، یا ویژگیهای بخصوصی می‌باشند. بدین‌سان رفتار یك دستگاه فیزیکی درتحت چنین معادله‌ای اغلب درهمسایگی یك نقطهٔ غیرعادی بسیار جالبتر است. غالباً شرایط غیرعادی هندسی دریك مسئلهٔ فیزیکی، ازقبیل گوشه‌ها یا لبه‌های تیز، به نقاط غیرعادی درمعادلهٔ دیفرانسیل متناظر می‌انجامند. نقاط غیرعادی یك معادلهٔ دیفرانسیل باآنکه معمولاً تعدادشان اندك است، ازلحاظ ریاضی اشکال اصلی جواب را در دامنه‌ای وسیعتر ازآنچه درنظر اول می‌توان حدس زد مشخص می‌کنند. بدین‌سان، در حالی‌که ممکن است علاقه‌مند باشیم که ازاین چندنقطهٔ غیرعادی معادلهٔ دیفرانسیل اجتناب کنیم، اما در واقع لازم است‌که جواب را به دقیقترین‌وجه دراین نقاط بررسی کنیم.

متأسفانه، هنگامی‌که x_0 یك نقطهٔ غیرعادی است از روشهای بند پیش کاری ساخته نیست، ولازم است‌که بسطهایی عامتر ازبسط به‌سری تیلر را درنظر بگیریم. این موضوع ذیلاً با معادلهٔ دیفرانسیل مذکور درمثال ۳ توضیح داده می‌شود، دراین معادله یکی‌ازجوابها حول $x=0$ فاقد بسط به‌سری تیلر است. بدون‌اطلاع اضافی دربارهٔ تغییرات Q/P و R/P درهمسایگی نقطهٔ غیرعادی، بررسی رفتار جوابهای معادلهٔ (۱) درمجاورت $x=x_0$ غیرممکن است. امکان داردکه معادلهٔ (۱) دارای دوجواب مستقل خطی باشدکه وقتی $x\to x_0$ کراندار باقی بماند، یا آنکه تنها یك جواب‌کراندار بماند و دیگری بینهایت شود، یا آنکه وقتی $x\to x_0$ هر دوجواب بینهایت شوند. این موضوع را با مثالهای زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y''-2y=0 \tag{۴}$$

در $x=0$ دارای یك نقطهٔ غیرعادی است. با جایگذاری مستقیم می‌توان به‌آسانی تحقیق کردکه به ازای $x>0$ یا $x<0$، $y=x^2$ و $y=1/x$ دوجواب مستقل خطی معادلهٔ (۴) می‌باشند. بدین‌سان درهرفاصله‌ای‌که شامل مبدأ نباشد، جواب عمومی معادلهٔ (۴) عبارت خواهد بود از $y=c_1x^2+c_2x^{-1}$. تنها جواب معادلهٔ (۴) که وقتی $x\to 0$ کراندار می‌باشد عبارت است از $y=c_1x^2$. در واقع، این جواب درمبدأ تحلیلی است با اینکه اگر معادلهٔ (۴) را به صورت متعارف $y''-(2/x^2)y=0$ بنویسیم، تابع $q(x)=-2/x^2$ در $x=0$ تحلیلی نیست، ونمی‌توان قضیهٔ ۱.۴ را به‌کار برد. ازطرف دیگر، باید توجه داشت‌که جواب $y=x^{-1}$ درحول مبدأ دارای بسط به سری تیلر نیست (در $x=0$ تحلیلی نیست)؛ بنابراین، از روش بند ۲.۴ دراین حالت کاری ساخته نیست.

مثال ۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad (5)$$

نیز در $x = 0$ دارای یك‌نقطهٔ غیرعادی است. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $y_1(x) = x$ و $y_2(x) = x^2$ دوجواب مستقل خطی معادلهٔ (۵) می‌باشند، وهردو در $x = 0$ تحلیلی‌اند. با وجود این، نمی‌توان به طرح مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای با شرایط اولیه در $x = 0$ پرداخت. اعمال شرایط اولیهٔ دلخواه در $x = 0$ غیرممکن است، زیرا هرترکیب خطی x و x^2 در $x = 0$ برابر صفر است.

می‌توان معادلهٔ دیفرانسیلی با یك نقطهٔ غیرعادی x_0 طوری ساخت‌که هرجواب آن وقتی $x \to x_0$ بینهایت شود. حتی اگـر معادلـهٔ (۱) دارای جوابی نباشد کـه وقتی $x \to x_0$ کراندار باقی بمانـد، اغلب تعیین چگونگی رفتار جوابهای معادلهٔ (۱) وقتی $x \to x_0$ دارای اهمیت است؛ مثلاً، آیـا y همانند $(x-x_0)^{-1}$ یا $|x-x_0|^{-1/2}$، یا به‌گونه‌ای دیگر به‌بینهایت میل می‌کند؟

به منظور آنکـه یك نظریهٔ ریاضی سادهٔ مستدل برای حل معادلهٔ (۱) در همسایگی یك نقطـهٔ غیرعادی x_0، بیاییم، لازم است بحث را به حالتهای بـه اصطلاح «غیرعادی ضعیف»که در آن غیرعادی بودن توابع Q/P و R/P در $x = x_0$ چندان شدید نباشد، محدود کنیم. البته این‌مفهوم ازپیش روشن نیست. اما، بعداً ثابت خواهیم کرد (بند ۱.۵.۴ مسائل ۵ و ۶ را ببینید)که اگر P، Q و R چند جمله‌ای باشند، شرایط مشخصهٔ «غیرعادی ضعیف» عبارتند از متناهی بودن

$$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad (6)$$

و

$$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \qquad (7)$$

این بدین‌معنی است که Q/P از $(x-x_0)^{-1}$ و R/P از $(x-x_0)^{-2}$ غیرعادیتر نیستند. چنین نقطه‌ای را نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۱) می‌نامند. نقطهٔ x_0 در مورد توابعی‌عامتر از چند جمله‌ایها می‌تواند نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۱) باشد، و برای این منظور باید توابع[1]

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \qquad (8)$$

هردوحول x_0 دارای سری تیلرهمگرا باشند، یعنی به عبارت دیگر توابع (۸) در $x = x_0$ تحلیلی باشند. از روابط (۶) و (۷) نتیجه می‌شودکه اگر P، Q و R چند جمله‌ایهای

---

۱. توابع داده شده با روابط (۸) ممکن است در x_0 معین نباشند، و دراین حالت باید مقادیر آنها را در x_0 برابرحد آنها وقتی $x \to x_0$ گرفت.

مناسبی باشند شرایط مزبور برقرار خواهد بود . هرنقطهٔ غیرعادی معادلهٔ (۱) راکه نقطهٔ غیرعادی منظم نباشد، نقطهٔ غیرعادی نامنظم معادلهٔ (۱) می‌نامند.

در بندهای بعدی چگونگی‌حل معادلهٔ (۱) را در همسایگی یك نقطهٔ غیرعادی منظم مورد بحث قرار می‌دهیم . بحث دربارهٔ جوابهای معادلـهٔ دیفرانسیل در همسایگی نقاط غیرعادی نامنظم از حدود یك‌کتاب مقدماتی خارج است.

مثال ۵. در مثال ۲ دیدیم که نقاط غیرعادی معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

عبارتند از $x=\pm 1$. تعیین کنید که آیا این نقاط غیرعادی، منظم‌اند یا نامنظم.

نخست به بررسی‌نقطهٔ $x=1$ می‌پردازیم، ومشاهده می کنیم که با تقسیم بر $1-x^2$ ضرایب y' و y به ترتیب عبارتند از $-2x/(1-x^2)$ و $\alpha(\alpha+1)/(1-x^2)$. بدین سان حدود زیر را محاسبه می کنیم

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x}=1$$

و

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x}=0$$

چون این حدود متناهی‌اند، نقطـهٔ $x=1$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است. بـه همین طریق می‌توان نشان دادکه $x=-1$ نیز یك نقطهٔ غیرعادی منظم است.

مثال ۶. نقاط غیرعادی معادلهٔ دیفرانسیل

$$2(x-2)^2xy''+3xy'+(x-2)y=0$$

را بیابید و آنها را برحسب منظم یا نامنظم بودن طبقه بندی کنید.

با تقسیم بر $2(x-2)^2x$ خواهیم داشت

$$y''+\frac{3}{2(x-2)^2}y'+\frac{1}{2(x-2)x}y=0$$

بنابراین

$p(x)=Q(x)/P(x)=3/2(x-2)^2$ و $q(x)=R(x)/P(x)=1/2x(x-2)$.

نقاط غیرعادی عبارتند از $x=0$ و $x=2$. $x=0$ را در نظرمی گیریم. داریم

$$\lim_{x\to 0} xp(x)=\lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)}=0$$

چون این حدود متناهی‌اند، $x=0$ یك نقطه غیر عـادی منظم است. درمورد $x=2$ دیده می‌شود که

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x)=\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2}$$

وجود ندارد؛ بنابراین $x=2$ یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است.

مسائل

درمسائل ۱ تا ۸ تعیین کنید که آیا هریك ازنقاط ۱ −، ۰ و۱ برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شدهٔ یك نقطهٔ عادی، یك نقطهٔ غیرعادی منظم، یا یك نقطهٔ غیرعادی منظم است.

۱. $xy''+(1-x)y'+xy=0$

۲. $x^2(1-x^2)y''+2xy'+4y=0$

۳. $2x^4(1-x^2)y''+2xy'+3x^2y=0$

۴. $x^2(1-x^2)y''+\frac{2}{x}y'+4y=0$

۵. $(1-x^2)^2y''+x(1-x)y'+(1+x)y=0$

۶. $y''+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2y'+3(1+x)^2y=0$

۷. $(x+3)y''-2xy'+(1-x^2)y=0$

۸. $x(1-x^2)^3y''+(1-x^2)^2y'+2(1+x)y=0$

۹. تعیین کنید که آیا نقطهٔ غیرعادی $x=0$ معادلهٔ دیفرانسیل بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

یك نقطهٔ غیرعادی منظم یا نامنظم است.

۱۰. برای معادلهٔ دیفرانسیل زیرمشخص کنیدکـه آیا نقطهٔ $x=0$ یك نقطهٔ عادی، یك نقطهٔ غیرعادی منظم، یا یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است:

$$xy''+e^xy'+(3\cos x)y=0$$

۱۱. برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیرمشخص کنیدکه آیا نقطهٔ $x=0$ یك نقطهٔ عادی، یك نقطهٔ غیرعادی منظم، یا یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است:

(الف) $$x^2y''+2(e^x-1)y'+(e^{-x}\cos x)y=0$$

(ب) $$x^2y''-3(\sin x)y'+(1+x^2)y=0$$

راهنمایی: سریهای توانی e^x و $\sin x$ را به ترتیب برای قسمتهای (الف) و (ب) درنظر بگیرید.

۱۲. فرض کنیم تابع f که بهازای $x\neq 0$ با $f(x)=x^{-1}\sin x$ و $f(0)=1$ تعریف شده است، در $x=0$ تحلیلی است، نشان دهیدکه $x=0$ برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(\sin x)y''+xy'+4y=0$$

یك نقطهٔ غیرعادی منظم و برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(x\sin x)y''+3y'+xy=0$$

یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است.

۱۳*. تعاریفی که در بندهای پیش برای نقطهٔعادی و نقطهٔ غیرعادی منظم داده شد، تنها هنگامی بهکارمی روند که نقطهٔ x_0 متناهی باشد. درمباحث پیشرفتهترمعادلات دیفرانسیل اغلب لازم می آیدکه نقطهٔ واقع دربینهایت مورد بررسی قرارگیرد. برای اینمنظوراز تعویض متغیر $\xi=1/x$ استفاده کرده، ومعادلهٔ حاصل را در $\xi=0$ بررسی می کنند. نشان دهیدکه برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

نقطهٔ واقع دربینهایت یك نقطهٔ عادی است، اگر

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi}-\frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right],\quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4P(1/\xi)}$$

حول $\xi=0$ دارای بسط بهسری تیلر باشد. همچنین نشان دهیدکه نقطهٔ واقع دربینهایت یك نقطهٔ غیرعادی منظم است، اگر یکی از دوتابع بالا دارای بسط بهسری تیلر نباشد، اما توابع

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi}-\frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right],\quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2P(1/\xi)}$$

هردو دارای چنین بسطی باشند.

۱۴*. تعیین کنیدکه آیا برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیرنقطهٔ واقع دربینهایت، یك نقطهٔ عادی، یك نقطهٔ غیرعادی منظم، یا یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است.

(الف) معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

(ب) معادلهٔ بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

(ج) معادلهٔ هرمیت

$$y''-2xy'+\lambda y=0$$

(د) معادلهٔ آیری

$$y''-xy=0$$

۴.۴ معادلات اویلر

یکی ازساده‌ترین نمونه‌های معادلهٔ دیفرانسیلی که دارای یك نقطهٔ غیرعادی منظم باشد، معادلهٔ اویلر یا معادلهٔ همبعدی

$$L[y]=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha x\frac{dy}{dx}+\beta y=0 \qquad (1)$$

است که در آن α و β دو ثابت‌اند. جز درمواردی که خلاف آن تصریح شود، α و β را حقیقی فرض می‌کنیم. به‌آسانی دیده می‌شود که $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۱) می‌باشد. چون حل معادلهٔ اویلر نمونهٔ بارز حل همهٔ معادلات دیفرانسیل با نقطهٔ غیرعادی منظم است، شایسته است که پیش از بررسی مسئلهٔ کلیتر، این معادله را به‌طور دقیق مورد بحث قراردهیم.

درهرفاصله‌ای که حاوی مبدأ نباشد، معادلهٔ (۱) دارای یك جواب عمومی به‌صورت

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

است، که در آن y_1 و y_2 استقلال خطی دارند. برای‌آسانی نخست فاصلهٔ $x>0$، را در نظر می‌گیریم و بعداً نتایج را به فاصلهٔ $x<0$ تعمیم می‌دهیم. نخست، باتوجه به $(x^r)'=rx^{r-1}$ و $(x^r)''=r(r-1)x^{r-2}$، دیده می‌شود که اگر فرض کنیم معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌صورت[1]

$$y=x^r \qquad (2)$$

است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}L[x^r]&=x^2(x^r)''+\alpha x(x^r)'+\beta x^r\\&=x^rF(r)\end{aligned} \qquad (3)$$

---

۱. این فرض همچنین براساس این نکته که معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول اویلر $xy'+ky=0$ دارای جواب $y=x^{-k}$ است، مطرح می‌شود.

که در آن

$$F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta \qquad (4)$$

اگر r یك ریشه معادلهٔ درجه دوم $F(r)=0$ باشد، آنگاه $L[x^r]$ صفر است، و $y=x^r$ یك جواب معادلهٔ (۱) خواهدبود. ریشه‌های $F(r)=0$ عبارتند از

$$r_1=\frac{-(\alpha-1)+\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2}$$
$$r_2=\frac{-(\alpha-1)-\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2} \qquad (5)$$

و $F(r)=(r-r_1)(r-r_2)$. عیناً همانند حالت معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت (بند ۵.۳ را ببینید)، باید حالتهایی را که در آن $(\alpha-1)^2-4\beta$ مثبت، صفر، و منفی است جداگانه بررسی کنیم. درواقع، تمام نظریه‌ای که دراین بند عرضه مـی‌شود، همانند نظریهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت است، که در آن x^r بـه‌جای e^{rx} جایگزین شده است (مسائل ۴ و ۵ را ببینید). تذکر این نکته نیزلازم است که برای حل یك معادلهٔ اویلر خاص بسیار آسانتراست که جایگزینی $y=x^r$ را انجام داده، ومعادله درجه‌دوم(۴) را به دست آورد، وریشه‌های r_1 و r_2 را محاسبه‌کرد، تا اینکه فرمول عمومی(۵) راحفظ کرد.

حالت۱. $(\alpha-1)^2-4\beta>0$. درایـن حالت ازروابـط (۵) دو ریشهٔ حقیقی مختلف r_1 و r_2 به‌دست‌می‌آید. چون به‌ازای $r_1\neq r_2$ و $x>0$، $W(x^{r_1}, x^{r_2})$ هیچگاه صفر نمی‌شود، درنتیجه جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت‌است از

$$y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2} \qquad x>0 \qquad (6)$$

توجه شودکه اگر r عددگویایی نباشد، آنگاه x^r با رابطهٔ $x^r=e^{r\ln x}$ تعریف می‌شود.

مثال۱. مطلوب است حل معادلهٔ

$$2x^2y''+3xy'-y=0, \qquad x>0 \qquad (7)$$

با قراردادن $y=x^r$ خواهیم داشت

$$x^r(2r^2+r-1)=0$$
$$x^r(2r-1)(r+1)=0$$

بنابراین

$$r_1=\frac{1}{2}, \quad r_2=-1$$

و

$$y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1}, \qquad x>0 \qquad (8)$$

حالت۲. $(\alpha-1)^2-4\beta=0$. دراین حالت، بنابر روابط (۵)، داریم
$$r_1=r_2=-(\alpha-1)/2$$
و برای معادلهٔ دیفرانسیل فقط جواب $y_1(x)=x^{r_1}$ به دست می‌آید. جواب دوم را می‌توان باروش کاهش مرتبه به‌دست آورد، اما به‌منظور بحثی که درپیش داریم ازروش دیگری استفاده می‌کنیم. چون $r_1=r_2$، درنتیجه $F(r)=(r-r_1)^2$. بدین‌سان دراین حالت نه‌تنها $F(r_1)=0$، بلکه علاوه برآن $F'(r_1)=0$. این‌نکته مبین آن است که بایدازمعادلهٔ (۳) نسبت به r مشتق گرفت وآنگاه r را برابر r_1 قرارداد. بامشتق‌گیری از معادلهٔ (۳) نسبت به r داریم
$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r]=\frac{\partial}{\partial r}[x^rF(r)]$$
باجایگزینی $F(r)$، و تعویض ترتیب مشتق‌گیری نسبت به x و r، و توجه به $\partial(x^r)/\partial r=x^r\ln x$، به‌دست می‌آید
$$L[x^r\ln x]=(r-r_1)^2x^r\ln x+2(r-r_1)x^r \tag{۹}$$
طرف دوم معادلهٔ (۹) به ازای $r=r_1$ صفرمی‌شود؛ درنتیجه
$$y_2(x)=x^{r_1}\ln x,\quad x>0 \tag{۱۰}$$
یك جواب دیگر معادلهٔ (۱) است. چون x^{r_1} و $x^{r_1}\ln x$ به ازای $x>0$ مستقل‌خطی‌اند، جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است‌از
$$y=(c_1+c_2\ln x)x^{r_1},\quad x>0 \tag{۱۱}$$
مثال۲. مطلوب است‌حل معادلهٔ
$$x^2y''+5xy'+4y=0,\quad x>0 \tag{۱۲}$$
باقراردادن $y=x^r$ خواهیم داشت
$$x^r(r^2+4r+4)=0$$
ازآنجا $r_1=r_2=-2$، وبنابراین
$$y=x^{-2}(c_1+c_2\ln x),\quad x>0 \tag{۱۳}$$
حالت۳. $(\alpha-1)^2-4\beta<0$. دراین حالت ریشه‌های r_1 و r_2 مختلط‌مزدوج می‌باشند، مثلا $r_1=\lambda+i\mu$ و $r_2=\lambda-i\mu$. دراینجا باید به‌توضیح معنای x^r هنگامی‌که r مختلط است بپردازیم. باتوجه به‌آنکه به‌ازای $x>0$ و r حقیقی می‌توان نوشت
$$x^r=e^{r\ln x} \tag{۱۴}$$
همین رابطه را می‌توان به‌عنوان تعریف x^r به‌ازای r مختلط به‌کاربرد. آنگاه

$$x^{(\lambda+i\mu)}=e^{(\lambda+i\mu)\ln x}=e^{\lambda \ln x}e^{i\mu \ln x}$$
$$=x^{\lambda}e^{i\mu \ln x}$$
$$=x^{\lambda}[\cos(\mu \ln x)+i\sin(\mu \ln x)],\quad x>0 \qquad (۱۵)$$

چون برای x^r به‌ازای مقادیر مختلط r این تعریف را در نظر بگیریم، می‌توان تحقیق‌کرد که قوانین معمول جبر و حساب دیفرانسیل دربارهٔ آن صدق می‌کند، و بنابراین x^{r_1} و x^{r_2} جوابهای معادلهٔ (۱) خواهندبود. جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=c_1x^{\lambda+i\mu}+c_2x^{\lambda-i\mu} \qquad (۱۶)$$

نقص این عبارت درآن است‌که توابع $x^{\lambda+i\mu}$ و $x^{\lambda-i\mu}$ دارای مقادیر مختلط‌اند. یادآور می‌شویم‌که وضعیت مشابهی درمورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت هنگامی که ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ مختلط بودند، وجود داشت. با استفاده ازهمان روشی‌که بـه کاررفت، دیده می‌شودکه قسمتهای حقیقی وموهومی $x^{\lambda+i\mu}$،

$$x^{\lambda}\cos(\mu \ln x) \quad \text{و} \quad x^{\lambda}\sin(\mu \ln x) \qquad (۱۷)$$

جوابهای معادلهٔ (۱) می‌باشند ودارای استقلال خطی‌اند. بدین‌سان برای حالت ریشه‌های مختلط، جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y=c_1x^{\lambda}\cos(\mu \ln x)+c_2x^{\lambda}\sin(\mu \ln x),\quad x>0 \qquad (۱۸)$$

مثال۳. مطلوب است حل

$$x^2y''+xy'+y=0 \qquad (۱۹)$$

با قراردادن $y=x^r$ خواهیم داشت

$$x^r[r(r-1)+r+1]=0$$

ازآنجا $r=\pm i$، وجواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x),\quad x>0 \qquad (۲۰)$$

اکنون فاصلهٔ $x<0$ را درنظر می‌گیریم. دراینجا به این اشکال بـرمی‌خوریم‌که x^r هنگامی‌که x منفی باشد، و r عدد صحیح‌نباشد چه‌معنایی می‌تواند داشته باشد؛ به‌همین طریق نیز $\ln x$ به ازای $x<0$ نامعین است. می‌توان نشان دادکه جوابهای معادلهٔ‌اویلر که به‌ازای $x>0$ به‌دست‌آمدند، به‌ازای $x<0$ نیز معتبرند، اما عموماً دارای مقادیر مختلط می‌باشند. بدین‌سان درمثال ۱ جواب $x^{1/2}$ به‌ازای $x<0$ موهومی‌است.

همواره می‌توان برای معادلهٔ اویلر (۱) در فاصلهٔ $x<0$ بـا تعویض متغیر زیـر جوابهایی بامقدارحقیقی به‌دست‌آورد. گیریم $x=-\xi$ که درآن $\xi>0$، وقرارمی‌دهیم $y=u(\xi)$. بدین‌سان خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=-\frac{du}{d\xi},\quad \frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{d\xi}\left[-\frac{du}{d\xi}\right]\frac{d\xi}{dx}=\frac{d^{2}u}{d\xi^{2}} \tag{۲۱}$$

ومعادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\xi^{2}\frac{d^{2}u}{d\xi^{2}}+\alpha\xi\frac{du}{d\xi}+\beta u=0,\quad \xi>0 \tag{۲۲}$$

و این دقیقاً همان مسئله‌ای است که هم‌اکنون حل کردیم؛ از روابط (۶)، (۱۱) ، و (۱۸) خواهیم داشت

$$u(\xi)=\begin{cases}c_1\xi^{r_1}+c_2\xi^{r_2}\\(c_1+c_2\ln\xi)\xi^{r_1}\\c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu\ln\xi)+c_2\xi^{\lambda}\sin(\mu\ln\xi)\end{cases} \tag{۲۳}$$

برحسب آنکه $(\alpha-1)^2-4\beta$ مثبت، صفر، یا منفی باشد. برای آنکه u را برحسب x به دست آوریم، درروابط (۲۳) به‌جای ξ باید $-x$ را قرار داد.

می‌توان این نتایج را برای $x>0$ و $x<0$ به صورت زیر ترکیب کرد. به‌ازای $x>0$ داریم $|x|=x$ و به‌ازای $x<0$، $-x=|x|$. بدین‌سان کافی است که درروابط (۶)، (۱۱)، و (۱۸) به‌جای x ، $|x|$ را قرار دهیم، تامتناظر به هرفاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد جوابهایی بامقدار حقیقی به‌دست آورد (مسائل ۶ و ۷ را نیز ببینید). این نتایج در قضیهٔ زیر خلاصه شده‌اند.

قضیهٔ ۲۰۴. برای حل معادلهٔ اویلر (۱)

$$x^{2}y''+\alpha xy'+\beta y=0$$

درهرفاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، قرار می‌دهیم $y=x^r$، و r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ

$$F(r)=r^{2}+(\alpha-1)r+\beta=0$$

را محاسبه می‌کنیم.

اگر ریشه‌ها حقیقی و نابرابر باشند،

$$y=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2} \tag{۲۴}$$

اگر ریشه‌ها حقیقی و برابر باشند،

$$y=(c_1+c_2\ln|x|)|x|^{r_1} \tag{۲۵}$$

اگر ریشه‌ها مختلط باشند،

$$y=|x|^{\lambda}[c_1\cos(\mu\ln|x|)+c_2\sin(\mu\ln|x|)] \tag{۲۶}$$

که درآن $r_1,\ r_2=\lambda\pm i\mu$.

درمورد یك معادلهٔ اویلر به‌صورت

$$(x-x_\circ)^{2}y''+\alpha(x-x_\circ)y'+\beta y=0 \qquad (27)$$

وضعیت دقیقاً همان است و باید جوابهایی به‌صورت $y=(x-x_\circ)^r$ جستجو کرد. جواب عمومی ازروابط (۲۴)، (۲۵) یا (۲۶) باقراردادن $(x-x_\circ)$ به‌جای x به‌دست می‌آید. به طریق دیگر، می‌توان معادلهٔ (۲۷) را با تعویض متغیر مستقل $t=x-x_\circ$ بـه صورت معادلهٔ (۱) درآورد.

به‌طورکلی درمورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با نقطهٔ غیرعادی منظم همان‌وضعیت معادلهٔ اویلر را خواهیم داشت. این‌مسئله را دربند بعد بررسی خواهیم‌کرد.

مسائل

۱. برای هریك ازمعادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر جواب عمومی‌ای را بیابیدکه درهرفاصله‌ای‌که شامل نقطهٔ غیرعادی نیست معتبرباشد.

(الف) $x^{2}y''+4xy'+2y=0$

(ب) $(x+1)^{2}y''+3(x+1)y'+\frac{3}{4}y=0$

(ج) $x^{2}y''-3xy'+4y=0$

(د) $x^{2}y''+3xy'+5y=0$

(ه) $x^{2}y''-xy'+y=0$

(و) $(x-1)^{2}y''+8(x-1)y'+12y=0$

(ز) $x^{2}y''+6xy'-y=0$

(ح) $2x^{2}y''-4xy'+6y=0$

(ط) $x^{2}y''-5xy'+9y=0$

(ی) $(x-2)^{2}y''+5(x-2)y'+8y=0$

(ك) $x^{2}y''+2xy'+4y=0$

(ل) $x^{2}y''-4xy'+4y=0$

۲. با استفاده ازروش‌کاهش مرتبه نشان دهیدکـه اگر r_1 یك ریشهٔ مکرر معادلهٔ $r(r-1)+\alpha r+\beta=0$ باشد، آنگاه x^{r_1} و $x^{r_1}\ln x$ جوابهای معادلهٔ

$$x^{2}y''+\alpha xy'+\beta y=0,\quad x>0$$

می‌باشند.

۳. مطلـوب است تعیین همـهٔ مقادیـر α کـه بـه ازای آنهـا همـهٔ جـوابهای

$x^2y''+\alpha xy'+5/2y=0$ هنگامی که $x \to 0$ به‌صفر بگراید.

۴. معادلهٔ اویلر مرتبهٔ دوم $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$ را می‌توان با تعویض متغیر مناسبی به یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت تبدیل کرد. با توجه به آنکه x^r در مورد معادلهٔ اویلر دارای همان نقش $(e^x)^r=e^{rx}$ متناظر به معادله با ضرایب ثابت است، کاملا معقول خواهد بودکه تعویض متغیر $x=e^z$ یا $z=\ln x$ انجام گیرد. تنها فاصلهٔ $x>0$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهیدکه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \quad و \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$$

(ب) نشان دهیدکه معادلهٔ اویلر به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0$$

اگر r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$ باشد، نشان دهیدکه

(ج) اگر r_1 و r_2 حقیقی ونا برابر باشند، آنگاه

$$y=c_1e^{r_1z}+c_2e^{r_2z}=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$$

(د) اگر r_1 و r_2 برابر باشند، آنگاه

$$y=(c_1+c_2z)e^{r_1z}=(c_1+c_2\ln x)x^{r_1}$$

(ه) اگر r_1 و r_2 مختلط مزدوج باشند، $r_1=\lambda+i\mu$، آنگاه

$$y=e^{\lambda z}(c_1\cos\mu z+c_2\sin\mu z)=x^{\lambda}[c_1\cos(\mu\ln x)+c_2\sin(\mu\ln x)].$$

۵. با استفاده‌ازروش مسئلهٔ ۴، معادلات‌دیفرانسیل زیررا به ازای $x>0$ حل کنید.

(الف) $x^2y''-2y=0$

(ب) $x^2y''-3xy'+4y=\ln x$

(ج) $x^2y''+7xy'+5y=x$

(د) $x^2y''-2xy'+2y=3x^2+2\ln x$

(ه) $x^2y''+xy'+4y=\sin(\ln x)$

(و) $3x^2y''+12xy'+9y=0$

۶. نشان دهیدکه اگر $L[y]=x^2y''+\alpha xy'+\beta y$، آنگاه به‌ازای $x<0$،

$$L[(-x)^r]=(-x)^rF(r)$$

که در آن $F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta$. از آنجا نتیجه بگیریدکه اگر $r_1\neq r_2$ ریشه‌های

$F(r)=0$ باشند. آنگاه جوابهای مستقل خطی $L[y]=0$ به ازای $x<0$ عبارتند از $(-x)^{r_1}$ و $(-x)^{r_2}$.

۷. فرض می‌کنیم که x^{r_1} و x^{r_2} جوابهای معادلهٔ اویلر باشند که در آن $r_1 \neq r_2$ و r_1 یك عدد صحیح مثبت است. طبق رابطهٔ (۲۴) جواب عمومی در هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، عبارت است از $y=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}$. نشان دهید که جواب عمومی را می‌توان به‌صورت $y=k_1x^{r_1}+k_2|x|^{r_2}$ نیز نوشت.

راهنمایی: نشان دهید که با انتخاب مناسب ثابتها عبارتهای مزبور به‌ازای $x>0$ یکی هستند؛ و با انتخاب ثابتهای دیگری به‌ازای $x<0$ یکی می‌شوند.

۸. اگر ثابتهای α و β درمعادلهٔ اویلر $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$ اعداد مختلط باشند، بازهم امکان‌دارد که جوابهایی به‌صورت x^r به‌دست‌آورد. اما، عموماً، جوابها دیگر دارای مقادیر حقیقی نیستند. جواب عمومی هریك از معادلات زیر را متناظر با فاصلهٔ $x>0$ بیابید.

(الف) $x^2y''+2ixy'-iy=0$ (ب) $x^2y''+(1-i)xy'+2y=0$

(ج) $x^2y''+xy'-2iy=0$

راهنمایی: مسائل ۱۳، ۱۴، و ۱۵ بند ۳. ۵. ۱ را ببینید.

۵.۴ سریهای جواب درمجاورت یك نقطهٔ غیرعادی منظم، بخش اول

اکنون به‌بررسی مسئلهٔ حل معادلهٔ کلی خطی مرتبهٔ دوم

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad (1)$$

در همسایگی یك نقطهٔ غیرعادی منظم $x=x_0$ می‌پردازیم. برای آسانی فرض می‌کنیم که $x_0=0$. اگر $x_0\neq 0$، معادله را می‌توان با قراردادن $x-x_0=z$ به‌معادله‌ای که نقطهٔ غیرعادی منظم آن درمبدأ باشد تبدیل کرد.

این نکته که $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۱) است، بدان معنی است که $xQ(x)/P(x)=xp(x)$ و $x^2R(x)/P(x)=x^2q(x)$ هنگامی که $x\to 0$ دارای حد متناهی ودر $x=0$ تحلیلی می‌باشند. بدینسان دارای بسطهایی به‌سری توانی به‌صورت

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n, \quad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \qquad (2)$$

می‌باشند، که دریك فاصله $|x|<\rho$، $\rho>0$ حول مبدأ همگرایند. از لحاظ اهداف نظری مناسب است که معادلهٔ (۱) را بر $P(x)$ تقسیم کرده وسپس در x^2 ضرب کنیم، تا به‌دست آید:

$$x^2y''+x[xp(x)]y'+[x^2q(x)]y=0 \qquad (\text{۳ الف})$$

یا

$$x^{2}y''+x(p_{0}+p_{1}x+\cdots+p_{n}x^{n}+\cdots)y'$$
$$+(q_{0}+q_{1}x+\cdots+q_{n}x^{n}+\cdots)y=0 \qquad (\text{ب } ۳)$$

اگر غیر از

$$p_{0}=\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)},\quad q_{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}R(x)}{P(x)}$$

همهٔ p_n و q_n ها صفر باشند، آنگاه معادلهٔ (۳) به معادلهٔ اویلر

$$x^{2}y''+p_{0}xy'+q_{0}y=0 \qquad (۴)$$

که دربند پیش مورد بحث واقع شد تبدیل می‌شود. البته درحالت کلی، برخی از p_n و q_n ها، $n\geqslant 1$، صفر نیستند. اما، سرشت اساسی جوابهای معادلهٔ (۳) و جوابهای معادلهٔ اویلر یکسان‌اند. وجود جمله‌های

$$q_{1}x+\cdots+q_{n}x^{n}+\cdots \quad \text{و} \quad p_{1}x+\cdots+p_{n}x^{n}+\cdots$$

فقط محاسبات را پیچیده‌تر می‌سازد.

اصولاً بحث را به فاصلهٔ $x>0$ منحصر می‌نماییم. برای فاصلهٔ $x<0$ می‌توان همانند آنچه درمورد معادلهٔ اویلر عمل شد، تعویض متغیر $x=-\xi$ را به کارگرفت، و سپس معادلهٔ حاصل را به‌ازای $\xi>0$ حل کرد.

چون ضرایب معادلهٔ (۳) همان «ضرایب اویلر» با مضربی ازسری توانی می‌باشند، کاملاً طبیعی است که به‌جستجوی جوابهایی به‌صورت «جوابهای اویلر» بامضربی ازسری توانی بپردازیم:

$$y=x^{r}(a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n}+\cdots)=x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{r+n} \qquad (۵)$$

آنچه راکه دراین مرحله ازمسئله باید تعیین‌کنیم، عبارت است از:

۱. مقادیر r که به‌ازای آنها معادلهٔ (۱) دارای جوابی به‌صورت (۵) است.
۲. رابطهٔ بازگشت a_n ها.
۳. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$.

چنان‌که خواهیم دید معادلهٔ (۱) همواره دارای حداقل یك جواب به صورت (۵) با a_0 دلخواه، ومحتملاً جواب دومی‌متناظر با مقدار دیگری از r می‌باشد. اگرجواب‌دومی به‌صورت (۵) وجود نداشته باشد، جواب دوم درست مانند هنگامی‌که معادلهٔ اویلردارای ریشه‌های برابر است، شامل یك جملهٔ لگاریتمی است. البته، ازلحاظ نظری، همین‌که جواب اول راکه به‌صورت (۵) است پیداکردیم، جواب دومی را می‌توان بـه‌روش‌کاهش مرتبه به‌دست‌آورد. متأسفانه، این روش همواره برای به‌دست‌آوردن جواب دومی مناسب نیست؛

وما دربندهای ۶.۴ و ۷.۴ روش دیگری را عرضه می‌کنیم.

نظریهٔ عمومی این مبحث را فروبنیوس[1] ریاضیدان آلمانی ارائه‌کرد، و نسبتاً پیچیده است. ما به‌معرفی این نظریه نمی‌پردازیم، و دراین بند وسه‌بند آتی فرض می‌کنیم که جوابی به‌صورت مزبور وجود دارد. به ویژه، فرض می‌کنیم که هرسری توانی موجود درعبارت جواب دارای یك‌شعاع همگرایی مخالف صفراست، وتوجه خودرا به‌طرز تعیین ضرایب این نوع سری معطوف می‌نماییم.

نخست بامثالی روش فروبنیوس را درحالتی‌که هر دوجواب به صورت (۵) باشند توضیح می‌دهیم. معادلهٔ

$$۲x^۲y''-xy'+(۱+x)y=۰ \qquad (۶)$$

را درنظرمی‌گیریم. از مقایسه با معادلهٔ (۳)،دیده می‌شودکه $x=۰$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ (۶) می‌باشد. همچنین از مقایسه با معادلات (۳ الف) و (۳ ب) دیده می‌شودکه $xp(x)=-۱/۲$ و $x^۲q(x)=(۱+x)/۲$. بدین سان $p_۰=-۱/۲$ ، $q_۰=۱/۲$ ، $q_۱=۱/۲$ ، وهمهٔ p_n و q_n های دیگرصفرند. معادلهٔ اویلرمتناظر عبارت است از

$$۲x^۲y''-xy'+y=۰ \qquad (۷)$$

اکنون به طور صوری به‌آزمون جوابی برای معادلهٔ (۶) به صورت (۵) به‌ازای $x>۰$ می‌پردازیم. آنگاه y' و y'' به‌صورت زیر خواهند بود

$$y'=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n-۱} \qquad (۸)$$

و

$$y''=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(r+n)(r+n-۱)x^{r+n-۲}, \qquad (۹)$$

درنتیجه

$$۲x^۲y''-xy'+(۱+x)y=\sum_{n=۰}^{\infty}۲a_n(r+n)(r+n-۱)x^{r+n}$$
$$-\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n}+\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^{r+n}+\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^{r+n+۱}$$

باتوجه‌به‌آنکه‌مجموع سری اخیررا می‌توان به‌صورت $\sum_{n=۱}^{\infty}a_{n-۱}x^{r+n}$ نوشت، وجمله‌ها را باهم ترکیب کرد، داریم

$$۲x^۲y''-xy'+(۱+x)y=a_۰[۲r(r-۱)-r+۱]x^r$$
$$+\sum_{n=۱}^{\infty}\Big\{[۲(r+n)(r+n-۱)-(r+n)+۱]a_n+a_{n-۱}\Big\}x^{r+n}=۰ \qquad (۱۰)$$

1. Frobenius (1849-1917)

چون معادلهٔ (۱۰) باید به‌صورت اتحاد برقرارباشد، ضریب هرتوان x درآن باید صفر باشد. چون $a_0 \neq 0$ است[1]، متناظر با x^r داریم

$$2r(r-1)-r+1=2r^2-3r+1=0 \qquad (11)$$

ازضریب x^{r+n} خواهیم داشت

$$[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]a_n+a_{n-1}=0$$

یا

$$a_n=-\frac{1}{2(r+n)^2-3(r+n)+1}a_{n-1}, \quad n\geqslant 1 \qquad (12)$$

معادلهٔ (۱۱) را معادلهٔ شاخص معادلهٔ (۶) می‌نامند. توجه شودکه این دقیقاً همان معادله‌ای است که برای معادلهٔ اویلر (۷) وابسته به معادلهٔ (۶) به‌دست آوردیم. ریشه‌های آن معرف دومقدار ممکن برای r است که به ازای آنها امکان دارد جوابهای معادلهٔ (۶) به صورت (۵) باشند. بافاکتورگیری معادلهٔ (۱۱) خواهیم داشت $(2r-1)(r-1)=0$؛ بنابراین ریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از

$$r_1=1, \quad r_2=\frac{1}{2} \qquad (13)$$

ازاین به‌بعد، هرگاه ریشه‌های معادلهٔ شاخص حقیقی و نامساوی باشند، ریشهٔ بزرگتررا با r_1 نشان می‌دهیم. ریشه‌های معادلهٔ شاخص را اغلب نماهای تکینگی درنقطهٔ غیر عادی منظم مزبورمی‌نامند.

معادلهٔ (۱۲) برای ضرایب a_n یك رابطهٔ بازگشت بـه دست می‌دهد. با در نظر گرفتن صورت تجزیه شدهٔ معادلهٔ شاخص رابطهٔ بازگشت را می‌توان چنین نوشت

$$a_n=\frac{-1}{[2(r+n)-1][(r+n)-1]}a_{n-1}, \quad n\geqslant 1 \qquad (14)$$

به ازای هرریشهٔ r_1 و r_2 معادلهٔ شاخص رابطهٔ بازگشت را به‌کار مـی‌گیریم، تا a_n های متناظر تعیین شوند. به‌ازای $r=r_1=1$ خواهیم داشت

---

۱. باانتخاب $a_0=0$ چیزی عاید نمی‌گردد، واین تنها بدان معنی است که سری بایدبا جملهٔ a_1x^{r+1} یا، اگر $a_1=0$ باشد، باجملهٔ a_2x^{r+2} وغیره آغاز شود. فرض‌کنیم‌که نخستین جملهٔ مخالف صفر a_mx^{r+m} باشد؛ این هم‌ارز باآن است‌که درسری (۵) به‌جای r، $r+m$ وبه‌جای a_0، a_m راقراردهیم. درواقع r طوری انتخاب‌شده است کـه برابرکوچکترین توان x درسری مزبور باشد؛ و $a_0\neq 0$ را به‌عنوان ضریب آن در نظر می‌گیریم.

$$a_n=\frac{-1}{(2n+1)n}a_{n-1}, \quad n\geqslant 1$$

بدین‌سان

$$a_n=\frac{-1}{(2n+1)n}\cdot\frac{-1}{(2n-1)(n-1)}a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$=\frac{(-1)^n}{(2n+1)n(2n-1)(n-1)\cdots(5\cdot 2)(3\cdot 1)}a_0$$

با دسته‌بندی سازه‌های n ، $n-1$ ، ... ، ۱ ، خواهیم‌داشت

$$a_n=\frac{(-1)^n}{[(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3]n!}a_0, \quad n\geqslant 1 \qquad (15)$$

بنابراین یك‌جواب معادلهٔ (۶) صرف‌نظر ازضریب ثابت a_0 ، عبارت است‌از

$$y_1(x)=x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{[(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3]n!}\right], \quad x>0 \qquad (16)$$

برای تعیین همگرایی سری (۱۶) ازآزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+3)(n+1)}=0$$

به‌ازای هر x. بدین‌سان سری به‌ازای همهٔ مقادیر x همگراست.

متناظر باریشهٔ دوم $r=r_2=1/2$ ، نیز به‌همان روش عمل می‌کنیم. ازمعادلهٔ (۱۴) خواهیم داشت

$$a_n=\frac{-1}{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)}a_{n-1}=\frac{-1}{n(2n-1)}a_{n-1}$$

$$=\frac{-1}{n(2n-1)}\cdot\frac{-1}{(n-1)(2n-3)}a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$=\frac{(-1)^n}{n(2n-1)(n-1)(2n-3)\cdots(2\cdot 3)(1\cdot 1)}a_0$$

$$=\frac{(-1)^n}{[(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1]n!}a_0, \quad n\geqslant 1 \qquad (17)$$

دراینجا نیز باصرف‌نظرکردن ازضریب ثابت a_0، جواب دوم را به‌دست می‌آوریم

$$y_2(x)=x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{[(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1]n!}\right],\quad x>0 \qquad (18)$$

مانند پیش، می‌توان نشان‌داد که سری موجود دررابطهٔ (۱۸) به ازای همهٔ مقادیر x همگراست. چون جمله‌های اول سریهای جواب y_1 و y_2 به ترتیب x و $x^{1/2}$ می‌باشند، روشن است که جوابها دارای استقلال خطی‌اند. بنابراین جواب‌عمومی معادلهٔ (۶)عبارت است از

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\quad x>0$$

مثال بالا از جنبه‌های متعددی روشنگر است. محاسبات خود را باردیگر ازنقطه‌نظر کلیتری بررسی کنیم. گیریم

$$\begin{aligned}F(r)&=2r(r-1)-r+1\\&=(2r-1)(r-1)\end{aligned} \qquad (19)$$

بدین‌سان معادلهٔ شاخص عبارت خواهد بود از $F(r)=0$، و رابطهٔ بازگشت (۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$F(r+n)a_n+a_{n-1}=0,\quad n\geqslant 1 \qquad (20)$$

معادلهٔ (۲۰) نمایشگرحالت‌کلی است به جز آنکه به‌جای جملهٔ a_{n-1} در حالت‌کلی یک ترکیب خطی از a_0، a_1، a_2، ...، a_{n-1} قرارمی‌گیرد. اما، می‌توان در بحث زیر معادلهٔ(۲۰) را به‌عنوان مدل درنظرگرفت، البته باتوجه به این‌نکته‌که بحث به‌مثال‌خاصی که هم‌اکنون تکمیل شد محدود نمی‌گردد.

اشکالات ازدومنبع سرچشمه می‌گیرد. نخست، اگردوریشهٔ r_1 و r_2 معادلهٔ شاخص برابرباشند، دراین صورت تنها یک سری‌جواب به شکل (۵) به‌دست می‌آید. دوم، این امکان وجود داردکه به‌ازای ریشه‌های مفروض r_1 یا r_2 نتوان برای یکی از a_nها معادلهٔ (۲۰) را به‌علت‌آنکه $F(r+n)$ صفرشود، حل‌کرد. ببینیم چه‌وقت این‌حالت رخ‌می‌دهد؟ تنها صفرهای $F(r)$ عبارتند از r_1 و r_2، واگر $r_1>r_2$، آنگاه به‌ازای هر n به‌وضوح داریم $r_1+n>r_1>r_2$ و درنتیجه به‌ازای هر n خواهیم داشت $F(r_1+n)\neq 0$. بدین‌سان هیچگاه درمحاسبهٔ سری جواب متناظر باریشهٔ بزرگتر معادلهٔ شاخص اشکالی پیش نخواهد آمد. از طرف دیگر $F(r_2+n)$ را در نظرمی‌گیریم، و فرض‌می‌کنیم $r_1-r_2=N$ یك‌عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه به‌ازای $n=N$ خواهیم‌داشت

$$F(r_2+N)a_N+a_{N-1}=0$$

اما $F(r_2+N)=F(r_1)=0$ ونمی‌توان معادلهٔ بالا را نسبت به a_N حل‌کرد،مگرآنکه a_{N-1} نیز صفرباشد، و بنابراین نمی‌توان سری جواب دومی را به‌دست‌آورد. درمسائل

کلیتر، چنان که در بند بعد خواهیم دید، رابطهٔ بازگشت بسیار پیچیده‌تر خواهد بود، وحتی هنگامی که $F(r_2+N)$ صفرشود، امکان داردکه بتوان جواب دومی به‌صورت (۵) متناظر به $r=r_2$ را تعیین کرد. درهرصورت حالتهای $r_1=r_2$ و $r_1-r_2=N$ که در آن N عدد صحیح ومثبتی است، مستلزم دقت خاصی می‌باشند.

در پایان، متذکر می‌شویم که اگر ریشه‌های معادلهٔ شاخص مختلط باشند، این نوع اشکالات رخ نمی‌دهد؛ ازطرف دیگر جوابهای متناظر به r_1 و r_2 توابعی با مقادیرمختلط از x خواهند بود. امـا، درست همانند معادلهٔ اویلر، می‌توان با در نظـر گرفتن قسمتهای حقیقی وموهومی جوابهای بامقادیرمختلط، جوابهایی بامقادیر حقیقی به‌دست‌آورد.

پیش ازآنکه به‌بحث کلی وبررسی حالتهای خاص $r_1=r_2$ و $r_1-r_2=N$؛ N یك عدد صحیح مثبت، بپردازیم یك نکتهٔ عملی را متذکر می‌شویم. اگـر P، Q، و R چند‌جمله‌ای باشند، بسیار بهتر است که به‌جای معادلهٔ (۳) همان معادلهٔ (۱) را مستقیماً بـه‌کار بگیریم. بدین‌سان دیگرلازم نیست که $xQ(x)/P(x)$ و $x^2R(x)/P(x)$ بـه صورت سری توانی بیان شود. مثلاً، بسیارآسانتر است که معادلهٔ

$$x(1+x)y''+2y'+xy=0$$

را درنظربگیریم، تا اینکه‌آن را به‌صورت

$$x^2y''+x\frac{2}{1+x}y'+\frac{x^2}{1+x}y=0$$

نوشته، وسپس $2/(1+x)$ و $x^2/(1+x)$ را بسط دهیم تا به‌صورت زیردرآید

$$x^2y''+x[2(1-x+x^2-\cdots)]y'+(x^2-x^3+x^4-\cdots)y=0$$

مسائل

۱. نشان‌دهیدکه هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر در $x=0$ دارای یـك نقطهٔ غیر عادی منظم است. معادلهٔ شاخص، رابطهٔ بـازگشت، و ریشه‌های معادلهٔ شاخص را بیابید. سری جواب $(x>0)$ متناظر بـا ریشهٔ بزرگتر را بیابید. اگر ریشه‌ها نابرابر باشند، و تفاضل آنها عدد صحیح نباشد، سری جواب متناظر به ریشه‌کوچکتر را نیز بیابید.

(الف) $2xy''+y'+xy=0$

(ب) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$

(ج) $xy''+y=0$

(د) $xy''+y'-y=0$

(ه) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

$$x^{2}y''+xy'+(x-2)y=0 \qquad (و)$$

۲. معادلهٔ لژاندر ازرتبهٔ α عبارت است از

$$(1-x^{2})y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

جواب این معادله را درمجاورت نقطهٔ عادی $x=0$ در مسائل ۱۰ و ۱۱ بند ۴ . ۲ . ۱ بررسی کردیم. درمثال ۵ بند ۴ . ۳ نشان دادیم که $x=\pm 1$ نقاط غیرعادی منظم‌اند. معادلهٔ شاخص وریشه‌های‌آن را به ازای نقطهٔ $x=1$ تعیین‌کنید. یك‌سری جواب برحسب توانهای $x-1$ به‌ازای $x-1>0$ بیابید.

راهنمایی: بنویسید $1+x=2+(x-1)$ و $x=1+(x-1)$. به عبارت دیگر، تعویض متغیر $z=x-1$ را به‌کاربرده، وسری جواب را برحسب توانهای z بیابید.

۳. معادلهٔ دیفرانسیل لاگر[1] عبارت است‌از

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$$

نشان دهیدکه $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است. معادلهٔ شاخص، ریشه‌هـای‌آن، رابطهٔ بازگشت، ویك‌جواب $(x>0)$ راتعیین‌کنید. نشان دهیدکه اگر $\lambda=m$، یك‌عددصحیح مثبت باشد، این جواب به‌صورت یك چندجمله‌ای درمی‌آید. این چندجمله‌ای را هنگامی که به صورت مناسبی نرمالیزه شده‌باشد، چندجمله‌ای لاگر، $L_m(x)$ می‌نامند.

۴. معادلهٔ بسل ازرتبهٔ صفر عبارت است از

$$x^{2}y''+xy'+x^{2}y=0$$

نشان دهیدکه $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است؛ وریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از $r_1=r_2=0$؛ ویك جواب به‌ازای $x>0$ عبارت است از

$$J_0(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

توجه شودکه این‌سری به‌ازای هر x ، ونه فقط به ازای $x>0$ ، همگراست. بـه ویژه $J_0(x)$ وقتی $x\to 0$ کراندار است. تـابع J_0 را تـابع بسل نوع اول از رتبهٔ صفر می‌نامند.

۵. با استفاده ازروش‌کاهش مرتبه درمسئلهٔ ۴ ، نشان دهیدکه جواب دوم معادلهٔ بسل رتبهٔ صفرشامل یك جملهٔ لگاریتمی است.

راهنمایی: اگر $y_2(x)=J_0(x)v(x)$، آنگاه

$$y_2(x)=J_0(x)\int^{x}\frac{ds}{s[J_0(s)]^{2}}$$

---

1. Laguerre (1834–1886)

نخستین جمله ازسری بسط $1/s[J_0(s)]^2$ را بیابید.

۶. معادلهٔ بسل رتبهٔ یك عبارت است از

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

(الف) نشان دهید که $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است؛ ریشه‌های معادله‌شاخص عبارتند از $r_1=1$ و $r_2=-1$؛ ویك جواب به‌ازای $x>0$ عبارت است از

$$J_1(x)=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!n!2^{2n}}$$

توجه شود که همانند مسئلهٔ ۴، این‌سری به ازای همهٔ مقادیر x همگراست، و $J_1(x)$ وقتی $x\to 0$ کراندار است. تابع J_1 را تابع بسل نوع اول ازرتبهٔ یك می‌نامند.

(ب) نشان دهید که تعیین جواب دومی به‌صورت

$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad x>0$$

غیرممکن است.

۱.۵.۴ سریهای جواب درمجاورت یك نقطهٔ غیرعادی منظم، بخش دوم

اکنون به مسئلهٔ کلی تعیین یك‌جواب معادلهٔ

$$x^2y''+x[xp(x)]y'+[x^2q(x)]y=0 \tag{1}$$

می‌پردازیم، که در آن

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \quad \text{و} \quad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$$

وهردوسری دارای شعاع همگرایی غیر صفرند [معـادلهٔ(۳) بند ۴ . ۵ را ببینید]. نقطـهٔ $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است. برای‌آسانی نخست فرض‌می‌کنیم که $x>0$، و به جستجوی جوابی به‌صورت

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n} \tag{2}$$

می‌پردازیم. باجایگزینی درمعادلهٔ(۱) خواهیم‌داشت

$$\begin{aligned}&a_0r(r-1)x^r+a_1(r+1)rx^{r+1}+\cdots+a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n}+\cdots\\&+(p_0+p_1x+\cdots+p_nx^n+\cdots)\\&\times[a_0rx^r+a_1(r+1)x^{r+1}+\cdots+a_n(r+n)x^{r+n}+\cdots]\\&+(q_0+q_1x+\cdots+q_nx^n+\cdots)\end{aligned}$$

$$\times(a_0x^r+a_1x^{r+1}+\cdots+a_nx^{r+n}+\cdots)=0 \qquad (3)$$

چون سریها را در یکدیگر ضرب کرده وجمله‌های مشابه را جمع کنیم، داریم

$$\begin{aligned}a_0F(r)x^r&+[a_1F(r+1)+a_0(p_1r+q_1)]x^{r+1}\\&+\{a_2F(r+2)+a_0(p_2r+q_2)+a_1[p_1(r+1)+q_1]\}x^{r+2}\\&+\cdots+\{a_nF(r+n)+a_0(p_nr+q_n)+a_1[p_{n-1}(r+1)+q_{n-1}]\\&+\cdots+a_{n-1}[p_1(r+n-1)+q_1]\}x^{r+n}+\cdots=0\end{aligned}$$

یا به‌صورت فشرده‌تر

$$a_0F(r)x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\right\}x^{r+n}=0 \qquad (4)$$

که در آن

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0 \qquad (5)$$

اگر بنا باشد که معادلهٔ (۴) متحداً برقرار گردد، باید ضریب هر توان x صفر شود.

چون $a_0\neq 0$، از جمله شامل x^r معادلهٔ شاخص $F(r)=0$ حاصل می‌شود. بار دیگر تأکید می‌کنیم که معادلهٔ شاخص $F(r)=0$ دقیقاً معادله‌ای است که در تعیین جوابهایی به صورت x^r برای معادلهٔ اویلر $x^2y''+xp_0y'+q_0y=0$ متناظر به معادلهٔ (۱) به دست می‌آمد. ریشه‌های معادلهٔ شاخص را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم، وهنگامی که ریشه‌ها حقیقی باشند فرض می‌کنیم $r_1 \geqslant r_2$. اگر ریشه‌ها مختلط باشند، این ترتیب مطرح نیست. تنها به‌ازای این مقادیر r می‌توان انتظار داشت که برای معادلهٔ (۱) جوابهایی به صورت (۲) به‌دست آید.

چون ضریب x^{r+n} را در معادلهٔ (۴) برابر صفر قرار دهیم، رابطهٔ بازگشت

$$F(r+n)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0, \quad n\geqslant 1 \qquad (6)$$

به‌دست می‌آید. معادلهٔ (۶) نشان می‌دهد که عموماً، a_n به‌مقدار r وهمهٔ ضرایب پیش از آن a_0، a_1، ...، a_{n-1} بستگی دارد. علاوه براین دیده می‌شود که می‌توان متوالیاً a_1، a_2، ...، a_n، ... را برحسب ضرایب سریهای $xp(x)$ و $x^2q(x)$ محاسبه کرد، به‌شرط آنکه $F(r+1)$، $F(r+2)$، ...، $F(r+n)$، ...، صفر نشوند. تنها مقادیر r که به ازای آنها $F(r)$ صفر می‌شود عبارتند از $r=r_1$ و $r=r_2$؛ چون r_1+n به‌ازای $n\geqslant 1$ با r_1 یا r_2 برابر نیست، درنتیجهٔ $F(r_1+n)\neq 0$ به‌ازای $n\geqslant 1$. بنا براین همواره می‌توان یک جواب معادله، یعنی

$$y_1(x)=x^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right] \qquad (7)$$

را تعیین کرد. دراینجا ازنماد $a_n(r_1)$ استفاده شده است تانشان دهدکه a_n ازمعادلهٔ (۶) به‌ازای $r = r_1$ محاسبه گردیده است. علاوه براین برای تصریح a_0 را برابریك اختیار کرده‌ایم.

اگر r_2 برابر r_1 نباشد، و $r_1 - r_2$ نیز یك عدد صحیح مثبت نباشد، آنگاه $r_2 + n$ به ازای هیچیك از مقادیر $n \geqslant 1$ برابـر r_1 نخواهد بود؛ بنابراین $F(r_2+n) \neq 0$ ، و می‌توان جواب دومی به‌صورت

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right] \tag{8}$$

به‌دست آورد.

پیش از ادامهٔ بحث، چند نکته را دربارهٔ سری‌جوابهای (۷)و (۸) متذکرمی‌شویم. سریهای توانـی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ درداخل شعاع همگرایی، توابعی هستند که در $x = 0$ تحلیلی‌اند. بنابراین اگر درجوابهای y_1 و y_2 تغییرات غیر عادی وجـود داشته‌باشد، باجمله‌های x^{r_1} و x^{r_2} که به ترتیب دراین توابع تحلیلی ضرب می‌شوند تعیین می‌گردد. دیگرآنکه، برای به‌دست‌آوردن جوابهای حقیقی به‌ازای $x < 0$ ، می‌توان از تبدیـل $x = -\xi$ با $\xi > 0$ استفاده‌کرد. همان گـونه‌که ازبحث پیرامون معادلهٔ اویلـر برمی‌آید، کافی‌است به‌جای x^{r_1} درمعادلهٔ (۷) و x^{r_2} درمعادلهٔ (۸) به‌ترتیب $|x|^{r_1}$ و $|x|^{r_2}$ بگذاریم. بالاخره، اگر r_1 و r_2 اعداد مختلطی باشند، لزوماً مزدوج‌اند، و $r_2 \neq r_1 + N$. پس می‌توان دوسری جواب به‌صورت (۲) محاسبه‌کرد؛ اما، این جوابها توابعی از x با مقادیرمختلط خواهندبود. جوابهای‌بامقدار حقیقی را می‌توان ازقسمتهای حقیقی‌وموهومی جوابهای مختلط به‌دست‌آورد.

اگر $r_1 = r_2$ ، تنها یك‌جواب به‌صورت (۲) به‌دست می‌آید. جواب دوم شامل‌یك جمله لگاریتمی است. روشی برای تعیین یك جواب دوم دربند ۶.۴ و مثالـی دربند ۷.۴ بررسی شده‌است.

اگـر $r_1 - r_2 = N$ ، کـه در آن N عـــدد صحیـــح مثبتـی است، آنـگـاه $F(r_2+N) = F(r_1) = 0$ ، ونمی‌توان $a_N(r_2)$ را ازمعادلهٔ (۶) به‌دست‌آورد، مگرآنکه اتفاقاً حاصل‌جمع موجود درمعادلهٔ (۶) نیز به‌ازای $n = N$ صفرشود. اگـر چنین بـاشد، می‌توان نشان دادکه a_N دلخواه است و سری جواب دومی بدست می‌آید؛ در غیر ایـن صورت، تنها یك‌سری جواب به‌صورت (۲) خواهیم داشت. درایـن‌حالت، جـواب دوم شامل یك‌جمله لگاریتمی است. روش این‌کار به اختصار دربند ۶.۴، ومثالهایی برای‌هردو حالت دربند۷.۴ موردبحث قرار می‌گیرد.

مسئلهٔ دیگری‌که باید درنظر داشت، همگرایی سریهایی است‌که درجـواب صوری وجود دارند. همان‌طورکه انتظار می‌رود، این‌موضوع به‌شعاع همگرایی سریهای توانـی $xp(x)$ و $x^2q(x)$ مربوط است. نتایج بحث ونکاتی دربارهٔ همگرایی سریهای جواب‌را

در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۳. معادلهٔ دیفرانسیل (۱)

$$x^{2}y''+x[xp(x)]y'+[x^{2}q(x)]y=0$$

را که در آن $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است در نظر می‌گیریم. آنگاه $xp(x)$ و $x^{2}q(x)$ در $x=0$ تحلیلی‌اند و دارای بسطهایی به‌صورت سری توانی

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{n}x^{n},\quad x^{2}q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_{n}x^{n}$$

می‌باشند که به ازای $|x|<\rho$ همگرایند، و در آن $\rho>0$ می‌نیمم شعاعهای همگرایی سریهای توانی $xp(x)$ و $x^{2}q(x)$ است. فرض‌کنیم r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ شاخص

$$F(r)=r(r-1)+p_{0}r+q_{0}=0$$

باشند، وهنگامی که حقیقی‌اند، $r_1\geqslant r_2$. آنگاه در هر یك از فواصل $-\rho<x<0$ یا $0<x<\rho$، یك‌جواب به‌صورت

$$y_{1}(x)=|x|^{r_{1}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(r_{1})x^{n}\right]\tag{۹}$$

وجود دارد، با رابطهٔ بازگشت (۶) که درآن $a_0=1$ و $r=r_1$ است داده می‌شود. اگر r_1-r_2 صفر یاعدد صحیح مثبتی نباشد، آنگاه درهریك ازفواصل $-\rho<x<0$ یا $0<x<\rho$، جواب مستقل خطی دومی به‌صورت

$$y_{2}(x)=|x|^{r_{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(r_{2})x^{n}\right]\tag{۱۰}$$

وجود دارد. $a_n(r_2)$ نیز با رابطهٔ بازگشت (۶) بـه ازای $a_0=1$ و $r=r_2$ تعیین می‌شود. سریهای توانی در روابط (۹) و (۱۰) حداقل به‌ازای $|x|<\rho$ همگرایند.

امکان داردکه سریهای (۹) و (۱۰) دارای شعاعهای همگرایی بزرگتراز ρ باشند؛ اگرچنین باشد، جوابهای (۹) و (۱۰) درفواصل بزرگتر متناظر معتبرند. گرچه اثبات این قضیه ازمحدودهٔ این متن خارج است، باوجود این می‌توان چندنکته را متذکرشد. بـرای تعیین r_1 و r_2، ریشه‌های‌معادلهٔ شاخص، که دراین مبحث دارای‌چنین نقش پراهمیتی‌هستند، تنها باید p_0 و q_0 را تعیین وسپس معادلهٔ $r(r-1)+p_{0}r+q_{0}=0$ را حل کرد. این ضرایب با

$$p_{0}=\lim_{x\to 0}xp(x),\quad q_{0}=\lim_{x\to 0}x^{2}q(x)\tag{۱۱}$$

داده می‌شوند. درعمل، به جای حفظ فرمول بازگشت (۶) برای a_n، معمولا سری (۲) را

به‌جای y درمعادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم، مقادیر r را تعیین‌کرده و a_n را صریحاً محاسبه می‌کنیم.

درپایان متذکر می‌شویم که اگر $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم معادلهٔ

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad (12)$$

باشد که درآن P ، Q و R چند جمله‌ای‌اند، آنگاه $xP(x)=xQ(x)/P(x)$ و $x^2q(x)=x^2R(x)/P(x)$. بدین‌سان

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} \qquad (13)$$

علاوه بر این، شعاعهای همگرایی سریهای (۹) و (۱۰) حداقل برابر مسافت مبدأ تا نزدیکترین صفر P می‌باشند.

مثال. چگونگی جوابهای معادلهٔ

$$2x(1+x)y''+(3+x)y'-xy=0$$

را درهمسایگی نقاط غیرعادی بررسی کنید.

با مقایسهٔ این‌معادله با (۱۲) داریم $P(x)=2x(1+x)$ ، $Q(x)=3+x$ ، و $R(x)=-x$. روشن است که نقاط $x=0$ و $x=-1$ نقاط غیرعادی‌اند. نقطهٔ $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است، زیرا

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)}=0$$

علاوه براین از روابط (۱۳) داریم $p_0=3/2$ و $q_0=0$. بدین‌سان معادلهٔ شاخص به صورت $r(r-1)+\frac{3}{2}r=0$ خواهد بود، و ریشه های آن عبارتند از $r_1=0$ و $r_2=-1/2$. چون این ریشه‌ها برابر نیستند وتفاضل آنها نیز برابر **یك‌عدد صحیح نیست**، دوجواب مستقل خطی به‌صورت

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n, \qquad y_2(x)=|x|^{-1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{1}{2}\right)x^n\right]$$

به ازای $0<|x|<\rho$ وجود دارد. یك‌کران پایین برای شعاع همگرایی این سریها ۱ است که مسافت از $x=0$ تا $x=-1$ صفر دیگر $P(x)$ می‌باشد. توجه شود که وقتی $x\to 0$ جواب y_1 کراندار ودر واقع تحلیلی است. ازطرف دیگر جواب دوم y_2 وقتی $x\to 0$ بی‌کران است.

نقطهٔ $x=-1$ نیز یك نقطهٔ غیر عادی منظم است، زیرا

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)}=-1$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)}=0$$

دراین حالت $p_0=-1$ ، $q_0=0$، بنابراین معادلهٔ شاخص $r(r-1)-r=0$ می‌باشد. ریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از $r_1=2$ و $r_2=0$. متناظربا ریشهٔ بزرگتر، جوابی به صورت

$$y_1(x)=(x+1)^2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(2)(x+1)^n\right].$$

وجود دارد. این‌سری حداقل به‌ازای $|x+1|<1$ همگراست. چون تفاضل دو ریشه عدد صحیح مثبتی است، امکان داردکه جواب دوم به‌صورت

$$y_2(x)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)(x+1)^n\right]$$

نباشد، وبدون بررسی بیشتر چیزی نمی‌توان گفت.

مسائل

۱. مطلوب‌است تعیین همهٔ نقاط غیرعادی منظم هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر. معادلهٔ شاخص ونماهای تکینگی را در هریك ازنقاط غیرعادی منظم بیابید.

(الف) $xy''+2xy'+6e^x y=0$

(ب) $x^2y''-x(2+x)y'+(2+x^2)y=0$

(ج) $x(x-1)y''+6x^2y'+3y=0$

(د) $y''+4xy'+6y=0$

(ه) $x^2y''+3(\sin x)y'-2y=0$

(و) $2x(x+2)y''+y'-xy=0$

(ز) $x^2y''+\frac{1}{2}(x+\sin x)y'+y=0$

(ح) $(x+1)^2y''+3(x^2-1)y'+3y=0$

۲. نشان دهیدکه

$$x^2y''+(\sin x)y'-(\cos x)y=0$$

دارای یك نقطهٔ غیرعادی منظم در $x=0$ است، وریشه‌های‌معادلهٔ شاخص ± 1 می‌باشند. نخستین سه‌جملهٔ غیرصفر سری متناظر به ریشهٔ بزرگترا بیابید.

۳. نشان دهیدکه

$$(\ln x)y''+\frac{1}{2}y'+y=0$$

دارای یك نقطهٔ غیرعادی منظم در $x=1$ است. ریشه‌هـای معادلهٔ شاخص را در $x=1$ بیابید. نخستین سه‌جملهٔ غیرصفر سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{r+n}$ متناظر به ریشهٔ بزرگتر را تعیین کنید. فرض‌کنیم $0<x-1$. برای شعاع همگرایی این سری چه حدسی می‌توان زد.

۴. مسائل متعددی ازفیزیك ریاضی (مثلا، معادلهٔ شرودینگر برای اتـم ئیدروژن) به بررسی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0 \qquad \text{(یك)}$$

می‌انجامد، که درآن α ، β و γ مقادیر ثابت‌اند. این‌معادله به معادلهٔ فوق هندسی موسوم است.

(الف) نشان دهیدکه $x=0$ یـك نقطهٔ غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادلـهٔ شاخص عبارتند از 0 و $1-\gamma$.

(ب) نشان دهیدکه $x=1$ یك‌نقطهٔ غیرعادی منظم است، وریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از 0 و $\gamma-\alpha-\beta$.

(ج) بافرض‌آنکهٔ $1-\gamma$ یك عدد صحیح مثبتی نباشد، نشان دهیدکه در همسایگی $x=0$ یك‌جواب معادلهٔ (یك) عبارت است از

$$y_1(x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2+\cdots$$

برای شعاع همگرایی این سری چه حدسی می‌توان زد.

(د) با فرض‌آنکه $1-\gamma$ یك عددصحیح یاصفر نباشد، نشانِ دِهیدکه جواب دوم‌به ازای $0<x<1$ عبارت است از

$$y_2(x)=x^{(1-\gamma)}\left[1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2+\cdots\right]$$

*(ه) نشان دهیدکه نقطهٔ واقع دربینهایت، یك‌نقطهٔ غیرعادی منظم است، وریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از α و β. مسئلهٔ ۱۳، بند ۳.۴ را ببینید.

۵. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

راکه در آن $\alpha \neq 0$ و β دوثابت حقیقی‌اند درنظرمی‌گیریم.

(الف) نشان دهیدکه $x = 0$ یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است.

(ب) نشان دهیدکه اگر بخواهیم یك جواب به‌صورت $x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تعیین‌کنیم، معادلهٔ شاخص خطی خواهد بود، و در نتیجه تنها یك جواب صوری به‌این شکل وجود خواهد داشت.

۶. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s} y' + \frac{\beta}{x^t} y = 0 \qquad \text{(یك)}$$

راکه در آن $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ دوعدد حقیقی‌اند درنظرمی‌گیریم، s و t اعـداد صحیح مثبت‌اند و موقتاً آنها را دلخواه فرض می‌کنیم.

(الف) نشان دهیدکه اگر $s > 1$ یا $t > 2$، آنگاه نقطهٔ $x = 0$ یك نقطهٔ غیرعادی نامنظم است.

(ب) فرض‌کنیم‌که بخواهیم برای معادلهٔ (یك) جوابی به‌صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0 \qquad \text{(دو)}$$

بیابیم. نشان دهیدکه اگر $s = 2$ و $t = 2$، آنگاه برای r تنها یك مقدار ممکن است‌کـه به‌ازای آن معادلهٔ (یك) دارای یك جواب صوری به‌شکل (دو) باشد.

(ج) نشان دهیدکـه اگر $s = 1$ و $t = 3$، معادلـهٔ (یك) دارای جوابهایی به‌صورت (دو) نیست.

(د) نشان دهیدکه ماکزیمم مقادیر s و tکه به‌ازای آنها معادلهٔ شاخص برحسب r درجهٔ دوم است [وبنابراین می‌توان انتظارداشت‌که دوجواب به‌صورت (دو) به‌دست‌آید] عبارتند از $s = 1$ و $t = 2$. این دقیقاً همان شرایطی است‌که «تکینگی ضعیف» یعنی نقطهٔ غیرعادی‌منظم‌را ازنقطهٔ‌غیرعادی‌نامنظم به‌گونه‌ای‌که دربند۴.۳تعریف‌شدندمتمایز می‌سازد.

به‌عنوان تذکراشاره می‌کنیم‌که گرچه‌گاهی می‌توان یك‌سری صوری جواب به‌شکل (دو) درنقطهٔ غیرعادی نامنظم به‌دست آورد، اما این سری ممکن است همگرا نباشد.

۶.۴ سریهای جواب درمجاورت یك نقطهٔ غیرعادی منظم؛ $r_1 = r_2$ و $N = r_1 - r_2$

اکنون به‌بررسی‌حالتهایی‌که درآن r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ شاخص برابرباشند یا تفاضل آنها $N = r_1 - r_2$ یك عدد صحیح مثبتی باشد، می‌پردازیم. اگر $r_1 = r_2$، بنابر شباهت

با معادلهٔ اویلر می‌توان حدس زد که جواب دوم شامل یك جملهٔ لگاریتمی است. هنگامی که تفاضل ریشه‌ها عدد صحیحی است امکان دارد که وضع باز به‌همین منوال باشد. وضعیت کلی، با درنظر گرفتن حالتی که در آن تفاضل r_1 و r_2 برابر عدد صحیح نیست درقضیهٔ زیر خلاصه می‌شود.

قضیهٔ ۴.۴. معادلهٔ دیفرانسیل

$$L[y]=x^2y''+x[xp(x)]y'+[x^2q(x)]y=0 \qquad (1)$$

راکه درآن $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است درنظرمی‌گیریم. آنگاه توابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$ در $x=0$ تحلیلی‌اند و دارای نمایش سری توانی به‌صورت

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n, \qquad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \qquad (2)$$

می‌باشندکه به‌ازای $|x|<\rho$ همگرایند، $\rho>0$ می‌نیمم شعاع همگرایی سریهای توانی متناظر با $xp(x)$ و $x^2q(x)$ است. فرض‌کنیم r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ شاخص

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0 \qquad (3)$$

باشند و هنگامی که حقیقی‌اند قرار می‌دهیم $r_1 \geqslant r_2$. آنگاه در هر یك از فواصل $0<x<\rho$ یا $-\rho<x<0$ معادلهٔ (۱) دارای دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 به‌صورت زیر می‌باشد.

۱. اگر r_1-r_2 عدد صحیح یا صفرنباشد، آنگاه

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right], \qquad (\text{۴ الف})$$

$$y_2(x)=|x|^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right]. \qquad (\text{۴ ب})$$

۲. اگر $r_1=r_2$، آنگاه

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right] \qquad (\text{۵ الف})$$

$$y_2(x)=y_1(x)\ln|x|+|x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(r_1)x^n \qquad (\text{۵ ب})$$

۳. اگر $r_1-r_2=N$، یك عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right] \qquad (\text{۶ الف})$$

$$y_2(x)=ay_1(x)\ln|x|+|x|^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(r_2)x^n\right]. \qquad (\text{۶ ب})$$

ضرایب $a_n(r_1)$، $a_n(r_2)$، $b_n(r_1)$، $c_n(r_2)$، وثابت a را می‌توان باگذاشتن جوابهای به‌صورت سری به‌جای y در معادلهٔ (۱) تعیین‌کرد. امکان داردکه مقدار ثابت a برابر صفر شود. هریك از سریها در روابط (۴)، (۵) و (۶) حداقل به‌ازای $|x| < p$ همگرا است و معرف تابعی می‌باشدکه در $x = 0$ تحلیلی است.

حالتی راکه در آن $r_1 - r_2$ عدد صحیحی نیست در بند ۱.۵.۴ بررسی‌کردیم. در اینجا به‌حالتهای $r_1 = r_2$ و $N = r_1 - r_2$ می‌پردازیم، و فرض می‌کنیم‌که $x > 0$. جوابهای با مقدار حقیقی به‌ازای $x < 0$ را می‌توان مانند پیش با قرار دادن $x = -\xi$ به‌دست آورد.

$r_1 = r_2$. روش تعیین جواب دوم اساساً همان است‌که درتعیین جواب دوم معادلهٔ اویلر (بند ۴.۴ را ببینید) هنگامی‌که ریشه‌های معادلهٔ شاخص برابربودند به‌کار گرفتیم. برای معادلهٔ (۱) جوابی به‌صورت

$$y = \phi(r,x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^r \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) \tag{۷}$$

جستجو می‌کنیم، برای تأکید این نکته‌که ϕ به‌انتخاب r بستگی دارد نوشته‌ایم $y = \phi(r,x)$. اگرسریهای (۲) رابه‌جای $xp(x)$ و $x^2q(x)$ قراردهیم، با محاسبهٔ y' و y'' از رابطهٔ (۷) وجایگزینی آنها درمعادله وبالاخره دسته‌بندی جمله‌ها داریم (روابط (۳) و (۴) بند ۱.۵.۴ را ببینید)

$$L[\phi](r,x) = x^r a_0 F(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} \tag{۸}$$

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 . \tag{۹}$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ شاخص هردو برابر r_1 باشند، یك جواب را می‌توان با قراردادن r_1 به‌جای r و انتخاب a_n به‌طوری که هرجملهٔ سری رابطهٔ (۸) صفرشود به‌دست آورد.

برای تعیین جواب دوم r را به‌عنوان متغیر پیوسته‌ای در نظر می‌گیریم، و a_n را به‌صورت تابعی‌از r به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که ضریب x^{r+n}، $n \geqslant 1$، در رابطهٔ (۸) صفر شود. آنگاه با فرض $F(r+n) \neq 0$ خواهیم داشت

$$a_n(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(r+n)}, \quad n \geqslant 1 \tag{۱۰}$$

با انتخاب این‌مقدار برای $a_n(r)$ به‌ازای $n \geqslant 1$، رابطهٔ (۸) به‌صورت سادهٔ زیردرمی‌آید

$$L[\phi](r,x)=a_0 x^r F(r) \qquad (11)$$

چون r_1 ریشهٔ مضاعف $F(r)$ است ، از رابطهٔ (۹) نتیجه می‌شود که $F(r)=(r-r_1)^2$. با قراردادن $r=r_1$ دررابطهٔ (۱۱) خواهیم‌داشت $L[\phi](r_1,x)=0$؛ بنابراین، همان‌گونه که از پیش می‌دانستیم

$$y_1(x)=\phi(r_1,x)=x^{r_1}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right],\quad x>0 \qquad (12)$$

یك جواب معادلهٔ (۱) است. اما نکتهٔ مهمتر آنکه، از رابطهٔ (۱۱) درست مانند آنچه در مورد معادلهٔ اویلر داشتیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\right](r_1,x)&=a_0\frac{\partial}{\partial r}[x^r(r-r_1)^2]\Big|_{r=r_1}\\ &=a_0[(r-r_1)^2x^r\ln x+2(r-r_1)x^r]\Big|_{r=r_1}\\ &=0 \qquad (13)\end{aligned}$$

بنابراین، جواب دوم معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$\begin{aligned} y_2(x)&=\frac{\partial\phi(r,x)}{\partial r}\Big|_{r=r_1}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)x^n\right]\right\}\Big|_{r=r_1}\\ &=(x^{r_1}\ln x)\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n\\ &=y_1(x)\ln x+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n,\quad x>0 \qquad (14)\end{aligned}$$

که درآن $a_n'(r_1)$ نمایشگرمقدار da_n/dr در $r=r_1$ است و $a_n(r)$ با رابطهٔ (۱۰) مشخص می‌گردد.

توجه شود که علاوه برفرضهایی که قبلاً داشتیم، دراینجا فرض کرده‌ایم که می‌توان ازسری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)x^n$ جمله به‌جمله نسبت به r مشتق گرفت. علاوه براین، تعیین $a_n(r_1)$ و $a_n'(r_1)$ موضوع ساده‌ای نیست؛ ولیکن ، تعیین دو جواب یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با نقطهٔ غیرعادی منظم نیز مسئلهٔ ساده‌ای نیست.

به‌طور خلاصه، برای تعیین جواب دوم در حالت $r_1=r_2$ سه روش وجود دارد. نخست، می‌توان مستقیماً $b_n(r_1)$ را با جایگزینی عبارت (۵ ب) در معادلهٔ (۱) به‌جای y محاسبه کرد. دوم، می‌توان برای محاسبهٔ $b_n(r_1)=a_n'(r_1)$ نخست $a_n(r)$ وسپس $a_n'(r_1)$ را تعیین کرد. توجه شود کــه در محاسبهٔ جواب اول لازم است کــه $a_n(r_1)$ معلوم باشد ، بنابراین مناسبتر است که عبارت کلی $a_n(r)$ را محاسبه کرد وهردوعبارت $a_n(r_1)$ و $a_n'(r_1)$

را از آن به دست آورد . هنگامی‌که فقط چند جمله از سری $y_2(x)$ ضروری است، یا عبارت $a_n(r)$ بسیار پیچیده و یا محاسبهٔ آن دشوار است، روش نخست ممکن است مناسبتر باشد. روش سوم همان روش کاهش مرتبه است، اما در آن ناگزیر به استفاده از سریها خواهیم بود.

$N = r_1 - r_2$. در این حالت بحث تفصیلی دربارهٔ به‌دست آوردن عبارت (۶ ب) برای جواب دوم بسیار پیچیده‌تر است و به آن نمی‌پردازیم . اما، متذکر می‌شویم که اگر فرض کنیم $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_2+n}$، آنگاه ممکن است محاسبهٔ $a_N(r_2)$ از رابطهٔ (۱۰) دشوار باشد، زیرا

$$F(r+N) = (r+N-r_1)(r+N-r_2) = (r-r_2)(r+N-r_2)$$

به‌ازای $r = r_2$ صفر می‌شود. برای رفع این دشواری a_0 را که می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب کرد، برابر $r - r_2$ می‌گیریم. آنگاه هریك از aها با $r - r_2$ متناسب خواهد شد، بنابراین درصورت کسر رابطهٔ (۱۰) سازهٔ $r - r_2$ وجود خواهد داشت، و با سازهٔ متناظر درمخرج که به‌ازای $n = N$ به‌وجود می‌آید ساده می‌شود. با تحلیلی مشابه آنچه درحالت $r_1 = r_2$ داشتیم به‌این نتیجه می‌رسیم که جواب به‌صورت (۶ ب) است و در آن

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r-r_2)a_n(r)]\bigg|_{r=r_2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (۱۵)$$

$a_n(r)$ از رابطهٔ (۱۰) با قراردادن $a_0 = r - r_2$ و

$$a = \lim_{r \to r_2} (r-r_2) a_N(r) \qquad (۱۶)$$

به‌دست می‌آید. اگر $a_N(r_2)$ متناهی باشد، آنگاه $a = 0$ و در y_2 جملهٔ لگاریتمی وجود نخواهد داشت. این روش در کتاب کادینگتون[1] (فصل ۴) بررسی شده است.

درعمل بهترین راه برای تعیین آن که آیا a درجواب دوم صفر است یا نه آن است که ببینیم آیا می‌توان a_n متناظر به r_2 را محاسبه و $a_N(r_2)$ را تعیین کرد؟ اگرچنین باشد مشکل دیگری نداریم، وگرنه، باید از عبارت (۶ ب) با $a \neq 0$ استفاده کرد.

به‌طور خلاصه، در حالت $r_1 - r_2 = N$ نیز برای تعیین جواب دوم سه روش موجود است. نخست، می‌توان a و $c_n(r_2)$ را مستقیماً با جایگزینی عبارت (۶ ب) به‌جای y در معادلهٔ (۱) محاسبه کرد. دوم، می‌توان $c_n(r_2)$ و a موجود در رابطهٔ (۶ب) را با استفاده از فرمولهای (۱۵) و (۱۶) محاسبه کرد. اگر این روش درنظر گرفته شود، باید درمحاسبهٔ جواب متناظر به $r = r_1$ فرمول کلی $a_n(r)$ را به‌دست آورد و نه اینکه فقط به‌محاسبهٔ $a_n(r_1)$ اکتفا کرد. روش سوم همان روش کاهش مرتبه است.

در بند دیگر سه مثال می‌آوریم تا حالتهای $r_1 = r_2$، $N = r_1 - r_2$ با $a = 0$، و $N = r_1 - r_2$ با $a \neq 0$ را توضیح دهد.

---

1. Coddington

۷.۴* معادلهٔ بسل

در این‌بند به‌بررسی سه حالت خاص معادلهٔ بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (1)$$

که در آن ν مقداری‌است ثابت می‌پردازیم، تا نظریه‌ای را که در بند ۶.۴ موردبحث قرار گرفت توضیح دهد. روشن‌است که $x=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم می‌باشد. برای سهولت تنها به‌بررسی حالت $x>0$ می‌پردازیم.

معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر. این‌مثال حالتی‌راکه درآن ریشه‌های معادلهٔ شاخص برابرند توضیح می‌دهد. با قراردادن $\nu=0$ در معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید

$$L[y]=x^2y''+xy'+x^2y=0 \qquad (2)$$

با جایگزینی

$$y=\phi(r,x)=a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{r+n} \qquad (3)$$

داریم

$$L[\phi](r,x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[(n+r)(n+r-1)+(n+r)]x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n+2}$$
$$=a_0[r(r-1)+r]x^r+a_1[(r+1)r+(r+1)]x^{r+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(n+r)(n+r-1)+(n+r)]+a_{n-2}\}x^{r+n}=0 \qquad (4)$$

ریشه‌های معادلهٔ شاخص $F(r)=r(r-1)+r=0$ عبارتنداز $r_1=0$ و $r_2=0$؛ بنابراین حالت برابری دو ریشه است. رابطهٔ بازگشت عبارت از

$$a_n(r)=\frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)(n+r-1)+(n+r)}=-\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2},\quad n\geqslant 2 \qquad (5)$$

برای تعیین $y_1(x)$ قرار می‌دهیم $r=0$. آنگاه از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شودکه برای آنکه ضریب x^{r+1} صفرشود، باید a_1 را برابرصفر انتخاب‌کرد. بنابراین از رابطهٔ (۵) داریم

$$a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{2n+1}=\cdots=0$$

علاوه براین

$$a_n(0)=-a_{n-2}(0)/n^2,\qquad n=2,4,6,8,\ldots$$

با قراردادن $n=2m$ داریم

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

بدین‌سان

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2},$$

$$a_4(0) = -\frac{a_2(0)}{(2 \cdot 2)^2} = +\frac{a_0}{(2 \cdot 2)^2 2^2} = \frac{a_0}{2^4 2^2}$$

$$a_6(0) = -\frac{a_4(0)}{(2 \cdot 3)^2} = -\frac{a_0}{(2 \cdot 3)^2 2^4 2^2} = -\frac{a_0}{2^6 (3 \cdot 2)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

بنابراین

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \right], \quad x > 0 \tag{7}$$

تابعی راکه درکروشه است تابع بسل نوع اول از رتبهٔ صفر، می‌نامند، و با $J_0(x)$ نشان می‌دهند. از قضیهٔ ۴.۴ نتیجه می‌شودکه این سری بدازای همهٔ مقادیر x همگراست، و J_0 در $x = 0$ تحلیلی است. برخی ازخواص مهم J_0 را در مسائل مورد بحث قرارمی‌دهیم.

در این مثال $y_2(x)$ را با محاسبهٔ $a_n'(0)$ تعیین خواهیم‌کرد. روش دیگرکه درآن تنها باید عبارت (۵ ب) بند ۶.۴ را در معادلهٔ (۲) قرارداد، وسپس b_n را تعیین‌کرد، در مسئلهٔ ۷ بحث شده است. نخست از ضریب x^{r+1} در رابطهٔ (۴) دیده می‌شودکه $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. درنتیجه نه‌تنها $a_1(0) = 0$، بلکه نیز $a_1'(0) = 0$. به‌آسانی از رابطهٔ بازگشت (۵) نتیجه می‌شودکه

$$a_3'(0) = a_5'(0) = \ldots = a'_{2n+1}(0) = \ldots = 0$$

بنابراین تنها باید به‌محاسبهٔ $a'_{2m}(0)$، $m = 1, 2, 3, \ldots$ از رابطهٔ (۵)

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(2m+r)^2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

پرداخت. بنابراین

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(2+r)^2}$$

$$a_4(r) = -\frac{a_2(r)}{(4+r)^2} = +\frac{a_0}{(4+r)^2(2+r)^2}$$

$$a_6(r)=-\frac{a_4}{(6+r)^2}=-\frac{a_0}{(6+r)^2(4+r)^2(2+r)^2}$$
$$\vdots$$
$$a_{2m}(r)=\frac{(-1)^m a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2\ldots(4+r)^2(2+r)^2},\quad m=1,2,3,\ldots \tag{8}$$

محاسبهٔ $a'_{2m}(r)$ را می‌توان با توجه به‌نکتهٔ زیر به‌آسانترین وجه انجام داد. اگر

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots(x-\alpha_n)^{\beta_n},$$

آنگاه

$$f'(x)=\beta_1(x-\alpha_1)^{\beta_1-1}[(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_n)^{\beta_n}]$$
$$+\beta_2(x-\alpha_2)^{\beta_2-1}[(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots(x-\alpha_n)^{\beta_n}]+\cdots$$

بنابراین به‌ازای x مخالف با α_1، α_2، . . . ، α_n

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\beta_1}{x-\alpha_1}+\frac{\beta_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{\beta_n}{x-\alpha_n}$$

بدین‌سان، از رابطهٔ (۸) داریم

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)}=-2\left(\frac{1}{2m+r}+\frac{1}{2m-2+r}+\cdots+\frac{1}{2+r}\right)$$

و با قراردادن $r=0$ داریم

$$a'_{2m}(0)=-2\left[\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(m-1)}+\frac{1}{2(m-2)}+\cdots+\frac{1}{2}\right]a_{2m}(0)$$

با جایگزینی $a_{2m}(0)$ از رابطهٔ ۶، و با قراردادن

$$H_m=\frac{1}{m}+\frac{1}{m-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1 \tag{9}$$

سرانجام به‌دست می‌آید

$$a'_{2m}(0)=-H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2},\quad m=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

جواب دوم معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر با قرار دادن $a_0=1$ و جایگزینی $y_1(x)$ و

$a'_{2m}(0)=b_{2m}(0)$ در رابطهٔ (۵ ب) بند ۶.۴ به‌دست می‌آید. داریم

$$y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}, \quad x>0 \tag{11}$$

به‌جای y_2، جواب دوم معمولاً به‌صورت یك ترکیب خطی از J_0 و y_2 اختیار می‌شود. این تابع را، تابع بسل نوع دوم از رتبهٔ صفر می‌نامند، و با Y_0 نشان می‌دهند. مطابق با کتاب کاپسون[1] (فصل ۱۲) تعریف می‌کنیم.[2]

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}[y_2(x)+(\gamma-\ln 2)J_0(x)] \tag{12}$$

در اینجا γ یك مقدار ثابت است، که به‌ثابت اویلر-ماسکرونی[3] مشهور است؛ و با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)\cong 0.5772 \tag{13}$$

با جایگزینی $y_2(x)$ در رابطهٔ (۱۲)، خواهیم داشت

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right], \quad x>0 \tag{14}$$

جواب عمومی معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر به‌ازای $x>0$ عبارت است از

$$y=c_1J_0(x)+c_2Y_0(x)$$

توجه شود که چون وقتی $x\to 0$ داریم $J_0(x)\to 1$ بنابراین $Y_0(x)$ در $x=0$ غیرعادی لگاریتمی است؛ یعنی، هنگامی‌که با مقادیر مثبت $x\to 0$، تغییرات $Y_0(x)$ همانند $(2/\pi)\ln x$ است. بدین‌سان اگر همان طورکه اغلب اتفاق می‌افتد بخواهیم جوابهایی از معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر راکه در مبدأ متناهی باشند بیابیم، باید از Y_0 صرف‌نظر کنیم. نمودارهای توابع J_0 و Y_0 درشکل ۲.۴ نشان داده شده‌اند.

این نکتهٔ جالب را با توجه به‌شکل ۲.۴ می‌توان دریافت که به‌ازای مقادیر بزرگ x هردوتابع $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ نوسانی‌اند. این کیفیت رامی‌توان ازمعادلهٔ اصلی پیش‌بینی کرد؛ ودر واقع برای جوابهای معادلهٔ بسل رتبهٔ ν برقرار است. **اگرمعادلهٔ** (۱) را بر x^2 تقسیم‌کنیم خواهیم داشت

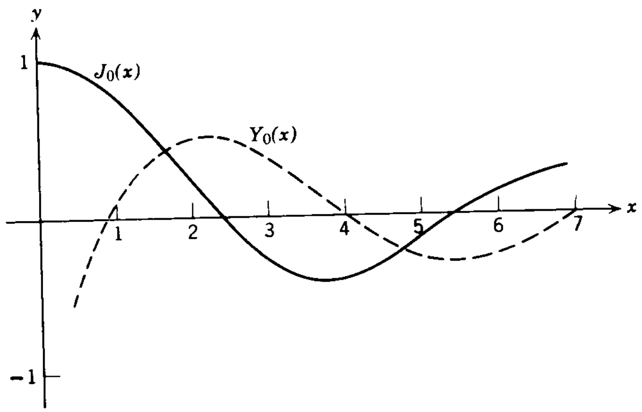
$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

---

1. Copson

۲. مؤلفین دیگر تعاریف دیگری برای Y_0 به‌کارمی‌برند. آنچه در اینجا برای Y_0 انتخاب شد به‌عنوان تابع وبر(Weber)، (۱۸۴۲-۱۹۱۳) نیز مشهور است.

3. Máscheroni (1750-1800)



شکل۲۰۴ توابع بسل رتبهٔ صفر.

به‌ازای مقادیر بزرگ x، می‌توان حدس زد که جمله‌های $(1/x)y'$ و $(\nu^2/x^2)y$ کوچك‌اند و بنابراین می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد. درصورت صحت حدس فوق، معادلهٔ بسل رتبهٔ ν را می‌توان با

$$y''+y=0$$

تقریب زد. جوابهای این معادله عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$؛ بدین‌سان می‌توان پیش‌بینی کرد که جوابهای معادلهٔ بسل به‌ازای مقادیر بزرگ x با ترکیبهای خطی $\sin x$ و $\cos x$ مشابهند. این نکته از آن جهت که توابع بسل نوسانی‌اند درست است؛ اما ازجنبه‌های دیگردرست نیست. به‌ازای مقادیر بزرگ x توابع J_0 و Y_0 هنگامی که x افزایش یابد مستهلك می‌شوند؛ به‌ویژه، می‌توان ثابت کرد که وقتی $x\to\infty$ تغییرات تابع $J_0(x)$ همانند $(2/\pi x)^{1/2}\cos(x-\pi/4)$ است. این نکته را نمی‌توان ازمعادلهٔ $y''+y=0$ استنباط کرد. بدین‌سان معادلهٔ $y''+y=0$ تقریب مناسبی از معادلهٔ بسل به‌ازای مقادیر بزرگ x به‌دست نمی‌دهد. جوابهای این دومعادله دارای ویژگیهای مشترکی می‌باشند، اما تفاوتهای بارزی نیز دارند. باید به‌جوابهای معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲ که در ذیل مورد بحث قرار گرفته‌اند نیز توجه داشت.

معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲. این مثالی است برای حالتی که درآن تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخص عدد صحیح مثبتی است، اما جواب دوم شامل جملهٔ لگاریتمی نیست. با قراردادن $\nu=1/2$ در معادلهٔ (۱) داریم

$$L[y]=x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \qquad (15)$$

اگرسری (۳) را به‌جای $y=\phi(r,x)$ بگذاریم، به‌دست می‌آید

$$L[\phi](r,x)=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-۱)+(r+n)-\frac{۱}{۴}\right]a_nx^{r+n}$$

$$+\sum_{n=\circ}^{\infty}a_nx^{r+n+۲}=\left(r^۲-\frac{۱}{۴}\right)a_\circ x^r+\left[(r+۱)^۲-\frac{۱}{۴}\right]a_۱x^{r+۱}$$

$$+\sum_{n=۲}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^۲-\frac{۱}{۴}\right]a_n+a_{n-۲}\right\}x^{r+n}=\circ \qquad (۱۶)$$

ریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از $r_۱=۱/۲$ ، $r_۲=-۱/۲$ ؛ بنابراین تفاضل ریشه‌ها برابر یك عدد صحیح است. رابطهٔ بازگشت عبارت است از

$$\left[(r+n)^۲-\frac{۱}{۴}\right]a_n=-a_{n-۲}, \quad n\geqslant ۲ \qquad (۱۷)$$

ازضریب $x^{r+۱}$ در رابطهٔ(۱۶)، $a_۱=\circ$ متناظر به‌ریشهٔ بزرگتر $r_۱=۱/۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین، از رابطهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$a_۳=a_۵=\cdots=a_{۲n+۱}=\cdots=\circ$$

علاوه براین، به‌ازای $r=۱/۲$ داریم

$$a_n=-\frac{a_{n-۲}}{n(n+۱)}, \quad n=۲,۴,۶,\ldots$$

یا با قراردادن $n=۲m$،

$$a_{۲m}=-\frac{a_{۲m-۲}}{(۲m+۱)۲m}, \quad m=۱,۲,۳,\ldots$$

بدین‌سان

$$a_۲=-\frac{a_\circ}{۳\cdot۲}=-\frac{a_\circ}{۳!}$$

$$a_۴=-\frac{a_۲}{۵\cdot۴}=+\frac{a_\circ}{۵\cdot۴\cdot۳\,!}=\frac{a_\circ}{۵!}$$

$$\vdots$$

$$a_{۲m}=\frac{(-۱)^m a_\circ}{(۲m+۱)!}, \quad m=۱,۲,۳,\ldots \qquad (۱۸)$$

بنابراین، با قراردادن $a_\circ=۱$، داریم

$$y_1(x)=x^{1/2}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right]$$
$$=x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!},\quad x>0 \tag{۱۹}$$

سری توانی موجود در رابطهٔ (۱۹) دقیقاً سری تیلر $\sin x$ است؛ بنابراین یک جواب معادلهٔ بسل‌رتبهٔ ۱/۲ عبارت است از $x^{-1/2}\sin x$. تابع بسل‌نوع اول رتبهٔ ۱/۲، $J_{1/2}$، را با $(2/\pi)^{1/2}y_1$ تعریف می‌کنند. بدین‌سان

$$J_{1/2}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x,\quad x>0 \tag{۲۰}$$

متناظر به‌ریشهٔ $r_2=-1/2$ امکان دارد محاسبهٔ a_1 با اشکال مواجه شود، زیرا $N=r_1-r_2=1$. اما، از رابطهٔ (۱۶) دیده می‌شود که به‌ازای $r=-1/2$ ضرایب a_0 و a_1 صفرند، وبنابراین می‌توان ضرایب a_0 و a_1 را به‌طوردلخواه انتخاب کرد. آنگاه می‌توان متناظر به a_0 از رابطهٔ بازگشت (۱۷) مقادیر a_2، a_4، . . . و متناظر با a_1 مقادیر a_3، a_5، a_7، . . . را به دست آورد. بنابراین جواب دوم شامل جملهٔ لگاریتمی نیست. خواننده به‌عنوان تمرین نشان خواهد دادکه به‌ازای $r=-1/2$ از رابطهٔ (۱۷) داریم

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!},\quad n=1,2,\dots$$

و

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!},\quad n=1,2,\dots$$

بنابراین

$$y_2(x)=x^{-1/2}\left[a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$
$$=a_0\frac{\cos x}{x^{1/2}}+a_1\frac{\sin x}{x^{1/2}},\quad x>0 \tag{۲۱}$$

جملهٔ دوم طرف دوم معادله مضربی از $y_1(x)$ است. جواب دوم مستقل‌خطی‌معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲ را معمولاً متناظر با $a_0=(2/\pi)^{1/2}$ اختیارمی‌کنند و با $J_{-1/2}$ نشان می‌دهند. بدین‌سان

$$J_{-1/2}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x,\quad x>0 \tag{۲۲}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱۵) عبارت است از $y=c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x)$.

معادلهٔ بسل رتبهٔ یك. این مثال مبین حالتی است که درآن تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخص عدد صحیح مثبتی است وجواب دوم شامل یك جملهٔ لگاریتمی است. با قراردادن $\nu=1$ در معادلهٔ (۱) داریم

$$L[y]=x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0 \tag{۲۳}$$

اگر به‌جای $y=\phi(r,x)$ سری (۳) را قرارداده وجمله‌ها را مانند مثالهای پیش‌دسته‌بندی کنیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}L[\phi](r,x)&=a_0(r^2-1)x^r+a_1[(r+1)^2-1]x^{r+1}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(r+n)^2-1]a_n+a_{n-2}\}x^{r+n}=0\end{aligned} \tag{۲۴}$$

ریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از $r_1=1$ و $r_2=-1$. رابطهٔ بازگشت چنین است

$$[(r+n)^2-1]a_n(r)=-a_{n-2}(r) \qquad n\geqslant 2 \tag{۲۵}$$

متناظر به‌ریشهٔ بزرگتر $r=1$ رابطهٔ بازگشت عبارت است از

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \quad n=2,3,4,\ldots$$

از ضریب x^{r+1} در رابطهٔ (۲۴) دیده می‌شود که $a_1=0$، و از رابطهٔ بازگشت نتیجه می‌شود که $a_3=a_5=\ldots=0$. به‌ازای مقادیر زوج n، قرارمی‌دهیم $n=2m$؛ آنگاه

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)}=-\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \quad m=1,2,3\ldots$$

بنابراین

$$a_2=-\frac{a_0}{2^2(2)(1)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{2^2(3)(2)}=+\frac{a_0}{2^4(3\cdot2)(2\cdot1)}=\frac{a_0}{2^4\,3!\,2!}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{2^2(4)(3)}=-\frac{a_0}{2^6\,4!\,3!}$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m=1,2,3,\ldots \tag{۲۶}$$

با $a_0 = 1$ خواهیم داشت

$$y_1(x) = x\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \tag{۲۷}$$

تابع بسل نوع اول رتبهٔ یك را معمولاً برابر $\frac{1}{2}y_1$ می‌گیرند و با J_1 نشان می‌دهند:

$$J_1(x) = \frac{1}{2}y_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \tag{۲۸}$$

این‌سری به‌ازای همهٔ مقادیر x همگرای مطلق است؛ بنابراین‌تابع J_1 به‌ازای همهٔ مقادیر x معین است.

برای تعیین جواب دوم معادلهٔ بسل رتبهٔ یك، به توضیح روش جایگزینی مستقیم می‌پردازیم. محاسبات دشوار است ، و نمی‌توان توقع داشت دانشجویانی‌که ورزیدگی ندارند محاسبات مشابه را به‌طورکامل انجام دهند. اما، دانشجو می‌تواند a وچند ضریب نخستین c_n را از رابطهٔ (۲۹) به‌دست آورد. بنابرقضیهٔ ۴.۴ فرض می‌کنیم که

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \quad x > 0 \tag{۲۹}$$

با محاسبهٔ $y_2'(x)$ و $y_2''(x)$، و جایگزینی در معادلهٔ (۲۳)، وبا استفاده از این نکته‌که J_1 جواب معادلهٔ (۲۳) است به‌دست می‌آید

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \tag{۳۰}$$

که در آن $c_0 = 1$. با جایگزینی $J_1(x)$ از رابطهٔ (۲۸) ، و افزایش اندیس جمع‌بندی دوسری، و برخی محاسبات جبری خواهیم داشت

$$-c_1 + [0\cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n$$
$$= -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!}\right] \tag{۳۱}$$

از رابطهٔ (۳۱)نخست دیده می‌شودکه $c_1 = 0$ و $a = -c_0 = -1$. سپس با توجه بداینکه در طرف دوم تنها توانهای فرد x وجود دارد، نتیجه می‌شودکه ضرایب توانهای زوج x در طرف اول باید صفر باشند. بدین‌سان، چون $c_1 = 0$، داریم $c_3 = c_5 = \dots = 0$. متناظر به‌توانهای فرد x رابطهٔ بازگشت زیر را به‌دست می‌آوریم(با قراردادن $n = 2m+1$ در سری طرف اول رابطهٔ (۳۱))

$$[(2m+1)^2-1]c_{2m+2}+c_{2m}=\frac{(-1)(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m=1,2,3,\ldots \tag{32}$$

با قراردادن $m=1$ در رابطهٔ (۳۲) به‌دست می‌آید

$$(3^2-1)c_4+c_2=(-1)3/(2^2.2!)$$

توجه شود که c_2 را می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب کرد، و سپس c_4 را از این معادله به‌دست آورد. همچنین توجه شود که در معادلهٔ متناظر به‌ضریب x، c_2 در ۰ ضرب شده است، و همین معادله برای تعیین a به‌کار رفت. اینکه c_2 دلخواه است چندان تعجب‌آور نیست، زیرا c_2 ضریب x درعبارت $x^{-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right]$ است. درنتیجه، c_2 فقط مضربی از J_1 را ایجاد می‌کند، و y_2 تنها با تقریب مضربی از J_1 معین می‌شود. برطبق آنچه درعمل متداول است قرار می‌دهیم $c_2=1/2^2$. آنگاه به‌دست می‌آوریم

$$c_4=\frac{-1}{2^4.2}\left[\frac{3}{2}+1\right]=\frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+1\right]$$

$$=\frac{(-1)}{2^4.2!}(H_2+H_1)$$

جواب رابطهٔ بازگشت (۳۲) عبارت است از

$$c_{2m}=\frac{(-1)(-1)^m(H_m+H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}, \quad m=1,2,\ldots$$

با در نظرگرفتن $H_0=0$. البته اثبات این مطلب کار آسانی نیست (و انتظار هم نداریم که دانشجو این محاسبات را انجام دهد). بدین‌سان

$$y_2(x)=-J_1(x)\ln x+\frac{1}{x}\left[1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(H_m+H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}x^{2m}\right], \quad x>0 \tag{33}$$

محاسبهٔ $y_2(x)$ با استفاده از روش دیگر [روابط (۱۵) و (۱۶) بند ۶.۴ را ببینید] که در آن به‌تعیین $c_n(r_2)$ می‌پردازیم اندکی آسانتر است. به‌ویژه با این روش فرمول کلی c_{2m} بدون نیاز به‌حل رابطهٔ بازگشت (۳۲) به‌دست می‌آید (مسئلهٔ ۸ را ببینید). از این لحاظ ممکن است خواننده علاقه‌مند باشد که محاسبات جواب دوم معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر را که درمتن و مسئلهٔ ۷ آمده است با یکدیگر مقایسه کند.

جواب دوم معادلهٔ (۲۳)، تابع بسل نوع دوم رتبهٔ یك یعنی، Y_1، رامعمولاً[؟] به‌صورت یك ترکیب خطی از J_1 و y_2 انتخاب می‌کنند. طبق کتاب کاپسون (فصل ۱۲)، Y_1 به‌صورت

زیر تعریف می‌شود

$$Y_1(x)=\frac{2}{\pi}[-y_2(x)+(\gamma-\ln 2)J_1(x)] \qquad (۳۴)$$

که در آن γ با رابطهٔ (۱۳) تعریف شده است. جواب عمومی معادلهٔ (۲۳) بدازای $x>0$ عبارت است از

$$y=c_1J_1(x)+c_2Y_1(x)$$

توجه شود که J_1 در $x=0$ تحلیلی است، اما جواب دوم Y_1 وقتی $x\to 0$ همانند $1/x$ بی‌کران می‌شود.

مسائل

۱. نشان دهید که هریك از معادلات دیفرانسیل زیر در $x=0$ دارای یك نقطهٔ غیرعادی منظم است، و دو جواب مستقل خطی آن را بدازای $x>0$ تعیین کنید.

(الف) $x^2y''+2xy'+xy=0$ (ب) $x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$

(ج) $x^2y''+xy'+2xy=0$ (د) $x^2y''+4xy'+(2+x)y=0$

۲. دوجواب مستقل خطی معادلهٔ بسل رتبهٔ ۳/۲ زیر را بیابید

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)y=0,\quad x>0$$

۳. نشان دهید که معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0,\quad x>0$$

را با تعویض تابع $y=x^{-1/2}v(x)$ می‌توان به‌معادلهٔ

$$v''+v=0$$

ساده کرد. از اینجا نتیجه بگیرید که جوابهای معادلهٔ بسل رتبهٔ ۱/۲ عبارتند از $y_1(x)=x^{-1/2}\cos x$ و $y_2(x)=x^{-1/2}\sin x$.

۴. مستقیماً نشان دهید که سری $J_0(x)$، رابطهٔ (۷)، بدازای همهٔ مقادیر x همگرای مطلق است.

۵. مستقیماً نشان دهید که سری $J_1(x)$، رابطهٔ (۲۸)، بدازای همهٔ مقادیر x همگرای مطلق است و $J_0'(x)=-J_1(x)$.

۶. معادلهٔ بسل رتبهٔ ν

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad x > 0$$

راکه در آن ν حقیقی و بزرگتر ازصفر است در نظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهیدکه $x = 0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادلهٔ شاخص عبارتند از ν و $-\nu$.

(ب) نشان دهیدکه یك جواب متناظر به ریشهٔ بزرگتر ν عبارت است از

$$y_1(x) = x^\nu \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right]$$

(ج) نشان دهیدکه اگر 2ν عدد صحیح نباشد جواب دوم عبارت است از

$$y_2(x) = x^{-\nu} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)(m-\nu-1)\cdots(2-\nu)(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right]$$

توجه شودکه $y_1(x)$ در $x = 0$ تحلیلی است، و $y_2(x)$ وقتی $x \to 0$ بی‌کران است.

(د) بااستفاده از روشهای مستقیم تحقیق کنیدکه سریهای موجود درعبارتهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به ازای همهٔ مقادیر x همگرایند. همچنین تحقیق کنیدکه y_2 تنها با شرط آنکه ν عدد صحیح نباشد یك جواب است.

۷. دراین بند نشان دادیم‌که یك جواب معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر،

$$L[y] = x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

عبارت است از J_0، که از رابطهٔ (۷) با $a_0 = 1$ به‌دست می‌آید. بنابرقضیهٔ ۴.۴ به‌ازای $x > 0$ جواب دوم به‌صورت

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

است.

(الف) نشان دهیدکه

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2x J_0'(x) \quad \text{(یك)}$$

(ب) با جایگزینی سری $J_0(x)$ در رابطهٔ (یك)، نشان دهیدکه

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad \text{(دو)}$$

(ج) توجه شودکه درطرف دوم رابطهٔ (دو) تنها توانهای زوج x وجود دارد. نشان

دهیدکه $b_1=b_3=b_5=\dots=0$، $b_2=1/2^2(1!)^2$ و

$$(2n)^2b_{2n}+b_{2n-2}=-2(-1)^n\frac{(2n)}{2^{2n}(n!)^2},\quad n=2,3,4,\dots$$

ونتیجه بگیریدکه

$$b_4=\frac{-1}{2^2 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\quad \text{و}\quad b_6=\frac{1}{2^2 4^2 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

جواب عمومی رابطهٔ بازگشت مزبور عبارت است از $b_{2n}=(-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. با جایگزینی b_n درعبارت $y_2(x)$ جوابی راکه در رابطهٔ (۱۱) داده شده است به دست می‌آوریم.

۸. برای معادلهٔ بسل رتبهٔ یك جواب دومی با محاسبهٔ $c_n(r_2)$ و a از رابطهٔ (۶ب) بند ۶.۴، براساس فرمولهای (۱۵) و (۱۶) همان بند بیابید. چند راهنمایی لازم درجریان این محاسبات را ذیلاً بیان می‌کنیم. نخست، با استفاده از رابطهٔ (۲۴) نشان دهیدکه $a_1(-1)=a_1'(-1)=0$. آنگاه نشان دهیدکه $c_1(-1)=0$ وبا توجه به رابطهٔ بازگشت، $c_n(-1)=0$، $n=3,5,\dots$. بالاخره، با استفاده از رابطهٔ (۲۵) نشان دهیدکه

$$a_{2m}(r)=\frac{(-1)^m a_0}{(2m+r+1)(2m+r-1)^2(2m+r-3)^2\cdots(r+3)^2(r+1)}$$

$m=1,2,3,\dots$، و $c_{2m}(-1)=(-1)^{m+1}(H_m+H_{m-1})/2^{2m}m!(m-1)!$ را محاسبه کنید.

۹. با تعویض مناسب متغیرها اغلب می‌توان یك معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب متغیر را به معادلهٔ بسل از رتبهٔ ν تبدیل کرد. به‌عنوان مثال، نشان دهیدکه یك جواب

$$x^2y''+\left(\alpha^2\beta^2x^{2\beta}+\frac{1}{4}-\nu^2\beta^2\right)y=0,\quad x>0$$

عبارت است از $y=x^{1/2}f(\alpha x^\beta)$ که درآن $f(\xi)$ یك جواب معادلهٔ بسل از رتبهٔ ν است.

۱۰. با استفاده ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۹ نشان دهیدکه جواب عمومی معادلهٔ آیری

$$y''-xy=0,\quad x>0$$

عبارت است از $y=x^{1/2}[c_1f_1(\frac{2}{3}ix^{3/2})+c_2f_2(\frac{2}{3}ix^{3/2})]$ که درآن $f_1(\xi)$ و $f_2(\xi)$ دوجواب مستقل خطی معادلهٔ بسل از رتبهٔ $\frac{1}{3}$ می‌باشند.

۱۱. می‌توان نشان دادکه J_0 دارای بینهایت صفر در $x>0$ است. به ویژه،

حل کنیم، اغلب اما نه همواره، شرایط اولیه نیز درهمین نقطه مشخص شده‌اند. اگر توابع P، Q و R دارای سازهٔ مشترک $x-x_0$ باشند، فرض می‌شود که از معادلهٔ (۱) این سازه مشترک را حذف کرده‌ایم. بنابراین اگر $P(x_0)=0$، آنگاه حداقل یکی از دومقدار $Q(x_0)$ و $R(x_0)$ صفر نیست. جواب معادلهٔ (۱) دریک فاصلهٔ شامل x_0 تا اندازه‌ای به‌تغییرات P دراین فاصله وابسته است. بدویژه، اگر P دراین‌فاصله صفر نشود، می‌توان باتقسیم معادلهٔ (۱) بر $P(x)$ آن را بدصورت

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

درآورد، که درآن $p(x)=Q(x)/P(x)$ و $q(x)=R(x)/P(x)$ توابعی پیوسته‌اند. بنابراین باتوجه بدقضیهٔ ۲.۳ وجود یك جواب تضمین می‌شود. دربندهای ۲.۴ و ۱.۲.۴ به بررسی جواب معادلهٔ (۱) در همسایگی یك نقطهٔ x_0 که درآن $P(x_0)\neq 0$ است می‌پردازیم. چنین نقطه‌ای را برای معادلهٔ (۱) یك نقطهٔ عادی می‌نامند. ازطرف دیگر هنگامی که $P(x_0)=0$ باشد، قضیه ۲.۳ را نمی‌توان به‌کاربرد، زیرا $p(x)$ و یا $q(x)$ به‌ازای $x\to x_0$ نامحدود خواهندشد. چنین نقطه‌ای رابرای معادلهٔ(۱) یك نقطهٔ غیرعادی یا نقطهٔ تکین می‌نامند. بندهای ۳.۴ تا ۷.۴ به‌تعیین جواب‌های معادلهٔ (۱) درهمسایگی یك نقطهٔ غیرعادی اختصاص دارند.

درهرحالت روش حل مبتنی براین اندیشه است که y را به‌صورت یك سری توانی برحسب $x-x_0$ بنویسیم که درآن x_0 یك نقطهٔ مشخص است. گرچه ممکن است درنظر اول تعیین جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل به صورت سری، یأس‌آمیز جلوه‌کند، اما از لحاظ محاسبات این روش می‌تواند آسانترین راه برای حل این معادلهٔ دیفرانسل باشد. درواقع، جداول $\sin x$ و $\cos x$ (جوابهای $y''+y=0$) را می‌توان با استفاده از سری تیلر آنها حول $x=0$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ (0!=1) \quad (3)$$

ویا سریهای مشابه محاسبه‌کرد.

چون دراین فصل سریها را بسیار زیاد به‌کارخواهیم برد، شایسته است به‌اختصار و بدون اثبات نتایجی از سریها و به‌ویژه سریهای توانی را بیان کنیم.

۰۱ سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ را هنگامی درنقطهٔ x همگرا گویند، که

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n(x-x_0)^n$$

سه صفر نخستین تقریباً برابرند با ۲٫۴۰۵، ۵٫۵۲۰ و ۸٫۶۵۳ (شکل ۲.۴ را ببینید). صفرهای $J_\circ$ را با λ_j، $j=۱, ۲, \ldots$ نشان می‌دهند، درنتیجه

$$J_\circ(\lambda_j x)=\begin{cases}۱, & x=\circ\\ \circ, & x=۱\end{cases}$$

تحقیق کنید که $y=J_\circ(\lambda_j x)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+\frac{۱}{x}y'+\lambda_j^۲ y=\circ, \quad x>\circ$$

صدق می‌کند. ازآنجا نشان دهید که

$$\int_\circ^۱ xJ_\circ(\lambda_i x)J_\circ(\lambda_j x)\,dx=\circ, \quad \text{اگر } \lambda_i\neq\lambda_j$$

این خاصیت مهم $J_\circ(\lambda_i x)$، به‌عنوان خاصیت تعامد معروف است، و درحل مسائل مقادیر مرزی مفید واقع می‌شود (بند ۵.۱۱ و ۶.۱۱ را ببینید).
راهنمایی: معادلهٔ دیفرانسیل $J_\circ(\lambda_i x)$ را بنویسید، آن را در $xJ_\circ(\lambda_j x)$ ضرب کرده و از $xJ_\circ(\lambda_i x)$ برابر معادلهٔ دیفرانسیل $J_\circ(\lambda_j x)$ تفریق کنید، سپس از ۰ تا ۱ انتگرال بگیرید.

مراجع

Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford University, Oxford, 1935.

برای اثبات قضیه‌های ۱.۴، ۳.۴، و ۴.۴ را می‌توانید به‌کتابهای متوسط یا پیشرفته‌تر به‌عنوان مثال فصل ۳ و ۴ کادینگتن، یا فصل ۳ و ۴ کتاب زیر را ببینید:

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations*, Second ed., Macmillan, New York, 1964.

برای بحث دربارهٔ نقطهٔ دربینهایت، که درمسئلهٔ ۱۳ بند ۳.۴ مطرح شده است همین کتابها را ببینید. بررسی جوابها در مجاورت نقطهٔ غیرعادی غیرمنظم یکی از مباحث پیشرفته‌تر است؛ بحث مختصری دراین باره درفصل ۵ کتاب زیر آمده است:

Coddington, E. A. and Levinson,N. ; *Theory of Ordinary Differential Equatinos*, McGraw-Hill, New York, 1955.

برای بحث کاملتر دربارهٔ معادلهٔ بسل، معادلهٔ لژاندر وبسیاری ازمعادلات دیگر راکه نام برده‌ایم، به کتابهای پیشرفته‌تر معادلات دیفرانسیل، روشهای ریاضیات کاربسته و توابع مخصوص رجوع کنید. کتاب زیر به‌موضوع توابع مخصوص ازقبیل چندجمله‌ایهای لژاندر، توابع بسل وغیره می‌پردازد.

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics*, Holt, New-York, 1961.

۵

معادلات خطی مرتبهٔ بالاتر

۱.۵ مقدمه

دراین فصل نظریهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم راکه درفصل ۳ شرح دادیم به معادلات خطی مراتب بالاتر تعمیم می‌دهیم. یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام معادله‌ای است به‌صورت

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+P_n(x)y=G(x) \quad (۱)$$

دراینجا جز مواردی که خلاف‌آن تصریح شود، فرض می‌کنیم که توابع P_0، . . . ، P_n و G روی یك فاصلهٔ $\alpha < x < \beta$ توابعی با مقدارحقیقی وپیوسته‌اند، و P_0 هیچگاه دراین فاصله صفر نمی‌شود. آنگاه با تقسیم معادلهٔ (۱) بر $P_0(x)$ به‌دست می‌آید

$$L[y]=\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=g(x) \quad (۲)$$

که درآن، بـا استفاده ازهمان نمادهـای فصل ۳، عملگر دیفرانسیل خطی L را تعـریف کرده‌ایم. نظریهٔ ریاضی وابسته به معادلهٔ (۲) کاملاً شبیه نظریـهٔ معادلات خطی مرتبهٔ دوم است؛ به‌همین سبب اغلب تنها به‌بیان‌نتایج درمورد معادلات خطی مرتبهٔ nام اکتفا می‌کنیم. براهین اغلب نتایج نیزمشابه به براهین مربوط به‌معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم است،وآنهارا معمولاً به‌عنوان تمرین به خواننده واگذارکرده‌ایم.

نخست با توجه به‌آنکه معادلهٔ (۲) شامل مشتق nام y نسبت به x است، حل معادلهٔ (۲) به طور کلی مستلزم n انتگرال‌گیری خواهد بود. هریك ازاین انتگرال‌گیریها مقدار ثابت دلخواهی را وارد می‌کند. بنابراین می‌توان انتظار داشت‌که برای تعیین یك جواب یکتا لازم باشد‌که n شرط اولیه، مثلاً

$$y(x_\circ)=y_\circ\,,\quad y'(x_\circ)=y'_\circ\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(x_\circ)=y_\circ^{(n-1)} \qquad (۳)$$

مشخص شود، $x_\circ$ می‌تواند هـر نقطه‌ای از فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ باشد، و $y_\circ$ ، $y'_\circ$ ، . . . ، $y_\circ^{(n-1)}$ مجموعهٔ مفروضی از ثابتهای حقیقی است. موضوع وجود چنین جواب ویکتایی آن با قضیهٔ وجود ویکتایی زیر اثبات می‌گردد.

قضیه ۱.۵. اگـر توابع p_1 ، p_2 ، . . . ، p_n و g روی فـاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ پیوسته باشند، آنگاه یك وتنها یك تابـع $y=\phi(x)$ وجود داردکه روی فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ درمعادلهٔ (۲) و شرایط اولیهٔ (۳) صدق می‌کند.

اثبات این قضیه را دراینجا نمی‌آوریم؛ اما، به این نکته توجه خواهیم کردکه اگر توابع p_1 ، p_2 ، . . . ، p_n ثابت باشند، جواب معادلهٔ (۲) راکه درشرایط (۳) صدق کند به‌طور واقعی می‌توان ساخت (بندهای ۳.۵ــ۵.۵ را ببینید). گرچه دراین حالت جوابی را می‌شناسیم، اما بی‌استفاده ازقضیهٔ ۱.۵ ازیکتایی آن بی‌اطلاعیم. اثبات کامل قضیه را می‌توان درکتاب اینس (بند ۳۲.۳) یاکتاب‌کادینگتون (فصل ۶) پیدا کرد.

همانند حالت متناظر بـه مسئلهٔ مرتبهٔ دوم، نخست به‌بحث پیرامون مسئلهٔ حل معادلهٔ همگن یا متمم

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=\circ \qquad (۴)$$

می‌پردازیم. نظریهٔ عمومی معادلهٔ همگن (۴) دربند ۲.۵ و روش حل‌آن به‌هنگامی‌که p_jها ثابت باشند دربند ۳.۵ موردبحث‌قرارگرفته است. سپس به‌مسئلهٔ تعیین یك جواب خصوصی y_p برای معادلهٔ ناهمگن (۲) می‌پردازیم. روش ضرایب نامعین و روش تغییر پارامترهـا برای تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۲) دربندهـای ۴.۵ و ۵.۵ به‌ترتیب موردبحث قرار خواهندگرفت.

مسائل

۱. با فرض آنکه تـوابع p_1 ، . . . ، p_n روی فاصلـه‌ای شامل مبدأ پیوسته‌اند، و $y=\phi(x)$ یك جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=\circ\,,$$
$$y(\circ)=y_\circ\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(\circ)=y_\circ^{(n-1)}$$

است، $\phi^{(n)}(\circ)$ را تعیین‌کنید. نشان دهیدکـه اگـر p_1 ، . . . ، p_n در $x=\circ$ مشتق‌پذیر

باشند، آنگاه $\phi^{(n+1)}(0)$ را می‌توان برحسب داده‌های اولیه تعیین کرد.

۲. مشابه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول و دوم می‌توان انتظار داشت که اگر f واجد شرایط مناسبی باشد، معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nام

$$y^{(n)}=f(x\,,\,y\,,\,y',\,y'',\,\ldots,\,y^{(n-1)})$$

دارای جوابی است که شامل n ثابت دلخواه است. برعکس می‌توان ثابت کرد که یك خانواده از توابع که شامل n ثابت دلخواه باشد، جواب یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nام است. با حذف ثابتهای c_1، ...، c_n معادلهٔ دیفرانسیلی را که هریك از توابع زیر در آن صدق می‌کند بیابید.

(الف) $y=c_1+c_2x+c_3x^2+\sin x$

(ب) $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

(ج) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$

(د) $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

(ه) $y=x+c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

(و) $y=c_1+c_2x+c_3\sinh x+c_4\cosh x$

۳. برای هریك ازمعادلات خطی زیر فواصلی را تعیین کنید که وجود جواب در آن مسلم باشد.

(الف) $y^{\text{iv}}+4y'''+3y=x$

(ب) $xy'''+(\sin x)y''+3y=\cos x$

(ج) $x(x-1)y^{\text{iv}}+e^xy''+4x^2y=0$

(د) $y'''+xy''+x^2y'+x^3y=\ln x$

۲.۵ نظریهٔ عمومی معادلات خطی مرتبهٔ nام

اگر توابع y_1، y_2، ...، y_n جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0 \qquad (1)$$

باشند، مستقیماً ازمحاسبه نتیجه می‌شود که ترکیب خطی

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \qquad (2)$$

که در آن c_1، ...، c_n ثابتهای دلخواه‌اند، نیزیك جواب معادلهٔ (۱) است. طبعاً این سؤال

مطرح می‌شود که آیا هرجواب معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت یك ترکیب خطی از y_1، y_2، . . . ، y_n بیان کرد. جواب این سؤال هنگامی مثبت است که شرایط اولیهٔ

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{۳}$$

هرچه باشند، بتوان ثابتهای c_1، . . . ، c_n را طوری انتخاب کرد که ترکیب خطی (۲) در شرایط اولیهٔ مزبور صدق کند. صریحاً آنکه، به‌ازای هرانتخاب x_0 در $\alpha<x<\beta$، و هرانتخاب y_0، y'_0، y''_0، . . . ، $y_0^{(n-1)}$ باید بتوان c_1، . . . ، c_n را طوری تعیین کرد که معادلات

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0)+\dots+c_ny_n(x_0)&=y_0\\ c_1y'_1(x_0)+\dots+c_ny'_n(x_0)&=y'_0\\ &\vdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)&=y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{۴}$$

برقرار باشند. معادلات (۴) را می‌توان همواره نسبت به ثابتهای c_1، . . . ، c_n حل کرد به‌شرط آنکه دترمینان ضرایب صفر نشود. ازطرف دیگر، اگر دترمینان ضرایب صفر شود، همواره می‌توان مقادیر y_0، y'_0، . . . ، $y_0^{(n-1)}$ را طوری انتخاب کرد که دستگاه معادلات (۴) دارای جواب نباشد. بنابراین یك شرط لازم وکافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (۴) به‌ازای مقادیر دلخواه y_0، y'_0، . . . ، $y_0^{(n-1)}$ آن است که رونسکین

$$W(y_1\,,\ y_2\,,\dots,\ y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{۵}$$

در $x=x_0$ صفر نشود. چون x_0 می‌تواند هرنقطه‌ای درفاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ باشد، لازم وکافی است که $W(y_1\,,\ y_2,\ \dots\,,\ y_n)$ درهیچ نقطه‌ای ازفاصلهٔ مزبور صفرنشود. درست همانند آنچه درمعادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم بیان شد،می‌توان نشان داد که اگر y_1، y_2، . . . ، y_n جوابهای معادلهٔ (۱) باشند، آنگاه $W(y_1\,,\ y_2\,,\ \dots\,,\ y_n)$ روی فاصلهٔ $\alpha<x<\beta$ یا متحداً صفر است ویا هیچگاه صفر نمی‌شود (مسئلهٔ ۲ را ببینید). بدین‌سان قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۵.۲. اگر توابع p_1، p_2، . . . ، p_n روی فاصلهٔ باز $\alpha<x<\beta$ پیوسته باشند، و توابع y_1، y_2، . . . ، y_n جوابهای معادلهٔ (۱) باشند، واگر حداقل دریك نقطه از $\alpha<x<\beta$ داشته باشیم $W(y_1\,,\ \dots\,,\ y_n)(x)\neq 0$، آنگاه هرجواب معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت یك ترکیب خطی از جوابهای y_1، y_2، . . . ، y_n بیان کرد.

چنین مجموعه‌ای ازجوابهای y_1، y_2، ...، y_n معادلهٔ (۱) را یك مجموعهٔ اساسی جوابهای معادلهٔ (۱) می‌نامند. وجود مجموعهٔ اساسی جوابها دقیقاً به همان روش مربوط به معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم اثبات می‌شود (قضیهٔ ۷.۳ را ببینید). چون همهٔ جوابهای معادلهٔ (۱) بـه صورت (۲) می‌باشند، معمولاً هر ترکیب خطی دلخواه ازیك مجموعـهٔ اساسی جوابهای معادلهٔ (۱) را جواب عمومی می‌نامند.

بحث استقلال خطی راکه دربند۳.۳ آمد می‌توان نیز تعمیم داد. توابع y_1، ...، y_n را هنگامی روی $\alpha < x < \beta$ مستقل خطی گویندکه برای ثابتهای c_1، ...، c_n نتوان مقادیر (بـه جز $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$) تعیین کـرد به‌گونه‌ای کـه به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \tag{۶}$$

اگر y_1، ...، y_n جوابهای معادلهٔ (۱) باشند، می‌توان نشان دادکه یك شرط لازم وکافی برای استقلال خطی آنها عبارت است ازآن‌که $W(y_1, \ldots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ صفر نشود (مسئلهٔ ۳ را ببینید). بدین‌سان توابعی‌که یك مجموعهٔ اساسی جوابهای معادلـهٔ (۱) را تشکیل می‌دهند دارای استقلال خطی‌انـد، وهرمجموعـهٔ از n جواب مستقل خطی معادلهٔ (۱) تشکیل یك مجموعهٔ اساسی جوابهای معادلهٔ (۱) را می‌دهند.

مسئلهٔ ناهمگن. اکنون به‌بررسی معادلهٔ ناهمگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = g(x) \tag{۷}$$

می‌پردازیم. اگر y_{p_1} و y_{p_2} دوجواب خصوصی معادلهٔ (۷) باشند، ازخطی‌بودن عملگر L مستقیماً نتیجه می‌شودکه $L[y_{p_1} - y_{p_2}] = g - g = 0$. بنابراین تفاضل هـر دوجواب معادلهٔ ناهمگن (۷) یك جواب معادلهٔ همگن (۱) است. چون هرجواب معادلـهٔ همگن را می‌توان به صورت یك ترکیب خطی ازیك مجموعهٔ اساسی جوابهای y_1، y_2، ...، y_n بیان‌کرد، درنتیجه هرجواب معادلهٔ (۷) را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} y &= y_c(x) + y_p(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) \end{aligned} \tag{۸}$$

نوشت، که درآن y_p یك جواب معادلهٔ ناهمگن (۷) است. ترکیب خطی (۸) را معمولاً جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن (۷) می‌نامند.

نخستین مسئله آن است‌که یك مجموعـهٔ اساسی ازجوابهای y_1، y_2، ...، y_n را بیابیم. اگر ضرایب معادلـه ثابت باشند، این مسئله بسیار آسان است؛ و دربند بعد مورد بحث قرارمی‌گیرد. اگر ضرایب ثابت نباشند، لازم می‌آیدکه از روشهای عددی (فصل ۸) ویا روشهای سری مشابه آنچه در مورد معادلـهٔ دیفرانسیل خطی مـرتبهٔ دوم به‌کار رفت

استفاده کنیم.[1]

درخاتمه، می‌توان نشان داد که درمورد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام می‌توان از روش کاهش مرتبه نیز استفاده کرد. بدین‌سان اگر y_1 یك جواب معادلهٔ (۱) باشد، جایگزینی $y=y_1(x)v(x)$ بـه یك معادلـهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ $n-1$ برای v' منجر می گردد (مسائل ۷ و ۸ را ببینید). متناظر با y_1 و $n-1$ جواب مستقل خطی v_1، . . . ، v_{n-1} ازمعادله‌ای که مرتبهٔ آن کاهش یافته است، یك مجموعهٔ اساسی جوابهای y_1 ، y_1v_1 ، . . . ، y_1v_{n-1} برای معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید. اگریك جواب معادلهٔ مربوط به v' معلوم باشد، می‌توان مجدداً با استفاده از روش کاهش مرتبه یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی از مرتبهٔ $n-2$ به‌دست آورد، وبـا ادامهٔ این کار به یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول رسید. اما، در عمل روش کاهش مرتبه به‌ندرت برای معادلات بالاتر ازمرتبهٔ دوم مفید واقع می‌شود. اگر $n \geqslant 3$ ، معادلهٔ کاهش‌یافته حداقل ازمرتبهٔ دوم است، وفقط درموارد استثنایی حل این معادله ازمعادلـهٔ اصلی آسانتر است. از طرف دیگـر، چنانکه دربند ۴.۳ دیدیم، اگر $n=2$ ، معادله کاهش‌یافته ازمرتبهٔ اول است، و درنتیجه تسهیلات قابل ملاحظه‌ای فراهم می‌شود.

مسائل

۱. تحقیق کنید که عملگر دیفرانسیلی L که با

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y$$

تعریف می‌شود، یك عملگر دیفرانسیلی خطی است. یعنی، نشان دهید که

$$L[c_1y_1+c_2y_2]=c_1L[y_1]+c_2L[y_2]$$

که در آن توابع y_1 و y_2 ، n بـار مشتق‌پذیرند و c_1 و c_2 ثـابتهای دلخواهی می‌باشند. بدین‌سان، نشان دهید کـه اگر y_1 ، y_2 ، . . . ، y_n جوابهای $L[y]=0$ بـاشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1y_1+\dots+c_ny_n$ نیز یك جواب $L[y]=0$ است.

۲. دربـنـد ۲.۳ نشـان دادیـم کـه $W(y_1, y_2)$ رونسـکـیـن دوجـواب $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ را می‌توان به‌صورت

$$W(y_1, y_2)(x)=c\exp\left[-\int^x p_1(t)\,dt\right]$$

نوشت، که در آن c مقدار ثابتی است. به‌طورکلیتر، می‌توان نشان داد که اگر y_1 ، y_2 ، . . . ، y_n جوابهای $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=0$ به‌ازای $\alpha<x<\beta$ باشند، آنگاه

---

۱. بحث روشهای سری برای معادلات مرتبهٔ بالاتر را می‌توان درکتاب اینس (فصل ۱۶) یا کادینگتون ولوینسون (Levinson) ، (فصل ۴) دید.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = c \exp\left[-\int^x p_1(t)\,dt\right]$$

این رابطه بــه اتحاد آبل معروف است. بــرای اثبات این نتیجه به‌ازای $n=3$ می‌توان به‌ترتیب زیر عمل‌کرد.

(الف) نشان دهید که

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

که در آن $W(y_1, y_2, y_3) = W$.

راهنمایی: مشتق یك دترمینان ۳ در ۳ برابر است با مجموع ۳ دترمینان ۳ در ۳ کــه در آنها به‌ترتیب ازسطرهای اول، دوم، وسوم مشتق‌گیری شده‌است.

(ب) با جایگزینی y_1'''، y_2''' و y_3''' ازمعادلهٔ دیفرانسیل، سطر اول را در p_3، سطر دوم را در p_2 ضرب‌کرده، وآنها را با سطر آخر جمع کنید تا به‌دست آید

$$W' = -p_1 W$$

نتیجهٔ مطلوب ازاین معادلــه حاصل می‌شود. اثبات حالت‌کلی نیز بــه طریق مشابــه انجام می‌گیرد. چــون تــابــع نمــایی هیچگاه صفــر نمی‌شود، ایــن نتیجه نشان می‌دهــدکــه $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ یا متحد باصفراست‌ویا هیچگاه‌صفرنمی‌شود.

۳. هدف این مسئله آن است‌که نشان دهیم‌که اگر $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ متحد با صفر نباشد، آنگاه y_1، y_2، ...، y_n مستقل خطی‌اند؛واگر مستقل خطی بوده وجوابهای

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta \qquad \text{(یك)}$$

باشند، آنگاه $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ هیچگاه صفر نیست.

(الف) فرض‌کنیم‌که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ متحد با صفر نباشد. برای اثبات استقلال خطی y_1، y_2، ...، y_n باید نشان دهیم‌کــه تعیین ثابتهای c_1، c_2، ...، c_n (که همهٔ آنها صفر نباشند) به‌طوری‌که به‌ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \qquad \text{(دو)}$$

غیرممکن است. با درنظر گرفتن معادلات حاصل ازمشتقهای اول، دوم، ...، و $(n-1)$ام معادلهٔ (دو) در نقطه‌ای‌کــه $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$، نشان دهید کــه همهٔ c هــا باید صفر باشند، تا معادلهٔ (دو) برقرار باشد. بنابراین y_1، y_2، ...، y_n مستقل‌خطی‌اند.

(ب) فرض‌کنیم‌که y_1، y_2، ...، y_n جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (یك) باشند.

برای اثبات آن‌که $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ هیچگاه روی $\alpha < x < \beta$ صفر نیست، فرض می‌کنیم که $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$، ونشان می‌دهیم که این فرض به‌تناقض می‌انجامد.

راهنمایی: اگر $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$، آنگاه جواب ناصفری برای معادلهٔ (یك) وجود داردکه در x_0 درشرایط اولیهٔ $y = y' = y'' = \ldots = y^{(n-1)} = 0$ صدق می‌کند؛ آنگاه ازقضیهٔ وجود ویکتایی استفاده کنید.

۴. تحقیق کنیدکه توابع داده شده جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه‌اند، و رونسکین جوابها را محاسبه کنید.

(الف) $y''' + y' = 0; \quad 1, \quad \cos x, \quad \sin x$

(ب) $y^{iv} + y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad \cos x, \quad \sin x$

(ج) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; \quad e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{-2x}$

(د) $y^{iv} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad e^{-x}, \quad xe^{-x}$

(ه) $xy''' - y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad x^3$

۵. نشان دهیدکه به‌ازای هر x داریم $W(5, \sin^2 x, \cos 2x) = 0$. آیا این نتیجه را می‌توانید مستقیماً بدون محاسبهٔ رونسکین اثبات کنید.

۶. فرض کنیم عملگر دیفرانسیلی L با

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y$$

که درآن a_0، a_1، ...، a_n ثابتهایی حقیقی‌اند تعریف شده‌است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) $L[x^n]$؛ (ب) $L[e^{rx}]$.

(ج) برای معادلهٔ $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$ چهار جواب بیابید. آیا فکر می‌کنیدکه این چهارجواب یك مجموعهٔ اساسی تشکیل می‌دهند؟ چرا؟

۷. نشان دهیدکه اگر y_1 یك جواب

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$$

باشد، آنگاه از جایگزینی $y = y_1(x)v(x)$ معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم زیر برای v' حاصل می‌شود

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1)v' = 0$$

۸. با استفاده از روش کاهش مرتبه، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$

(ب) $x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0, \quad x > 0;$
$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^3$

۳.۵ معادلات همگن با ضرایب ثابت

معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ nام

$$L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

راکه در آن a_0، a_1، ...، a_n ثابتهایی حقیقی‌اند درنظر می‌گیریم. طبعاً می‌توان براساس شناختی کـه ازمعادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت داریم، پیش‌بینی کردکه $y=e^{rx}$ به ازای مقادیر مناسبی از r یك جواب معادلهٔ (۱) خواهد بود. در واقع، به‌ازای هر r داریم

$$\begin{aligned} L[e^{rx}]&=e^{rx}(a_0r^n+a_1r^{n-1}+\dots+a_{n-1}r+a_n)\\ &=e^{rx}Z(r) \end{aligned} \qquad (2)$$

به‌ازای‌مقادیری از r که داشته‌باشیم $Z(r)=0$، خواهیم داشت $L[e^{rx}]=0$ و $y=e^{rx}$ یك جواب معادلهٔ (۱) است. چندجمله‌ای $Z(r)$ را چندجمله‌ای مشخصه یـا چندجمله‌ای معین ومعادلهٔ $Z(r)=0$ را معادلهٔ مشخصه یا معادلهٔ معین معادلهٔ دیفرانسیل (۱) می‌نامند. هر چندجمله‌ای درجـهٔ n دارای n صفر است، مثلاً r_1، r_2، ...، r_n؛ بنابراین می‌توان چندجمله‌ای مشخصه را به‌صورت زیر نوشت

$$Z(r)=a_0(r-r_1)(r-r_2)\cdots(r-r_n) \qquad (3)$$

ریشه‌های حقیقی و نابرابر. اگر ریشه‌های معادلـهٔ مشخصه حقیقی بـاشند، و هیچ دوتای آنها مساوی نباشد، آنگاه برای معادلهٔ (۱)، n جواب متمایز e^{r_1x}، e^{r_2x}، ...، e^{r_nx} را خواهیم داشت. برای اثبات آن‌کـه دراین حالت جواب عمومی معادلـهٔ (۱) به صورت

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\dots+c_ne^{r_nx} \qquad (4)$$

است، باید نشان دهیم‌که توابع e^{r_1x}، ...، e^{r_nx} روی فاصله $-\infty<x<\infty$ مستقل خطی‌اند. نشان می‌دهیم‌کـه فرض بستگی خطی آنها به‌تناقض می‌انجامد. گیریم ثابتهای c_1، c_2، ...، c_n وجود داشته باشند به‌طوری‌که همهٔ آنها صفر نباشند و به‌ازای هر x در $-\infty<x<\infty$ داشته باشیم $c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\dots+c_ne^{r_nx}=0$. با ضرب در e^{-r_1x} داریم $c_1+c_2e^{(r_2-r_1)x}+\dots+c_ne^{(r_n-r_1)x}=0$ و، با مشتق‌گیری، به‌دست می‌آید

$$(r_2-r_1)c_2e^{(r_2-r_1)x}+(r_3-r_1)c_3e^{(r_3-r_1)x}+\dots+(r_n-r_1)c_ne^{(r_n-r_1)x}=0$$

به‌ازای $-\infty<x<\infty$. با ضرب رابطهٔ اخیر در $e^{-(r_2-r_1)x}$ ومشتق‌گیری خواهیم داشت

$$(r_3-r_2)(r_3-r_1)c_3e^{(r_3-r_2)x}+\dots+(r_n-r_2)(r_n-r_1)c_ne^{(r_n-r_2)x}=0$$

به‌ازای $-\infty < x < \infty$. چون به‌همین طریق ادامه دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید

$$(r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \cdots (r_n - r_2)(r_n - r_1) c_n e^{(r_n - r_{n-1})x} = 0 \qquad (5)$$

به‌ازای $-\infty < x < \infty$. چون تابع نمایی صفر نمی‌شود و r_iها نابرابرند، درنتیجه $c_n = 0$. بدین‌سان $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} x} = 0$ و، با همان روش بالا به دست می‌آید $c_{n-1} = 0$. به‌همین طریق $c_{n-2}, \ldots, c_1 = 0$، واین با فرض بستگی خطی $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ تناقض دارد.

ریشه‌های مختلط. اگر معادلهٔ مشخصه دارای ریشه‌های مختلط باشد، این ریشه‌ها ازجفتهای مزدوج، $\lambda \pm i\mu$، تشکیل می‌شود، زیرا ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی‌اند. با شرط آنکه هیچ یک از ریشه‌ها مکرر نباشند، جواب عمومی معادلهٔ (۱) همچنان به‌صورت[1] (۴) است. اما، به‌همان روش معادلهٔ مرتبهٔ دوم (بند ۱۰۵۰۳) به‌جای جوابهای با مقدار $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ معمولاً ازجوابهای با مقدار حقیقی

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \sin \mu x \qquad (6)$$

که بخشهای حقیقی وموهومی $e^{(\lambda+i\mu)x}$ می‌باشند استفاده می‌شود. بدین‌سان، حتی هنگامی که‌برخی از ریشه‌های‌معادلهٔ مشخصه مختلط باشند،بازهم می‌توان جواب عمومی معادلهٔ(۱) را به‌صورت یك ترکیب خطی ازجوابهای با مقدار حقیقی بیان‌کرد.

مثال ۱. جواب عمومی

$$y^{\text{iv}} - y = 0 \qquad (7)$$

را بیابید.

چون به جای y قرار دهیم e^{rx} معادلهٔ مشخصه به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

ریشه‌ها عبارتند از ۱، ۱-، i، $-i$؛ بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۷) چنین است

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

ریشه‌های مکرر. اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه متمایز نباشند، یعنی، اگر برخی از ریشه‌ها مکرر باشند، آنگاه روشن است‌که جواب (۴) جواب عمومی معادلهٔ (۱) نیست. چنانکه دیدیم اگر r_1 ریشه مکرری برای‌معادله خطی مرتبهٔ دوم $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ باشد، آنگاه دوجواب مستقل خطی به‌صورت $e^{r_1 x}$ و $xe^{r_1 x}$ به دست می‌آمد، منطقاً می‌توان حدس زدکه اگر یك ریشهٔ $Z(r) = 0$، مثلاً $r = r_1$، sبار تکرار شود $(s \leqslant n)$ آنگاه

---

۱. استقلال خطی جوابهای $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$، درحالتی‌که برخی از rها اعداد مختلط باشند، ازتعمیم استدلالی‌که هم‌اکنون درحالت rهای حقیقی بیان شد، نتیجه می‌گردد.

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ x^2 e^{r_1 x},\ \dots,\ x^{s-1}e^{r_1 x} \qquad (8)$$

جوابهای معادلهٔ (۱) باشند. برای اثبات این موضوع، باید توجه داشت که اگر r_1 یك ریشهٔ مرتبهٔ s چندجمله‌ای $Z(r)$ باشد، آنگاه معادلهٔ (۲) را می‌توان به‌ازای همه مقادیر r به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx}a_0(r-r_1)^s(r-r_{s+1})\cdots(r-r_n) \\ &= e^{rx}(r-r_1)^s H(r) \qquad (9) \end{aligned}$$

که در آن $H(r_1)\neq 0$. سپس از رابطه $\partial e^{rx}/\partial r = xe^{rx}$ و جابه‌جاپذیری مشتق‌گیریهای e^{rx} نسبت به x و r استفاده می‌کنیم. بدین‌سان با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۹) نسبت r به دست می‌آید

$$L[xe^{rx}] = e^{rx}[x(r-r_1)^s H(r) + s(r-r_1)^{s-1}H(r) + (r-r_1)^s H'(r)] \qquad (10)$$

چون $s \geqslant 2$، طرف دوم رابطهٔ (۱۰) به‌ازای $r=r_1$ صفر می‌شود وبنابراین $xe^{r_1 x}$ نیز یك جواب معادلهٔ (۱) است. اگر $s \geqslant 3$، باردیگر نسبت به r از رابطهٔ (۱۰) مشتق می‌گیریم وقرار می‌دهیم $r=r_1$، بدین‌سان ثابت می‌شود که $x^2 e^{r_1 x}$ نیز یك جواب معادلهٔ (۱) است. این روش را می‌توان تا $s-1$ بار مشتق‌گیری ادامه داد ونتیجهٔ مطلوب را به‌دست آورد. توجه شود که مشتق sام طرف دوم رابطهٔ (۹) به‌ازای $r=r_1$ صفر نمی‌شود، زیرا sامین مشتق $(r-r_1)^s$ ثابت است و $H(r_1)\neq 0$. منطقاً می‌توان حدس زد که $e^{r_1 x}$، $xe^{r_1 x}$، ...، $x^{s-1}e^{r_1 x}$ مستقل خطی‌اند، وما آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

بالاخره، اگر یك ریشهٔ مختلط $\lambda+i\mu$، sبار تکرار شود مزدوج آن $\lambda-i\mu$ نیز sبار تکرار خواهد شد. متناظر با این $2s$ جوابهای با مقدار مختلط می‌توانیم $2s$ جواب با مقدار حقیقی بیابیم، برای این‌کار کافی است توجه شود که بخشهای حقیقی و موهومی

$$e^{(\lambda+i\mu)x},\ xe^{(\lambda-i\mu)x},\ \dots,\ x^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)x}$$

نیز جوابهای مستقل خطی‌اند:

$$e^{\lambda x}\cos\mu x,\quad e^{\lambda x}\sin\mu x,\quad xe^{\lambda x}\cos\mu x,\quad xe^{\lambda x}\sin\mu x,$$
$$\dots,\ x^{s-1}e^{\lambda x}\cos\mu x,\quad x^{s-1}e^{\lambda x}\sin\mu x$$

بدین‌سان جواب عمومی معادلهٔ (۱) را همواره می‌توان به‌صورت یك ترکیب خطی از n جواب با مقدار حقیقی نوشت. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۲. جواب عمومی

$$y^{iv}+2y''+y=0 \qquad (11)$$

را بیابید.

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$r^{۴}+۲r^{۲}+۱=(r^{۲}+۱)(r^{۲}+۱)=۰$$

که دارای ریشه‌های i ، i ، $-i$ ، $-i$ ، وجواب عمومی معادلهٔ (۱۱) چنین است

$$y=c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x+c_{۳}x\cos x+c_{۴}x\sin x$$

برای تعیین ریشه‌های معادلهٔ مشخصه اغلب لازم می‌آید که به‌محاسبهٔ ریشه‌های سوم، یا چهارم، وحتی ریشه‌های مراتب بالاتر یك‌عدد مختلط بپردازیم. این‌کار معمولاً با استفاده ازفرمول اویلر $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ، وقواعد جبری که در بند ۱.۵.۳ آمد به‌آسانترین وجه صورت می‌گیرد. این موضوع درمثال زیـر و همچنین در مسائل ۱ و ۲ مورد بحث قرار می گیرد.

مثال ۳. جواب عمومی

$$y^{iv}+y=۰ \tag{۱۲}$$

را بیابید.

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$r^{۴}+۱=۰$$

دراین حالت چندجمله‌ای مزبور به‌آسانی تجزیه نمی‌شود. باید به‌محاسبهٔ ریشهٔ چهارم -۱ بپردازیم. دراینجا -۱ را به عنوان عدد مختلط $-۱+۰i$ درنظر می گیریم. قدرمطلق آن برابر ۱ و زاویه قطبی آن π است. بدین‌سان

$$-۱=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}$$

علاوه براین، زاویهٔ مزبور تنها با تقریب مضربی از ۲π معین می گردد. بدین‌سان

$$-۱=\cos(\pi+۲m\pi)+i\sin(\pi+۲m\pi)=e^{i(\pi+۲m\pi)}$$

که درآن m برابر صفر یا هرعدد صحیح مثبت یا منفی است. بدین‌سان

$$(-۱)^{۱/۴}=e^{i(\pi/۴+m\pi/۲)}=\cos\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{m\pi}{۲}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{m\pi}{۲}\right).$$

ریشه‌های چهارم -۱ به‌ترتیب با قراردادن

$$m=۰,۱,۲,۳$$

به‌دست می‌آیند، وعبارتند از

$$\frac{۱+i}{\sqrt{۲}},\quad \frac{-۱+i}{\sqrt{۲}},\quad \frac{-۱-i}{\sqrt{۲}},\quad \frac{۱-i}{\sqrt{۲}}$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که به‌ازای هرمقدار دیگر m یکی ازهمین چهار ریشه حاصل می‌شود. مثلاً، متناظر با $m=۴$ خواهیم داشت $(۱+i)/\sqrt{۲}$. جواب عمومی معادلهٔ (۱۲) عبارت است از

$$y=e^{x/\sqrt{۲}}\left(c_۱\cos\frac{x}{\sqrt{۲}}+c_۲\sin\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)+e^{-x/\sqrt{۲}}\left(c_۳\cos\frac{x}{\sqrt{۲}}+c_۴\sin\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)$$

درخاتمه متذکر می‌شویم که مسئلهٔ تعیین ریشه‌های $Z(r)=۰$ هنگامی که $n>۲$، و نتوان آنها را با بررسی یا روش ساده آزمون و خطا به‌دست آورد، مستلزم استفاده از روشهای عددی است. گرچه برای ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای درجهٔ سوم وچهارم فرمولهای مشابه فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم وجود دارد، اما برای $n>۴$ فرمولی[۱] در دست نیست؛ حتی درموردمعادلات چندجمله‌ای درجهٔ سوم وچهارم معمولاً کاربرد روشهای عددی مناسبتر است.

اگر ثابتهای $a_۰$، $a_۱$، ...، a_n درمعادلهٔ (۱) اعداد مختلط باشند، جواب معادلهٔ (۱) همچنان به‌صورت (۴) است. اما دراین حالت، ریشه‌های معادلهٔ مشخصه عموماً اعداد مختلط‌اند؛ و دیگرمحقق نیست که مزدوج یك ریشه بازهم یك ریشه باشد. جوابهای متناظر توابعی با مقدار مختلط خواهند بود.

مسائل

۱. هریك ازاعداد مختلط زیر را به‌صورت

$$R(\cos\theta+i\sin\theta)=Re^{i\theta}$$

بیان کنید. توجه شود که تساوی $e^{i\theta}=e^{i(\theta+۲m\pi)}$، به ازای

$$m=۰,\pm۱,\pm۲,\dots$$

برقرار است.

(الف) $۱+i$ (ب) $-۱+i\sqrt{۳}$ (ج) -۱

(د) $-i$ (ه) $\sqrt{۳}-i$ (و) $-۱-i$

۲. مطلوب است محاسبهٔ ریشه‌های تعیین شدهٔ هریك ازاعداد مختلط زیر با توجه به

---

۱. فرمول حل معادلهٔ درجهٔ سوم را معمولاً بـه‌کاردانو (Cardano)، (۱۵۰۱–۱۵۷۶) و فرمول معادلهٔ درجهٔ چهارم را بـه شاگردش فـراری (Ferrari)، (۱۵۲۲–۱۵۶۵) نسبت می‌دهند. این نکته راکه ریشه‌های یك معادلـهٔ جبری‌کلی از درجهٔ بالاتر ازچهار را نمی‌توان با فرمولی‌که تنها شامل عملیات گویا (جمع، ضرب، وغیره) واستخراج ریشه بـاشد بیان‌کرد آبل وگالوا (Galois)، (۱۸۱۱–۱۸۳۲) اثبات‌کردند. برای بحث روشهای معادلات جبری می‌توان به‌کتاب اوسپنسکی (Uspensky) مراجعه‌کرد.

$e^{i\theta}=e^{i(\theta+2m\pi)}$ به‌ازای هرعدد صحیح m ، و

$$[e^{i(\theta+2m\pi)}]^{1/n}=e^{i[(\theta+2m\pi)/n]}=\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)$$

(یکی ازصور فرمول دوموآور، مسئلهٔ ۱۲، بند ۱.۵.۳)

(الف) $1^{1/3}$ (ب) $(1-i)^{1/2}$

(ج) $1^{1/4}$ (د) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/2}$

درهریك ازمسائل ۳ تا ۱۳ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را بیابید.

۳. $y'''-y''-y'+y=0$

۴. $y'''-3y''+3y'-y=0$

۵. $2y'''-4y''-2y'+4y=0$

۶. $y^{iv}-4y'''+4y''=0$

۷. $y^{vi}+y=0$

۸. $y^{iv}-5y''+4y=0$

۹. $y^{vi}-3y^{iv}+3y''-y=0$

۱۰. $y^{vi}-y''=0$

۱۱. $y^{v}-3y^{iv}+3y'''-3y''+2y'=0$

۱۲. $y^{iv}-8y'=0$

۱۳. $y^{viii}+8y^{iv}+16y=0$

۱۴. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y'''+y'=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=2$$

۱۵. نشان دهیدکه جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{iv}-y=0$$

را می‌توان به‌صورت

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cosh x+c_4\sinh x$$

نوشت. جوابی را که درشرایط اولیهٔ $y(\circ)=\circ$ ، $y'(\circ)=\circ$ ، $y''(\circ)=۱$ ، $y'''(\circ)=۱$ صدق می‌کند بیابید. چرا استفاده از $\cosh x$ و $\sinh x$ مناسبتر از e^x و e^{-x} است؟

مسائل ۱۶ تا ۱۹ دربارهٔ معادلهٔ اویلر مرتبهٔ nام است.

*۱۶. معادلهٔ اویلر مرتبهٔ nام یا معادلهٔ متحدالبعد عبارت است از

$$L[y]=x^n y^{(n)}+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1} x y'+a_n y=\circ \qquad \text{(یك)}$$

که درآن a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ثابتهای حقیقی‌اند. فقط فاصلهٔ $x>\circ$ را درنظر بگیرید.

(الف) نشان دهیدکه $L[x^r]=x^r F(r)$ که درآن

$$F(r)=r(r-1)\dots(r-n+1)+a_1[r(r-1)\dots(r-n+2)]$$
$$+\dots+a_{n-1}r+a_n$$

یك چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب r است. توابع x^{r_1} ، x^{r_2} ، ... ، x^{r_n} متناظر با ریشه‌های r_1 ، r_2 ، ... ، r_n معادلهٔ $F(r)=\circ$ جوابهای معادلهٔ (یك) می‌باشند.

(ب) نشان دهیدکه اگر r_1 یك ریشهٔ مکرر مرتبهٔ s معادلهٔ $F(r)=\circ$ باشد، آنگاه x^{r_1} ، $x^{r_1}\ln x$ ، $x^{r_1}(\ln x)^2$ ، ... ، $x^{r_1}(\ln x)^{s-1}$ جوابهای معادلهٔ (یك) می‌باشند.

هنگامی‌که ریشه‌های $F(r)=\circ$ مختلط باشند، می‌توان جوابهایی با مقدار حقیقی به‌همان روش‌که درمورد معادلهٔ اویلر مرتبهٔ دوم شرح داده شد به‌دست آورد. بند ۴.۴ را ببینید.

*۱۷. با استفاده ازنتایج مسئلهٔ ۱۶ جواب عمومی هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. تنها فاصلهٔ $x>\circ$ را درنظر بگیرید.

(الف) $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=\circ$

(ب) $x^3y'''+xy'-y=\circ$

(ج) $x^3y'''+2x^2y''+xy'-y=\circ$

(د) $x^4y''''+5x^3y'''+7x^2y''+8xy'=\circ$

(ه) $x^3y'''+x^2y''=\circ$

(و) $x^3y'''+4x^2y''-2xy'-4y=\circ$

*۱۸. برای تعیین کشش روی یك کرهٔ بسیارکوچك به شعاع a که درجریان یك سیال غلیظ واقع شده باشد، لازم می‌آیدکه معادلهٔ دیفرانسیل

$$\rho^3 f''''(\rho)+8\rho^2 f'''(\rho)+8\rho f''(\rho)-8f'(\rho)=\circ, \quad \rho>a$$

را حل‌کنیم، که درآن ρ مسافت ازمرکز کره است. توجه شودکه این یك معادلهٔ اویلر

برحسب f' است و با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۶، نشان دهیدکه جواب عمومی عبارت است از

$$f(\rho)=\frac{A}{\rho^{3}}+\frac{B}{\rho}+C+D\rho^{2}$$

که درآن A، B، C و D ثابت‌اند. نشان دهیدکه جوابی که درشرایط مرزی $f(a)=0$، $f'(a)=0$، و $f(\rho)\to U$ (سرعت در ∞) وقتی $\rho\to\infty$ صدق می‌کند، عبارت است از $f(\rho)=Ua^{3}/2\rho^{3}-3Ua/2\rho+U$. فرمول کشش روی کره (فرمول استوکس) به‌صورت $6\pi\mu aU$ درمی‌آید، که درآن μ ضریب غلظت سیال است. ر. ا. میلیکان[1] درآزمایش مشهور خود برای اندازه‌گیری بار الکترون ازاین نتیجه استفاده کرده است. مسئلهٔ ۹ بند ۱۰.۲ را نیز ببینید.

۱۹*. نشان دهیدکه به‌ازای $x>0$، با تعویض متغیر $x=e^{z}$ معادلهٔ اویلر مرتبهٔ سوم $x^{3}y'''+a_{1}x^{2}y''+a_{2}xy'+a_{3}y=0$ به‌صورت سادهٔ یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ سوم با ضرایب ثابت درمی‌آید. این تبدیل معادلهٔ اویلرمرتبهٔ nام را نیز به‌صورت یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت درمی‌آورد. مسئلهٔ ۱۷ (ب) را با این روش حل کنید.

۲۰*. تشخیص این نکته که آیا همهٔ جوابهای یك معادلهٔ خطی همگن به ازای $x\to\infty$ به‌سمت صفر می‌گرایند یا نه، اغلب درکاربردهای مهندسی مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر پاسخ این پرسش مثبت باشد، معادله را پایدار مجانبی نامند. هنگامی‌که x نمایشگر زمان و y پاسخ یك دستگاه فیزیکی باشد، شرط پایداری مجانبی معادلهٔ دیفرانسیل بدان معنی است‌که شرط اولیه هرچه باشد، پاسخ دستگاه بدآن بالاخره با بینهایت‌شدن x به صفر می‌گراید. درمورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $ay''+by'+cy=0$، دربند ۱.۷.۳ (بند ۱.۵.۳ مسئلهٔ ۱۵ را نیز ببینید) ثابت شدکه شرط کافی برای پایداری مجانبی آن است‌که a، b و c مثبت باشند. به‌طورکلیتر معادلهٔ

$$a_{0}y^{(n)}+a_{1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n}y=0 \qquad \text{(یك)}$$

که درآن a_{0}، a_{1}، ...، a_{n} حقیقی‌اند، پایدار مجانبی است، اگر بخش حقیقی همهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه منفی باشند. دراین باره هورویتس[2] یك شرط لازم وکافی به دست آورده‌است. به‌ازای $n=4$، ملاك پایداری هورویتس را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد: معادلهٔ (یك) پایدار مجانبی است، اگر، وفقط، اگر به‌ازای $a_{0}>0$،

$$a_{1},\quad \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} \\ a_{3} & a_{2} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} & 0 \\ a_{3} & a_{2} & a_{1} \\ 0 & a_{4} & a_{3} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} & 0 & 0 \\ a_{3} & a_{2} & a_{1} & a_{0} \\ 0 & a_{4} & a_{3} & a_{2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4} \end{vmatrix}$$

---

1. R.A. Millikan (1868-1953) 2. Hurwitz (1859-1919)

همه مثبت باشند. به‌ازای $n=3$، این‌شرط تنها دربارهٔ سه عبارت نخست با $a_3=0$، و به‌ازای $n=2$ دربارهٔ دوعبارت نخست با $a_2=0$ اعمال می‌شود. بحث کامل ملاك پایداری هورویتس را می‌توان درکتاب گیلمین[1] (فصل ۶، مقالهٔ ۲۶) یافت.

پایداری مجانبی هریك ازمعادلات زیر را بررسی‌کنید، و درصورت امکان، صحت نتیجهٔ خود را با محاسبهٔ جواب عمومی تحقیق‌کنید.

(الف) $y'''+3y''+3y'+y=0$

(ب) $y'''-y=0$

(ج) $y'''+y''-y'+y=0$

(د) $y^{iv}+2y''+y=0$

(ه) $y'''+0{,}1y''+1{,}2y'-0{,}4y=0$

(و) $y'''+3{,}2y''+2{,}41y'+0{,}21y=0$

۴.۵ روش ضرایب نامعین

برای معادلهٔ خطی مرتبهٔ nام ناهمگن با ضرایب ثابت

$$L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=g(x) \qquad (1)$$

هنگامی‌که $g(x)$ به صورت مناسبی باشد، می‌توان با روش ضرایب نامعین یك جواب خصوصی به دست آورد. گرچه روش ضرایب نامعین دارای‌کلیت روش تغییر پارامترها که دربند بعد شرح داده شده‌است نمی‌باشد، اما هرگاه قابل اجرا باشد بسیارآسانتراست.

درست همانند معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم، روشن است‌که اگر عملگر دیفرانسیلی خطی L بر یك چندجمله‌ای $A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m$، یا تابع نمایی $e^{\alpha x}$، یا تابع سینوسی $\sin\beta x$، یا تابع‌کسینوسی $\cos\beta x$ اثر کند، نتیجه به‌ترتیب یك چندجمله‌ای، یك تابع نمایی، یا یك ترکیب خطی ازتوابع سینوسی وکسینوسی خواهد بود. بنابراین اگر $g(x)$ به‌صورت مجموع چندجمله‌ایها، توابع نمایی، توابع سینوسی وکسینوسی، یا حتی حاصل‌ضرب این نوع توابع باشد، می‌توان امیدوار بودکه $y_p(x)$ را با انتخاب ترکیب مناسبی ازچندجمله‌ایها، توابع نمایی و... با تعدادی ضریب ثابت نامعین به دست آورد. ثابتها به‌گونه‌ای تعیین خواهند شدکه معادلهٔ (۱) برقرار گردد.

نخست به‌بررسی حالتی‌که $g(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ m

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m \qquad (2)$$

است می‌پردازیم. b_0، b_1، ...، b_m ثابتهای مفروض‌اند. جواب خصوصی را می‌توان

1. Guillemin

طبعاً به‌صورت

$$y_p(x)=A_\circ x^m+A_\backslash x^{m-\backslash}+\cdots+A_m \qquad (۳)$$

درنظر گرفت. با جایگزینی y درمعادلهٔ (۱) ومساوی قراردادن توانهای مشابه x، از جمله‌های شامل x^m حاصل می‌شود $a_nA_\circ=b_\circ$. اگر $a_n\neq \circ$، خواهیم داشت $A_\circ=b_\circ/a_n$. ثابتهای $A_\backslash$، . . .، A_m نیز ازضرایب جمله‌های‌شامل $x^{m-\backslash}$، $x^{m-۲}$، . . .، x° تعیین می‌شوند.

اگر $a_n=\circ$، یعنی، اگر مقدار ثابتی جواب معادلهٔ همگن باشد، معادلهٔ بالا را نمی‌توان برحسب $A_\circ$ حل کرد؛ دراین حالت لازم است‌که $y_p(x)$ را به‌صورت یك چندجمله‌ای‌از درجهٔ $m+۱$ فرض‌کنیم، تا در $L[y_p](x)$ جمله‌ای به‌دست‌آیدکه با $b_\circ x^m$ برابری‌کند. البته، ازومی نداردکه درعبارت $y_p(x)$ مقدار ثابتی منظورکنیم. به‌طورکلیتر به‌آسانی می‌توان تحقیق‌کردکه اگر صفر یك ریشهٔ مکررمرتبهٔ s چندجمله‌ای مشخصه باشد دراین صورت ۱، x، $x^۲$، . . .، $x^{s-\backslash}$ جوابهای معادله همگن‌اند، آنگاه صورت مناسب برای $y_p(x)$ عبارت است از

$$y_p(x)=x^s(A_\circ x^m+A_\backslash x^{m-\backslash}+\cdots+A_m) \qquad (۴)$$

به‌عنوان مسئلهٔ دیگر فرض‌کنیم‌که $g(x)$ به‌صورت

$$g(x)=e^{\alpha x}(b_\circ x^m+b_\backslash x^{m-\backslash}+\cdots+b_m) \qquad (۵)$$

باشد، آنگاه می‌توان انتظار داشت‌که $y_p(x)$ به‌صورت

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(A_\circ x^m+A_\backslash x^{m-\backslash}+\cdots+A_m) \qquad (۶)$$

باشد، به شرط آنکه $e^{\alpha x}$ جواب معادلهٔ همگن نباشد. اگر α یك ریشهٔ مکرر مرتبهٔ s چندجمله‌ای مشخصه باشد، صورت مناسب برای $y_p(x)$ عبارت است از

$$y_p(x)=x^s e^{\alpha x}(A_\circ x^m+A_\backslash x^{m-\backslash}+\cdots+A_m) \qquad (۷)$$

برای اثبات این نتایج می‌توان همانند معادلهٔ ناهمگن خطی مرتبهٔ دوم با جایگزینی $y=e^{\alpha x}u(x)$ مسئله را به‌حالت قبل تبدیل‌کرد. تابع u باید دریك معادلهٔ ناهمگن خطی مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت صدق‌کند، جملهٔ ناهمگن دقیقاً چندجمله‌ای (۲) است (مسئلهٔ ۱۸ را ببینید).

به‌طریق مشابه، اگر $g(x)$ به‌صورت

$$g(x)=e^{\alpha x}(b_\circ x^m+b_\backslash x^{m-\backslash}+\cdots+b_m)\begin{cases}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{cases} \qquad (۸)$$

باشد،آنگاه صورت مناسبی برای $y_p(x)$، به‌شرط آنکه $\alpha+i\beta$ ریشه معادلهٔ مشخصه نباشد، چنین است

$$y_p(x)=e^{\alpha x}(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m)\cos\beta x$$
$$+e^{\alpha x}(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\dots+B_m)\sin\beta x \qquad (۹)$$

اگر $\alpha+i\beta$ یك ریشهٔ مکـرر مرتبهٔ s معادلهٔ مشخصه باشد، آنگاه لزوماً بایـد طرف دوم معادلهٔ (۹) را در x^s ضرب کرد.

این نتایج درجدول ۱.۵ خلاصه شده‌است.

جدول ۱.۵

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m$	$x^s(A_0x^m+\dots+A_m)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^m+\dots+A_m)e^{\alpha x}$
$P_m(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0x^m+\dots+A_m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(B_0x^m+\dots+B_m)e^{\alpha x}\sin\beta x]$

دراینجا s کوچکترین عدد صحیح نامنفی است کـه به‌ازای آن هرجملهٔ $y_p(x)$ ازهرجملهٔ تابع مکمل $y_c(x)$ متمایز است.

اگـر $g(x)$ مجموع جمله‌هایی به‌صورت (۲)، (۵) و (۸) بـاشد، معمولاً آسانتر است‌که جواب خصوصی متناظر بـه هریك ازجمله‌های $g(x)$ را جداگانه محاسبه‌کـرد. بنابراصل انطباق (چون معادلهٔ دیفرانسیل مزبور خطی است)، جواب خصوصی مسئلهٔ‌کلی برابر با حاصل‌جمع جوابهای خصوصی مسائل جزئی متناظر است. این مطلب درمثال زیر توضیح داده شده است.

مثال. یك جواب خصوصی

$$y'''-۴y'=x+۳\cos x+e^{-۲x} \qquad (۱۰)$$

را بیابید.

نخست معادلـهٔ همگن را حل می‌کنیم. معـادلـهٔ مشخصهٔ $r^۳-۴r=۰$ است، و ریشه‌های آن عبارتند از ۰، ۲ $\pm$؛ بنابراین

$$y_c(x)=c_۱+c_۲e^{۲x}+c_۳e^{-۲x}$$

با استفاده ازاصل انطباق، می‌توان جواب خصوصی معادلـهٔ (۱۰) را بـه‌صورت مجموع جوابهای خصوصی متناظر با معادلات دیفرانسیل

$$y'''-۴y'=x,\quad y'''-۴y'=۳\cos x,\quad y'''-۴y'=e^{-۲x}$$

نوشت. حدس اولیه برای یك جواب خصوصی، y_{p_1}، معادلـهٔ اول A_0x+A_1 است؛ اما چون معادلهٔ همگن دارای جواب ثابتی است، دوجملهای مزبور را در x ضرب می‌کنیم. بدین‌سان

$$y_{p_1}(x)=x(A_0x+A_1).$$

برای معادلهٔ دوم

$$y_{p_2}(x)=B\cos x+C\sin x$$

را درنظرمی‌گیریم، وبه‌تغییر این حدس اولیه نیازی نیست، زیرا $\cos x$ و $\sin x$ جواب معادلهٔ همگن نیستند. بالاخره، برای معادلهٔ سوم، چون e^{-2x} یك جواب معادلهٔ همگن‌است، فرض می‌کنیم که

$$y_{p_3}(x)=Exe^{-2x}$$

ثابتها با جایگزینی درمعادلات دیفرانسیل متناظر تعیین می‌شوند؛ وعبارتند از

$$A_0=-\frac{1}{8},\quad A_1=0,\quad B=0,\quad C=-\frac{3}{5},\quad E=\frac{1}{8}$$

بنابراین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱۰) عبارت است از

$$y_p(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{5}\sin x+\frac{1}{8}xe^{-2x}$$

از روش ضرایب نامعین می‌توان درهرموردکه امکان حدس صورت صحیح $y_p(x)$ وجود داشته باشد استفاده‌کرد. اما، معمولاً این‌کار به‌جز درمورد معادلات دیفرانسیل بـا ضرایب ثابت‌که درآن جمله‌های ناهمگن ازنوع جمله‌های فوق‌الذکـر باشند، غیرممکن است. برای مسائل پیچیده‌تر می‌توان از روش تغییر پارامترها کـه دربند بعد آمـده است استفاده‌کرد.

مسائل

درهریك‌ازمسائل ۱ تا ۱۱ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را بیابید. درمواردی که مشخص شده‌است، جوابی را بیابیدکه درشرایط اولیهٔ داده شده صدق‌کند.

۱. $y'''+4y'=x,\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y''(0)=1$

۲. $y'''-y''-y'+y=2e^{-x}+3$

۳. $y'''+y''+y'+y=e^{-x}+4x$

۴. $y'''-y'=2\sin x$

۵. $y^{iv}+۲y''+y=۳x+۴,\quad y(۰)=y'(۰)=۰,\quad y''(۰)=y'''(۰)=۱$

۶. $y^{iv}-۴y''=x^۲+e^x$

۷. $y^{iv}+۲y''+y=۳+\cos ۲x$

۸. $y'''-۳y''+۲y'=x+e^x,\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=-\frac{۱}{۴},\quad y''(۰)=-\frac{۳}{۲}$

۹. $y^{vi}+y'''=x$

۱۰. $y^{iv}+y'''=\sin ۲x$

۱۱. $y^{iv}-y=۳x+\cos x$

درهریك ازمسائل ۱۲ تا ۱۷ صورت مناسبی برای $y_p(x)$ به‌منظور استفاده از روش ضرایب نامعین بیابید. محاسبهٔ ضرایب لزومی ندارد.

۱۲. $y'''-۲y''+y'=x^۳+۲e^x$

۱۳. $y'''-y'=xe^{-x}+۲\cos x$

۱۴. $y^{iv}-۲y''+y=e^x+\sin x$

۱۵. $y^{iv}-y'''-y''+y'=x^۲+۴+x\sin x$

۱۶. $y^{iv}+۴y''=\sin ۲x+xe^x+۴$

۱۷. $y^{iv}+۲y'''+۲y''=۳e^x+۲xe^{-x}+e^{-x}\sin x$

۱۸. معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام ناهمگن

$$a_۰y^{(n)}+a_۱y^{(n-۱)}+\dots+a_ny=g(x)$$

راکه درآن $a_۰$، . . . ، a_n ثابت‌اند درنظر می‌گیریم. تحقیق‌کنیدکه اگر $g(x)$ به صورت

$$e^{\alpha x}(b_۰x^m+\dots+b_m)$$

باشد، آنگاه با جایگزینی $y=e^{\alpha x}u(x)$ معادلهٔ بالا به‌صورت

$$t_۰u^{(n)}+t_۱u^{(n-۱)}+\dots+t_nu=b_۰x^m+\dots+b_m$$

درمی‌آید، کـه درآن $t_۰$، . . . ، t_n ثابت‌انـد. $t_۰$ و t_n را بـرحسب aها و α تعیین‌کنید. بدین‌سان مسئلهٔ تعیین‌یك جواب خصوصی معادلهٔ اصلی به‌مسئلهٔ سادهٔ تعیین جواب خصوصی یك معادلهٔ با ضرایب ثابت‌که درآن جملهٔ ناهمگن یك چندجمله‌ای است تبدیل می‌شود.

۵.۵ روش تغییر پارامترها

روش تغییر پارامترهـا برای تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام ناهمگن

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=g(x) \qquad (1)$$

مستقیماً تعمیم نظریه‌ای است که درمورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم بیان شد (بند ۲.۶.۳ را ببینید). چنانکه گذشت، برای‌استفاده از روش تغییر پارامترها، لازم است نخست معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر را حل کنیم. این کار عموماً دشوار است، مگر آنکه ضرایب ثابت باشند. با وجود این روش تغییر پارامترها به‌مفهومی که ذیلاً بیان می‌شود از روش ضرایب نامعین عامتر است. روش ضرایب نامعین را معمولاً می‌توان فقط دربارهٔ معادلات باضرایب ثابت وطبقه محدودی از توابع g به‌کارگرفت؛ درمورد معادلات با ضرایب ثـابت، معادلهٔ همگن را می‌توان حل کرد و از آنجا یك جواب خصوصی متناظر بـه هر تابع پیوستهٔ g با استفاده از روش تغییر پارامترهـا به‌دست آورد. اکنون فرض کنیم که یك مجموعهٔ اساسی جوابهای y_1، y_2، ...، y_n ازمعادلهٔ همگن معلوم باشد. آنگاه

$$y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \qquad (2)$$

روش تغییرپارامترها برای تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱) مبتنی بر آن است که بتوان n تابع u_1، u_2، ...، u_n را به‌گونه‌ای تعیین کرد که $y_p(x)$ به‌صورت

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x) \qquad (3)$$

باشد. چون باید n تابع را تعیین کنیم، لازم است که n شرط مشخص گردد. روشن است که یکی ازآنها آن‌است که y_p درمعادلهٔ (۱) صدق کند. $n-1$ شرط دیگر به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند کـه محاسبات آسان گردد. ازآنجاکـه اگـر تعیین y_p به‌حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر برای u_i، $i=1, 2, \ldots, n$ منجرگـردد، نمی‌توان انتظار داشت کـه سهولتی درمحاسبات به وجود آید، طبعاً باید شرایطی اعمال کرد که درنتیجه جمله‌هایی که منجر به مشتقهای بالاتر u_i می‌گردند حذف شوند. ازمعادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید

$$y_p'=(u_1y_1'+u_2y_2'+\cdots+u_ny_n')+(u_1'y_1+u_2'y_2+\cdots+u_n'y_n) \quad (4)$$

بدین‌سان نخستین شرطی که بر u_iها اعمال می‌کنیم آن است که

$$u_1'y_1+u_2'y_2+\cdots+u_n'y_n=0 \qquad (5)$$

با ادامهٔ این روش به‌طرز مشابه مشتقهای y_p تا مرتبهٔ $n-1$ به‌صورت

$$y_p^{(m)}=u_1y_1^{(m)}+u_2y_2^{(m)}+\cdots+u_ny_n^{(m)}, \quad m=0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad (6)$$

و $n-1$ شرط زیر برای توابع u_1، ...، u_n حاصل می‌گردد:

$$u'_1y_1^{(m-1)}+u'_2y_2^{(m-1)}+\dots+u'_ny_n^{(m-1)}=0, \quad m=1,2,\dots,n-1 \tag{7}$$

مشتق مرتبهٔ nام y_p عبارت است از

$$y_p^{(n)}=(u_1y_1^{(n)}+\dots+u_ny_n^{(n)})+(u'_1y_1^{(n-1)}+\dots+u'_ny_n^{(n-1)}) \tag{8}$$

بالاخره، این شرط راکه y_p جواب معادلهٔ (۱) باشد اعمال می‌کنیم. با جایگزینی مشتقهای y_p از روابط (۶) و (۸)، و دسته‌بندی جمله‌ها، و استفاده از روابط $L[y_i]=0$، $i=1,2,\dots,n$، به‌دست می‌آید

$$u'_1y_1^{(n-1)}+u'_2y_2^{(n-1)}+\dots+u'_ny_n^{(n-1)}=g \tag{9}$$

معادلهٔ (۹)، همراه با $n-1$ معادلهٔ (۷)، یك دستگاه معادلات ناهمگن خطی برای u'_1، u'_2، ...، u'_n تشکیل می‌دهد:

$$\begin{aligned} y_1u'_1+y_2u'_2+\dots+y_nu'_n&=0,\\ y'_1u'_1+y'_2u'_2+\dots+y'_nu'_n&=0,\\ y''_1u'_1+y''_2u'_2+\dots+y''_nu'_n&=0,\\ &\vdots\\ y_1^{(n-1)}u'_1+\dots+y_n^{(n-1)}u'_n&=g. \end{aligned} \tag{10}$$

شرط کافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (۱۰) آن است که دترمینان ضرایب به ازای هر مقدار x مخالف صفر باشد. اما، دترمینان ضرایب دقیقاً همان $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ است، و هیچگاه صفر نمی‌شود، زیرا y_1، ...، y_n جوابهای مستقل خطی معادلهٔ همگن می‌باشند. بنابراین می‌توان u'_1، ...، u'_n را معین کرد. با استفاده از دستور کرامر، دیده می‌شود که جواب دستگاه (۱۰) عبارت است از

$$u'_m(x)=\frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}, m=1, 2, \dots, n \tag{11}$$

که در آن $W(x)=W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ و W_m دترمینان حاصل از $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ با قراردادن ستون $(0, 0, \dots, 0, 1)$ به‌جای ستون mام است، با این نماد جواب خصوصی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y_p(x)=\sum_{m=1}^{n} y_m(x)\int^x \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}dt \,. \tag{12}$$

با وجود آنکه این روش ساده است، اما مسئلهٔ محاسباتی تعیین $y_p(x)$ از رابطهٔ (۱۲) به‌ازای $n>2$ آسان نیست. محاسبات را می‌توان تا اندازه‌ای با استفاده از اتحاد آبل:

$$W(x)=W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)=c\exp\left[-\int^x p_1(t)dt\right].$$

ساده نمود (مسئلهٔ ۲ بند ۲.۵ را ببینید). ثابت c را می‌توان با محاسبهٔ $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ دریك نقطهٔ انتخابی مناسب تعیین کرد.

مسائل

درهریك از مسائل ۱ تا ۳ با استفاده از روش تغییر پارامترها یك جواب خصوصی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده بیابید.

۱. $y''' + y' = \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$

۲. $y''' - y' = x$

۳. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

۴. مطلوب است تعیین یك جواب خصوصی معادلهٔ

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \quad x > 0$$

در صورتی‌که بدانیم x، x^2 و $1/x$ جوابهای معادلهٔ همگن متناظرند.

۵. برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - y'' + y' - y = g(x)$$

فرمولی‌که شامل چند انتگرال باشد، بیابید.

۶. برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y^{\text{iv}} - y = g(x)$$

فرمولی‌که شامل چند انتگرال باشد، بیابید.

راهنمایی: توابع $\sin x$، $\cos x$، $\sinh x$، $\cosh x$ تشکیل یك مجموعهٔ اساسی جوابهای معادلهٔ همگن را می‌دهند.

۷. برای جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = g(x), \quad x > 0$$

فرمولی‌که شامل چند انتگرال باشد، بیابید.

راهنمایی: تحقیق کنیدکه جوابهای معادلهٔ همگن عبارتند از x، x^2 و x^3.

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential*

۶

تبدیل لاپلاس

۱.۶ مقدمه. تعریف تبدیل لاپلاس

یکی از ابزارهای بسیار مفید برای حل معادلات دیفرانسیل خطی تبدیلات انتگرالی است.
تبدیل انتگرالی رابطه‌ای است به‌صورت

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta}K(s,t)f(t)dt \qquad (۱)$$

که تابع مفروض f را با انتگرال گیری به‌یك تابع دیگر F تبدیل می‌کند. تابع F را مبدل f، و تابع K را هستهٔ تبدیل می‌نامند. طرح کلی آن است که با استفاده از رابطهٔ (۱) مسئلهٔ مربوط به f را به‌یك مسئلهٔ ساده‌تر مربوط به F تبدیل کرده و این مسئلهٔ ساده‌تر را حل نمود وسپس تابع مطلوب f را با استفاده از مبدل آن، F به‌دست آورد. با انتخاب یك هستهٔ مناسب K و حدود انتگرال گیری α و β، اغلب می‌توان مسئلهٔ متضمن یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی را به‌طوراساسی‌ساده‌کرد. برخی از تبدیلات انتگرالی دارای‌کاربردهای فراوانی می‌باشند، وهریك از آنها برای گونه‌هایی از مسائل مناسب‌اند.

دراین فصل به‌بررسی خواص تبدیل لاپلاس[۱] وبرخی ازکاربردهای آن می‌پردازیم.

---

۱. پ.س. لاپلاس (P.S. Laplace)، (۱۷۴۹—۱۸۲۷) یکی از بزرگترین ریاضیدانان فرانسوی است، که به‌سبب پژوهشهایش در نجوم، احتمالات، و مکانیك شهرت یافته است. وی رابطهٔ (۲) را در ۱۷۸۲، مورد مطالعه قرارداد، اما فنونی‌که در این فصل بیان شده‌اند مدتها بعدوعمدتاً توسط اولیورهویساید (Oliver Heaviside)، (۱۸۵۰—۱۹۲۵) تکامل‌یافته‌اند.

این تبدیل به‌طریق زیر تعریف می‌شود. گیریم $f(t)$ به‌ازای $t \geqslant 0$ معین باشد، و فرض کنیم که f درشرایطی که بعداً بیان می‌شود صدق کند. در این صورت مبدل f در تبدیل لاپلاس، که آن را با $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ یا $F(s)$ نشان خواهیم داد، با تساوی زیر تعریف می‌شود

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (۲)$$

هستهٔ این تبدیل $K(s,t) = e^{-st}$ است، و به‌ویژه به‌معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت وابسته است. این تبدیل بخصوص درحل مسائلی که جمله‌های ناهمگن آنها دارای طبیعت ضربه‌ای یا ناپیوستگی می‌باشند سودمند است. در مورد این قبیل مسائل اعمال روشهایی که در پیش بیان شد نسبتاً دشوار است، و متضمن آن است که جوابهایی را که در فواصل متفاوت معتبرند به‌هم پیوندیم. درتحلیل‌مدارها که جمله‌های ضربه‌ای یا ناپیوسته فراوانند، تبدیل لاپلاس به‌ویژه بسیار باارزش است، اما درکاربردهای دیگر نیز واجد اهمیت است.

چون تبدیل لاپلاس با انتگرالی روی دامنهٔ صفر تا بینهایت تعریف می‌شود، مناسب است که نخست برخی ازخواص اساسی این گونه انتگرالها را یادآوری کنیم. بدواً متذکر می‌شویم که هرانتگرال روی فاصلهٔ بی‌کران را انتگرال ناسره می‌نامند، و به‌صورت حد انتگرالهایی که روی فواصل متناهی تعیین شده‌اند تعریف می‌شود؛ بدین‌سان

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(t)dt \qquad (۳)$$

که در آن A عدد حقیقی مثبتی است. اگر انتگرال از a تا A به‌ازای هر $A > a$ وجود داشته باشد، واگر وقتی $A \to \infty$ حد وجود داشته باشد، آنگاه می‌گویند انتگرال ناسره به‌این مقدار حدی همگراست. در غیراین صورت گوییم انتگرال واگراست و یا وجود ندارد. مثالهای زیر هردو حالت را توضیح می‌دهد.

مثال ۱. فرض‌کنیم $f(t) = e^{ct}$، $t \geqslant 0$، که درآن c یك عدد غیرصفر ثابت است. آنگاه

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{ct}dt = \lim_{A \to \infty} \frac{e^{ct}}{c}\Big|_0^A$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{1}{c}(e^{cA} - 1).$$

درنتیجه انتگرال‌ناسره همگراست اگر $c < 0$، و واگراست اگر $c > 0$. اگر $c = 0$، تابع زیرعلامت‌انتگرال برابر واحد است، و بازهم انتگرال واگراست.

مثال ۲. فرض کنیم $f(t) = 1/t$، $t \geqslant 1$. آنگاه

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \ln A.$$

چون $\lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$، انتگرال ناسره واگراست.

مثال ۳. فرض کنیم $f(t) = t^{-p}$، $t \geqslant 1$، که در آن p یک عــدد ثابت و $p \neq 1$ است؛ حالت $p = 1$ در مثال ۲ بررسی شد. آنگاه

$$\int_1^\infty t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_1^A t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1).$$

وقتی $A \to \infty$، $A^{1-p} \to 0$ اگر $p > 1$، امـا $A^{1-p} \to \infty$ اگر $p < 1$. بنابراین $\int_1^\infty t^{-p}dt$ به‌ازای $p > 1$ همگراست، اما (با احتساب نتیجهٔ مثال۲) به‌ازای $p \leqslant 1$ واگراست. این نتایج مشابه نتایج مربوط به‌سری $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ می‌باشند.

پیش از بحث دربارهٔ وجـود $\int_a^\infty f(t)dt$، باید به‌تعریف چند اصطلاح بپردازیم. تابع f را روی فاصلهٔ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ پیوستهٔ قطعه‌ای نامند، اگر بتوان ایـن فاصله را با تعدادی متناهی از نقاط

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

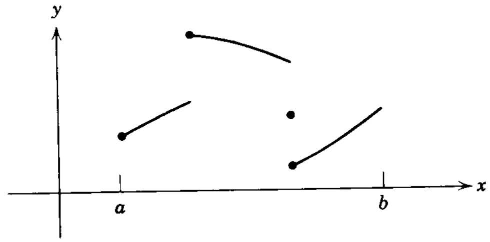
طوری تقسیم کرد که

۱. f روی هر زیرفاصلهٔ $t_{i-1} < t < t_i$ پیوسته باشد؛

۲. هنگامی که نقطه‌ای از داخل هرزیرفاصله به‌نقاط انتهایی آن میل کند، f دارای حد متناهی باشد.

به‌عبارت دیگر، f در $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ پیوستهٔ قطعه‌ای است اگر به‌جز تعدادی متناهی ناپیوستگی جهشی، در این فاصله پیوسته باشد. اگــر f روی $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ بـه‌ازای هر β، $\beta > \alpha$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، آنگاه f را روی $t \geqslant \alpha$ پیوستهٔ قطعه‌ای نامند. در شکل ۱.۶ مثالی از تابع پیوستهٔ قطعه‌ای نشان داده شده است.

اگر f روی فاصلهٔ $a \leqslant t \leqslant A$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که $\int_a^A f(t)dt$ وجود دارد. بنابراین، اگــر f به‌ازای $t \geqslant a$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، آنــگاه $\int_a^A f(t)dt$ به‌ازای هر $A > a$ وجود خواهد داشت. اما، چنانکه در مثالهای بالا دیده شد، پیوستگی قطعه‌ای برای تأمین همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_a^\infty f(t)dt$ کافی نیست.



شکل ۱۰۶ یك تابع پیوستهٔ قطعه‌ای.

اگر به‌آسانی نتوان انتگرال f را برحسب توابع مقدماتی به‌دست آورد، استفاده از تعریف همگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(t)dt$ ممکن است دشوار باشد. در اغلب موارد قضیهٔ مقایسهٔ زیرکه نظیر قضیهٔ مشابه آن در سریهاست، مناسبترین روش آزمون همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۰۶. فرض‌کنیم f به‌ازای $t \geqslant a$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، اگر به‌ازای یك ثابت مثبت M روی $t \geqslant a$ داشته باشیم $|f(t)| \leqslant g(t)$، واگر $\int_M^\infty g(t)dt$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(t)dt$ نیز همگراست. از طرف دیگر، اگر به ازای $t \geqslant M$ داشته باشیم $f(t) \geqslant g(t) \geqslant 0$، واگر $\int_M^\infty g(t)dt$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(t)dt$ نیز واگراست.

اثبات این قضیه راکه مربوط به‌حساب دیفرانسیل وانتگرال است در اینجا نمی‌آوریم. اما، با مقایسهٔ مساحتهایی‌که با $\int_M^\infty g(t)dt$ و $\int_M^\infty |f(t)|dt$ نموده می‌شوند می‌توان آن را توجیه کرد. مفیدترین توابع برای مقایسه عبارتند از e^{ct} و t^{-p}، که آنها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ بررسی کردیم.

اکنون باردیگر مبدل لاپلاس $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ یا $F(s)$ راکه با رابطهٔ (۲) هنگامی‌که انتگرال ناسرهٔ مزبور همگرا باشد معین می‌گردد، مورد توجه قرار می‌دهیم. درحالت‌کلی، پارامتر s می‌تواند مختلط باشد، اما دراین بحث‌کافی است تنها مقادیر حقیقی s را بررسی کنیم. بنا بربحثی‌که دربارهٔ انتگرالها عنوان شد، تابع f باید در شرایطی صدق‌کند تا مبدل لاپلاس F آن وجود داشته باشد. مفیدترین و ساده‌ترین این شرایط در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیهٔ ۲۰۶. فرض‌کنیم‌که

(یك) f روی فاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant A$ به‌ازای هر A مثبت پیوستهٔ قطعه‌ای باشد؛

(دو) به‌ازای $t \geqslant M$ داشته باشیم $|f(t)| \leqslant ke^{at}$. در این نامساوی k، a و M اعداد حقیقی ثابت‌اند، و لزوماً k و M مثبت‌اند.
آنگاه مبدل لاپلاس $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$، که با رابطهٔ (۲) تعریف شد، به‌ازای $s > a$ وجود دارد.

برای اثبات این قضیه تنها لازم است نشان دهیم که انتگرال موجود در رابطهٔ (۲) به‌ازای $s > a$ همگراست. انتگرال ناسرهٔ مزبور را به‌دو بخش تقسیم می‌کنیم

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_{0}^{M} e^{-st} f(t) dt + \int_{M}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad (۴)$$

نخستین انتگرال در طرف دوم رابطهٔ (۴) بنابرفرض (یك) قضیه وجود دارد؛ بنابراین وجود $F(s)$ بستگی به‌همگرایی انتگرال دوم خواهد داشت. بنا برفرض (دو) به‌ازای $t \geqslant M$ داریم

$$|e^{-st} f(t)| \leqslant k e^{-st} e^{at} = k e^{(a-s)t},$$

و بدین‌سان، بنا برقضیهٔ ۱.۶، اگر $\int_{M}^{\infty} e^{(a-s)t} dt$ همگرا باشد، $F(s)$ وجود دارد. با مراجعه به‌مثال ۱ وقراردادن $a-s$ به‌جای c، دیده می‌شود که این انتگرال هنگامی که $a - s < 0$، همگراست و قضیهٔ ۲.۶ ثابت می‌شود.
در این فصل، تنها توابعی را که در شرایط قضیهٔ ۲.۶ صدق کنند در نظر می‌گیریم، مگر آن‌که خلاف آن تصریح شود. این نوع توابع را پیوستهٔ قطعه‌ای، و از رتبهٔ نمایی وقتی $t \to \infty$ می‌نامند. مبدل لاپلاس برخی از توابع مقدماتی مهم در مثالهای زیر داده شده است.

مثال ۴. گیریم $f(t) = 1$، $t \geqslant 0$. آنگاه

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

مثال ۵. گیریم $f(t) = e^{at}$، $t \geqslant 0$. آنگاه

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

مثال ۶. گیریم $f(t) = \sin at$، $t \geqslant 0$. آنگاه

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} \sin at\, dt, \qquad s > 0$$

چون

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\sin at\,dt,$$

با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء خواهیم داشت

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\Big|_0^A-\frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt.$$

باردیگر از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم

$$F(s)=\frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}F(s).$$

بنابراین، با حل معادله نسبت به $F(s)$ داریم

$$F(s)=\frac{a}{s^2+a^2},\quad s>0$$

اکنون فرض کنیم که f_1 و f_2 دو تابعی باشند که مبدل لاپلاس آنها به‌ترتیب به‌ازای $s>a_1$ و $s>a_2$ وجود داشته باشد. آنگاه، به‌ازای s بزرگتر از ماکزیمم a_1 و a_2 داریم

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]dt$$

$$=c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt,$$

و بنابراین

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1\,\mathcal{L}\{f_1(t)\}+c_2\,\mathcal{L}\{f_2(t)\}\qquad(5)$$

رابطهٔ (۵) مبین آن است که تبدیل لاپلاس یك عملگر خطی است. این خاصیت فوق‌العاده مهم است، و ما در آینده از آن استفادهٔ فراوانی خواهیم کرد

مسائل

۱. نمودار هریك ازتوابع زیر را رسم کنید. درهرحالت تعیین کنیدکه آیا تابع f روی فاصلهٔ $۰ \leqslant t \leqslant ۳$ پیوسته یا پیوستهٔ قطعه‌ای است ویا هیچکدام

(الف)
$$f(t)=\begin{cases} t^{۲}, & ۰\leqslant t\leqslant ۱ \\ ۲+t, & ۱<t\leqslant ۲ \\ ۶-t, & ۲<t\leqslant ۳ \end{cases}$$

(ب)
$$f(t)=\begin{cases} t^{۲}, & ۰\leqslant t\leqslant ۱ \\ (t-۱)^{-۱}, & ۱<t\leqslant ۲ \\ ۱, & ۲<t\leqslant ۳ \end{cases}$$

(ج)
$$f(t)=\begin{cases} t^{۲}, & ۰\leqslant t\leqslant ۱ \\ ۱, & ۱<t\leqslant ۲ \\ ۳-t, & ۲<t\leqslant ۳ \end{cases}$$

(د)
$$f(t)=\begin{cases} t, & ۰\leqslant t\leqslant ۱ \\ ۳-t, & ۱<t\leqslant ۲ \\ ۱, & ۲<t\leqslant ۳ \end{cases}$$

۲. مبدل لاپلاس هریك ازتوابع زیر را بیابید.

(الف) t (ب) $t^{۲}$ (ج) t^{n}، که درآن n عدد صحیح مثبتی است.

۳. مبدل لاپلاس $f(t)=\cos at$ راکه درآن a ثابتی است حقیقی بیابید.

۴. با توجه به‌روابط $\cosh bt=(e^{bt}+e^{-bt})/۲$ و $\sinh bt=(e^{bt}-e^{-bt})/۲$ مبدل لاپلاس هریك ازتوابع زیر را بیابید؛ a و b ثابتهای حقیقی‌اند.

(الف) $\cosh bt$ (ب) $\sinh bt$

(ج) $e^{at}\cosh bt$ (د) $e^{at}\sinh bt$

۵. با توجه به‌روابط $\cos bt=(e^{ibt}+e^{-ibt})/۲$ و $\sin bt=(e^{ibt}-e^{-ibt})/۲i$ وبا فرض آنکه فرمولهای مقدماتی انتگرال گیری به‌این حالت تعمیم می‌یابند، مبدل لاپلاس هریك ازتوابع زیر را بیابید؛ a و b ثابتهای حقیقی‌اند.

(الف) $\sin bt$ (ب) $\cos bt$

(ج) $e^{at}\sin bt$ (د) $e^{at}\cos bt$

۶. با استفاده ازانتگرال گیری جزء به‌جزء، مبدل لاپلاس هریك ازتوابع زیـر را

بیابید؛ n یك عدد صحیح مثبت و a ثابتی حقیقی است.

(الف) te^{at} (ب) $t\sin at$ (ج) $t\cosh at$

(د) $t^n e^{at}$ (ه) $t^n \sin at$ (و) $t^n \sinh at$

۰۷ مطلوب است تعیین همگرایی یا واگرایی هریك ازانتگرالهای زیر:

(الف) $\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}\,dt$ (ب) $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ (ج) $\int_1^\infty t^{-2}e^t\,dt$

۰۸ فرض‌کنیم که f و f' به‌ازای $t \geqslant 0$ پیوسته و وقتی $t \to \infty$ از رتبهٔ نمایی باشند. با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء نشان دهیدکه اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$، آنگاه $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)=0$. در واقع این نتیجه تحت شرایط ضعیفتری نیز همانند آنچه در قضیهٔ ۲.۶ بیان شد صادق است.

۰۹ **تابع گاما.** تابع‌گاما را با $\Gamma(p)$ نشان داده وبا انتگرال

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^p\,dx \qquad \text{(یك)}$$

تعریف می‌کنند. این‌انتگرال به‌ازای همهٔ مقادیر p دربینهایت همگراست. به‌ازای $p<0$ نیز یك انتگرال ناسره است، زیرا وقتی $x\to 0$ تابع زیر علامت انتگرال بی‌کران می‌شود. اما، می‌توان نشان دادکه این انتگرال در $x=0$ به‌ازای $p>-1$ همگراست.

(الف) نشان دهیدکه به‌ازای $p>0$

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

(ب) اگر p برابر عدد صحیح مثبت n باشد، نشان دهیدکه

$$\Gamma(n+1)=n!$$

چون $\Gamma(p)$ به‌ازای مقادیر ناصحیح p نیز معین‌است، این تابع تعمیمی ازتابع فاکتوریل را برای مقادیر ناصحیح متغیر مستقل به‌دست می‌دهد.

(ج) نشان دهیدکه به‌ازای $p>0$

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)=\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$$

بدین‌سان اگر مقادیر $\Gamma(p)$ دریك فاصلهٔ به‌طول واحد، مثلاً $0<p\leqslant 1$ معلوم باشد، می‌توان به ازای همهٔ مقادیر مثبت p ، $\Gamma(p)$ را تعیین‌کرد. می‌توان نشان دادکه $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. $\Gamma(3/2)$ و $\Gamma(11/2)$ را بیابید.

(د) نشان دهیدکه $\Gamma(1)=1$ و درنتیجه با تعریف $0!=1$ سازگار است.

۱۰. مبدل لاپلاس t^p راکه در آن $p > -1$ است درنظر می‌گیریم.
(الف) با مراجعه به مسئلهٔ ۹، نشان دهیدکه

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p \, dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$$

(ب) اگر p برابر عدد صحیح مثبت n باشد، نشان دهیدکه

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

(ج) نشان دهیدکه

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx, \quad s > 0$$

می‌توان نشان دادکه

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

(د) نشان دهیدکه

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}, \quad s > 0$$

۲.۶ حل مسائل مقدار اولیه

دراین بند نشان می‌دهیم‌که چگونه با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان مسائل مقدار اولیه را درمورد معادلات دیفرانسیل با ضرایب‌ثابت حل‌کرد. کارایی‌تبدیل لاپلاس دراین مورد اساساً مبتنی براین نکته است‌کـه مبدل f' به‌طریق ساده‌ای با مبدل f مرتبط می‌گـردد. توضیح این ارتباط درقضیهٔ زیر آمده‌است.

قضیهٔ ۳.۶. فرض کنیم کـه روی هرفاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant A$ تابع f پیوسته و f' پیوستهٔ قطعه‌ای باشد. علاوه براین فرض کنیم که ثابتهای K، a و M وجود دارند به طوری کـه

به‌ازای $t \geqslant M$ داشته باشیم $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$. آنگاه $\mathfrak{L}\{f'(t)\}$ بـه ازای $s > a$ وجود دارد، وعلاوه براین

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s\mathfrak{L}\{f(t)\} - f(0) \qquad (1)$$

برای اثبات این قضیه انتگرال زیر را درنظر می گیریم

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt$$

اگر نقاط ناپیوستگی f' درفاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant A$ را با t_1 ، t_2 ، ... ، t_n نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)\, dt$$

با انتگرال گیری جزء به‌جزء هریك ازجمله‌های طرف دوم به دست می‌آید

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A} + s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)\, dt\right]$$

چون f پیوسته‌است، جمله‌های شامل t_1 ، t_2 ، ... ، t_n حذف می‌شوند. ازترکیب انتگرالها به‌دست می‌آید

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt$$

هنگامی که $s > a$ ، وقتی $A \to \infty$ داریم $e^{-sA} f(A) \to 0$. بنابراین، به ازای $s > a$ ،

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s\mathfrak{L}\{f(t)\} - f(0)$$

وقضیه ثابت می‌شود.

اگر f' و f'' درهمان شرایطی که درقضیهٔ ۳.۶ به‌ترتیب برای f و f' منظور شد صدق کنند، آنگاه مبدل لاپلاس f'' نیز به‌ازای $s > a$ وجود دارد و با رابطهٔ زیر معین می‌شود

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = s^2\mathfrak{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \qquad (2)$$

در واقع، اگر f و مشتقهای آن درشرایط مناسبی صدق کنند، با کاربردهـای متوالی این قضیه می‌توان عبارتی برای مبدل $f^{(n)}$ مشتق nام f به‌دست‌آورد. این مطلب درنتیجهٔ زیر آمده است.

نتیجه. فرض‌کنیم‌که روی هرفاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant A$ توابع f ، f' ، ... ، $f^{(n-1)}$ پیوسته و $f^{(n)}$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد. علاوه براین فرض کنیم که ثابتهای K ، a و M وجود داشته باشند بـه طـوری که بـه ازای $t \geqslant M$ ، $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ ، $|f'(t)| \leqslant Ke^{at}$ ، ... ، $|f^{(n-1)}(t)| \leqslant Ke^{at}$. آنگاه $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ به‌ازای $s > a$ وجود دارد وبا رابطهٔ زیر معین می‌شود

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

اکنون طرز استفاده ازتبدیل لاپلاس را برای حل مسائل مقدار اولیه بیان می‌کنیم. نخست معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (4)$$

وشرایط اولیهٔ

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (5)$$

را درنظر می‌گیریم.

این مسئلهٔ ساده به‌آسانی با روشهای بند ۵.۳ حل می‌شود. معادلهٔ مشخصه‌آن عبارت است از

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0 \quad (6)$$

و درنتیجه جواب عمومی معادلهٔ (۴) چنین است

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \quad (7)$$

شرایط اولیهٔ (۵) مستلزم آن است که $c_1 + c_2 = 1$ ، $-c_1 + 2c_2 = 0$ ؛ بنابراین $c_1 = \frac{2}{3}$ و $c_2 = \frac{1}{3}$ ، بدین‌سان جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴) و (۵) عبارت است از

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t} \quad (8)$$

اکنون همین مسئله را به‌وسیلهٔ تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم. برای این‌منظور بایدفرض کنیم‌که مسئله دارای یك جواب $y = \phi(t)$ است ونخستین دومشتق‌آن درشرایط نتیجهٔ بالا صدق می‌کنند. آنگاه، با اعمال تبدیل لاپلاس درمورد معادلهٔ (۴) خواهیم داشت

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (9)$$

در اینجـا از خطی بـودن تبـدیـل استفاده شده، مبدل مجموع به صورت حاصل جمع

مبدلها نوشته شده است. با استفاده ازنتیجهٔ بالا $\mathcal{L}\{y''\}$ و $\mathcal{L}\{y'\}$ را برحسب $\mathcal{L}\{y\}$ بیان می‌کنیم، ومعادلهٔ (۹) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$s^{2}\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)-[s\mathcal{L}\{y\}-y(0)]-2\mathcal{L}\{y\}=0$$

یا

$$(s^{2}-s-2)Y(s)+(1-s)y(0)-y'(0)=0 \tag{10}$$

که درآن $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}$. چون ازشرایط اولیهٔ (۵) مقادیر $y(0)$ و $y'(0)$ را درمعادلهٔ (۱۰) جایگزین کرده وآن را نسبت به $Y(s)$ حل کنیم، به دست می‌آید

$$Y(s)=\frac{s-1}{s^{2}-s-2}=\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \tag{11}$$

بدین‌سان برای $Y(s)$ کـه مبدل لاپلاس جواب مسئلهٔ مقدار اولیه یعنی $y=\phi(t)$ است، عبارتی به دست آورده‌ایم. برای تعیین تابع ϕ باید تابعی را بیابیم که مبدل لاپلاس آن برابر $Y(s)$ که با رابطه (۱۱) داده شده است، باشد.

این کاررا دراین حالت می‌توان به‌آسانی با بسط طرف دوم رابطهٔ (۱۱) به‌کسرهای ساده انجام داد. بدین‌سان

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{\frac{2}{3}}{s+1} \tag{12}$$

بالاخره، باتوجه به‌نتیجهٔ مثال ۵ بند۶.۱، دیده می‌شود که مبدل $\frac{1}{3}e^{2t}$ برابر $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$ است؛ به‌همین طریق $\frac{2}{3}e^{-t}$ دارای مبدل $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$ است. بنابـراین، بـا توجـه به خطی بودن تبدیل لاپلاس،

$$y=\phi(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$$

دارای مبدل (۱۲) است. این همان جوابی است که قبلاً با روش دیگری بـه دست آمد.

گرچه دراین مسئلهٔ ساده از به‌کارگرفتن تبدیل لاپلاس مزیت خاصی حاصل نمی‌شود، با وجود این می‌توان برخی از ویژگیهای اساسی روش تبدیل را خاطرنشان‌کرد. نخست آنکه، $Y(s)$ مبدل تابع مجهول $y=\phi(t)$ ازحل یك معادلهٔ جبری، معادلهٔ (۱۰)، ونه یك معادلهٔ دیفرانسیل بـه دست می‌آید. دیگر آنکه مستقیماً جوابی به دست می‌آید که هم در شرایط اولیهٔ (۵) وهم درمعادلهٔ دیفرانسیل (۴) صدق می‌کند. بدین‌سان مسئلهٔ تعیین مقادیر مناسب برای ثابتهای دلخواه جواب عمومی مطرح نمی‌گردد. برای خواننده این نکته نیز قابل‌توجه است که ضریب $Y(s)$ درمعادلهٔ (۱۰) دقیقاً همان چندجمله‌ای موجود در معادلهٔ

مشخصهٔ (۶) است؛ ودرواقع همیشه‌چنین‌است. چون استفاده از بسط $Y(s)$ به‌کسرهای ساده برای تعیین $\phi(t)$ مستلزم تجزیهٔ چندجمله‌ای می‌باشد، بنابراین به‌کار گرفتن تبدیل لاپلاس ما را از تعیین ریشه‌های معادلهٔ مشخصه بی‌نیاز نمی‌کند. درمورد معادلاتی‌که مرتبهٔ آنها بالاتر از دو است امکان داردکه این یك مسئلهٔ جبری دشواری باشد، به‌ویژه اگر ریشه‌ها گنگ یا مختلط باشند.

دشواری اصلی درحل مسائل مقدار اولیه به روش تبدیل همان مسئلهٔ تعیین تابع $y=\phi(t)$ متناظر با مبدل $Y(s)$ است. این مسئله را مسئلهٔ عکس تبدیل لاپلاس می‌نامند؛ $\phi(t)$ مبدل معکوس متناظر به $Y(s)$، و روش تعیین $\phi(t)$ از $Y(s)$ «تبدیل معکوس» نامیده می‌شود. برای نشان دادن مبدل معکوس $Y(s)$ از علامت $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ استفاده می‌کنیم. برای تبدیل معکوس لاپلاس فرمول‌کلی وجود دارد، اما به‌کار گرفتن آن مستلزم اطلاعاتی ازمبحث توابع مختلط است وآن را دراین‌کتاب مطرح نمی‌کنیم. اما، با وجود این می‌توان بسیاری از خواص مهم تبدیل لاپلاس،وحل بسیاری ازمسائل جالب را،بدون استفاده ازتوابع مختلط به‌دست آورد.

درحل مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴) و (۵) این سؤال راکه آیا جز تابعی‌که با رابطهٔ (۸) داده شده‌است توابع دیگری‌که دارای همان مبدل (۱۲) باشند وجود دارد؟ مطرح نکردیم. در واقع، می‌توان ثابت‌کردکه اگر f تابعی پیوسته با مبدل لاپلاس F باشد، آنگاه تابع پیوستهٔ دیگری‌که دارای همان مبدل باشد وجود ندارد. به‌عبارت دیگر، اساساً بین توابع ومبدل لاپلاس آنها یك تناظر یك به‌یك وجود دارد. این نکته گردآوری جدولی از مبدلهای توابع متداول ومعکوس آنها را مطرح می‌کند (جدول ۱.۶ را ببینید).[1] درستون دوم مبدل توابع متناظر در ستون اول مندرج است. مهمتر آنکه توابع ستون اول مبدل معکوس توابع متناظر درستون دوم می‌باشند. بدین‌سان، مثلاً اگر مبدل جواب معادلهٔ دیفرانسیلی معلوم باشد، خودجواب رااغلب می‌توان به‌سادگی بامراجعه به‌جدول پیداکرد. برخی از عناصر جدول ۱.۶ به‌عنوان مثال مورد استفاده قرار گرفتند وبرخی به‌عنوان مسئله دربند ۱.۶ مطرح می‌گردند، مابقی را بعداً درهمین فصل بررسی می‌کنیم. ستون سوم این جدول جایی را که در آن اشتقاق مبدل مزبور را می‌توان یافت نشان می‌دهد.

اغلب، یك مبدل لاپلاس $F(s)$ را می‌توان به‌صورت مجموع چند جمله نوشت

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s) \tag{۱۳}$$

فرض‌کنیم‌که $f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$ ، . . . ، $f_n(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. آنگاه تابع

$$f(t)=f_1(t)+\cdots+f_n(t)$$

دارای مبدل لاپلاس $F(s)$ است. بنابرخاصیت یکتایی فوق‌الذکر تابع پیوستهٔ دیگری‌که دارای همین مبدل باشد وجود ندارد. بدین‌سان

---

۱. جداول مفصلتری نیز در دسترس است. منابع پایانی این فصل را ببینید.

جدول ۱.۶ مبدلهای لاپلاس توابع مقدماتی

$f(t)=\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	توجه
۱	$\frac{۱}{s}, \quad s>۰$	بند ۱.۶؛ مثال ۴
e^{at}	$\frac{۱}{s-a}, \quad s>a$	بند ۱.۶؛ مثال ۵
$\sin at$	$\frac{a}{s^۲+a^۲}, \quad s>a$	بند ۱.۶؛ مثال ۶
$t^n, n=$ عددصحیح مثبت	$\frac{n!}{s^{n+۱}}, \quad s>۰$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۱۰
$t^p,\ p>-۱$	$\frac{\Gamma(p+۱)}{s^{p+۱}}, \quad s>۰$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۱۰
$\cos at$	$\frac{s}{s^۲+a^۲}, \quad s>۰$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۳
$\sinh at$	$\frac{a}{s^۲-a^۲}, \quad s>\lvert a\rvert$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۴
$\cosh at$	$\frac{s}{s^۲-a^۲}, \quad s>\lvert a\rvert$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۴
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^۲+b^۲}, \quad s>a$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۵
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^۲+b^۲}, \quad s>a$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۵
$t^n e^{at}, n=$ عددصحیح‌مثبت	$\frac{n!}{(s-a)^{n+۱}}, \quad s>a$	بند ۱.۶؛ مسئلهٔ ۶
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s>۰$	بند ۳.۶
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	بند ۳.۶
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	بند ۳.۶
$f(ct)$	$\frac{۱}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c>۰$	بند ۳.۶؛ مسئلهٔ ۴
$\int_۰^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	بند ۵.۶
$\delta(t-c)$	e^{-cs}	بند ۴.۶
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-۱}f(۰)-\cdots-f^{(n-۱)}(۰)$	بند ۲.۶
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	بند ۲.۶؛ مسئلهٔ ۱۴

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\cdots+\mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \qquad (۱۴)$$

یعنی، عکس تبدیل لاپلاس نیز یك عملگر خطی است.

دربسیاری ازمسائل به‌آسانی می‌توان این خاصیت را بـه‌کار گرفت ومبدل مفروض را به‌مجموع توابعی‌که مبدل معکوس آنها معلوم است یا ازجدول می‌توان به‌دست آورد تجزیـه‌کرد. بسط به‌کسرهـای ساده دراین مورد دارای اهمیت خاصی است، حالت‌کلی آن را درمسئلهٔ ۱۹ آورده‌ایم. خواص مفید دیگر تبدیل لاپلاس را بعداً دراین فصل بیان می‌کنیم.

برای توضیح بیشتر درمورد روش حل مسائل مقدار اولیه بـه‌وسیلهٔ تبدیل لاپلاس به‌مثال زیر توجه شود.

مثال. مطلوب است تعیین جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+y=\sin 2t \qquad (۱۵)$$

که درشرایط اولیهٔ زیر صدق کند

$$y(0)=0, \quad y'(0)=1 \qquad (۱۶)$$

فرض می‌کنیم که این مسئلهٔ مقدار اولیه دارای جوابی به‌صورت $y=\phi(t)$ باشد، که با نخستین دومشتق خود درشرایط نتیجهٔ قضیهٔ ۳.۶ صدق می‌کند. آنگاه، مبدل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل مزبور را به‌دست می‌آوریم، خواهیم داشت

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

که درآن مبدل $\sin 2t$ را ازجدول ۱.۶ به‌دست آورده‌ایم. چون به‌جای $y(0)$ و $y'(0)$ مقادیرآنها را ازشرایط اولیه قرارداده ومعادله را برحسب $Y(s)$ حل کنیم، به‌دست می‌آید

$$Y(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$Y(s)$ را با استفاده ازکسرهای ساده می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$Y(s)=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{cs+d}{s^2+4}$$

با تعیین ثابتهای a، b، c و d خواهیم داشت

$$Y(s)=\frac{\frac{5}{3}}{s^2+1}-\frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

با استفاده ازمثال ۶ بند ۱.۶، یا جدول ۱.۶، نتیجه می‌شود که

$$y=\phi(t)=\frac{۵}{۳}\sin t-\frac{۱}{۳}\sin ۲t \qquad (۱۷)$$

خواننده باید توجه داشته‌باشدکه برای حل‌یك معادلهٔ دیفرانسیل مانند معادلهٔ (۱۵)، بــه وسیلهٔ تبدیل لاپلاس، ازابتدا فرض می‌کنیم کـه جواب $y=\phi(t)$ دارای مبدل $Y(s)$ است. به‌محض آنکه جواب به‌دست آمد، صحت‌این فرض‌تأ ییدمی‌شود. به‌عنوان مثال، عبارت طرف دوم رابطهٔ (۱۷) به‌وضوح درشرایط نتیجهٔ قضیهٔ ۳.۶ به‌ازای $n=۲$ صدق می‌کند.

علاوه براین، این مثال نشان می‌دهدکه مسائل ناهمگن دقیقاً به‌همان طریق معادلات همگن حل می‌شوند؛ ولازم نیست‌که معادلات همگن وناهمگن را به‌صورتی کـه درفصل ۳ حل شد جداگانــه حل‌کرد. این یکی ازمزایای تبدیل لاپلاس است، ونیز، جوابی کــه در شرایط اولیه صدق‌کند مستقیماً به‌دست می‌آید، بی‌آنکه قبلاً به‌تعیین جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل بپردازیم.

مهمترین‌کاربردهای مقدماتی تبدیل لاپلاس را می‌توان دربررسی ارتعاشات مکانیکی وتحلیل مــدارهای الکتریکی مشاهده‌کرد؛ معادلات مربوطه را به‌ترتیب دربندهای ۷.۳ و ۸.۳ به‌دست آوردیم. یك دستگاه ارتعاشگر فنر-جرم دارای معادلهٔ حرکت

$$m\frac{d^۲u}{dt^۲}+c\frac{du}{dt}+ku=F(t) \qquad (۱۸)$$

است‌که درآن m جرم، c ضریب کاهش، k ثابت فنر، و $F(t)$ نیروی مؤثر خارجی است. معادلــهٔ یك مدار الکتریکی متشکل ازمقاومت R، ضریب القایی L، وخازن C (یعنی یك مدار RLC) عبارت است از

$$L\frac{d^۲Q}{dt^۲}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{۱}{C}Q=E(t) \qquad (۱۹)$$

که در آن $Q(t)$ بــار خازن و $E(t)$ ولتاژ مؤثر است. معادلهٔ (۱۹) را بــرحسب جریان $I(t)=dQ(t)/dt$ می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$L\frac{d^۲I}{dt^۲}+R\frac{dI}{dt}+\frac{۱}{C}I=\frac{dE}{dt}(t) \qquad (۲۰)$$

باید برای u، Q و I شرایط اولیهٔ مناسبی درنظر گرفت.

چنانکه قبلاً دربند ۸.۳ متذکــر شدیم معادلهٔ (۱۸) مربوط بــه دستگاه فنر-جرم و معادلات (۱۹) یــا (۲۰) برای مــدار الکتریکی ازلحاظ ریاضی متحد ویکسانند، تنهــا اختلاف درتعبیر ثــابتها و متغیرهای موجود درآنهــا می‌باشد. مسائل فیزیکی دیگری نیز به‌همین معادلهٔ دیفرانسیل منجرمی‌گردند. بدین‌سان هنگامی‌که مسئلهٔ ریاضی حل شد، جواب آن را می‌توان برحسب هریك ازمسائل فیزیکی متناظرکه مورد توجه باشد تعبیرکرد.

درمسائل این بند وبندهـای دیگر این فصل مسائل مقـدار اولیهٔ متعددی ازمعادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بـا ضرایب ثابت آمـده است. بسیاری ازآنهـا را می‌توان به عنوان مدلهای دستگاههای فیزیکی خاصی تعبیر کرد، اما معمولاً ما به تصریح این نکته نمی‌پردازیم.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۱۰ با استفاده ازتبدیل لاپلاس مسئلهٔ مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

۱. $y''-y'-۶y=۰;\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=-۱$

۲. $y''+۳y'+۲y=۰;\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰$

۳. $y''-۲y'+۲y=۰;\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۱$

۴. $y''-۴y'+۴y=۰;\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۱$

۵. $y^{\text{iv}}-۴y'''+۶y''-۴y'+y=۰;$

$$y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۱,\quad y''(۰)=۰,\quad y'''(۰)=۱$$

۶. $y^{\text{iv}}-y=۰;\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰,\quad y''(۰)=۱,\quad y'''(۰)=۰$

۷. $y''-۲y'-۲y=۰;\quad y(۰)=۲,\quad y'(۰)=۰$

۸. $y''+\omega^۲y=\cos ۲t,\quad \omega^۲\neq ۴;\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰$

۹. $y''-۲y'+۲y=\cos t;\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰$

۱۰. $y''-۲y'+۲y=e^{-t};\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۱$

درهریك ازمسائل ۱۱ و ۱۲ مبدل لاپلاس $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}$ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را بیابید. برای تعیین عکس مبدلها روشی در بند ۳.۶ خواهد آمد.

۱۱. $$y''+۴y=\begin{cases}۱, & ۰\leqslant t<\pi,\\ ۰, & \pi\leqslant t<\infty;\end{cases}\qquad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰$$

۱۲. $$y''+y=\begin{cases}t, & ۰\leqslant t<۱,\\ ۰, & ۱\leqslant t<\infty;\end{cases}\qquad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۰$$

*۱۳. مبدل لاپلاس برخی ازتوابع را می‌توان به‌آسانی ازبسط به‌سری تیلر به‌دست آورد.

(الف) با استفاده ازسری تیلر تابع $\sin t$،

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

وبا فرض آنکه مبدل لاپلاس این سری را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1},\quad s>1$$

(ب) گیریم

$$f(t)=\begin{cases}(\sin t)/t, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

سری تیلر تابع f را حول $t=0$ بیابید. با فرض آنکه مبدل لاپلاس این تابع را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\operatorname{arctg}\frac{1}{s},\quad s>1$$

(ج) تابع بسل نوع اول از رتبهٔ صفر J_0 دارای سری تیلر زیر است (بند ۷.۴ را ببینید)

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

با فرض آنکه مبدلهای لاپلاس زیر را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\}=(s^2+1)^{-1/2},\quad s>1$$

و

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\}=\frac{1}{s}e^{-1/4s},\quad s>0$$

مسائل ۱۴ تا ۱۷ مربوط به مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس می‌باشند.

۱۴. گیریم

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

می‌توان ثابت کرد که اگر f درشرایط قضیهٔ ۲.۶ صدق کند، مشتق‌گیری ازعبارت زیر علامت انتگرال نسبت به‌پارامتر s به‌ازای $s>a$ مجاز است.

(الف) نشان دهید که

$$F'(s)=\mathcal{L}\{-tf(t)\}$$

(ب) نشان دهیدکه

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$$

بدین‌سان مشتق مبدل لاپلاس، متناظر با ضرب تابع اصلی در $t-$ است.

۱۵. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۴، مبدل لاپلاس هریك از توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(t)=t^n e^{at}$ ، که درآن a ثابتی حقیقی و n عدد صحیح مثبتی است.

(ب) $f(t)=t^{2}\sin t$.

(ج) $f(t)=t^n$ ، که درآن n عدد صحیح مثبتی است.

۱۶*. معادلهٔ بسل رتبهٔ صفر

$$ty''+y'+ty=0$$

را درنظر می‌گیریم. در بند ۳.۴ دیده شدکه $t=0$ یك نقطهٔ غیرعادی منظم این معادله است، وبنابراین امکان داردکه جوابها وقتی $t\to 0$ بی‌کران شوند. اکنون بررسی کنیم که آیا جوابهایی وجود داردکه خود ومشتقهای آنها در $t=0$ متناهی باقی بمانند. با فرض‌آنکه چنین جواب $y=\phi(t)$ وجود داشته باشد، قرار می‌دهیم $Y(s)=\mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

(الف) نشان دهیدکه $Y(s)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$(1+s^2)Y'(s)+sY(s)=0$$

(ب) نشان دهیدکه $Y(s)=c(1+s^2)^{-1/2}$ ، که درآن c ثابت دلخواهی است.

(ج) با بسط $(1+s^2)^{-1/2}$ به‌یك سری دوجمله‌ای کـه به‌ازای $s>1$ معتبر باشد، وبا فرض آنکه بتوان مبدل معکوس را جمله به‌جمله محاسبه‌کرد نشان دهیدکه

$$y=c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=cJ_0(t)$$

که درآن J_0 تابع بسل نوع اول رتبهٔ صفر است. توجه شودکه $J_0(0)=1$ ، ومشتقهای همهٔ مراتب J_0 در $t=0$ متناهی هستند. در بند ۷.۴ نشان داده شدکه جواب دوم این معادله وقتی $t\to 0$ بی‌کران می‌شود.

۱۷. درهریك ازمسائل مقدار اولیهٔ زیر جواب را با $y=\phi(t)$ نشان می‌دهیم، با استفاده ازنتایج مسئلهٔ ۱۴ معادلهٔ دیفرانسیلی راکه $Y(s)=\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ درآن صدق می‌کند بیابید.

(الف) $y''+ty=0;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$ (معادلهٔ آیری)

(ب) $(1-t^2)y''-2ty'+\alpha(\alpha+1)y=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$
(معادلهٔ لژاندر)

توجه شود که معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به $Y(s)$ در قسمت (الف) مرتبهٔ اول است، اما درقسمت (ب) ازمرتبهٔ دوم می‌باشد. این بدان علت است که معادلهٔ قسمت (الف) حداکثر دارای توان اول t است، درحالی که درقسمت (ب) دارای توان دوم t می‌باشد. این نکته مبین آن است که تبدیل لاپلاس اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر مفید نیست، مگرآنکه همهٔ ضرایب حداکثر توابعی خطی از متغیرمستقل باشند.

۱۸. فرض کنیم که

$$g(t)=\int_{0}^{t} f(\tau)d\tau$$

اگر $G(s)$ و $F(s)$ به‌ترتیب مبدلهای لاپلاس $g(t)$ و $f(t)$ باشند، نشان دهید که

$$G(s)=\frac{F(s)}{s}$$

۱۹. دراین مسئله نشان می‌دهیم که چگونه به‌طورکلی با استفاده ازبسط به‌کسرهای ساده می‌توان عکس مبدلهای لاپلاس را محاسبه‌کرد. فرض کنیم که

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

که درآن $Q(s)$ یك چند جمله‌ای از درجهٔ n با صفرهای متمایز r_1، ...، r_n و $P(s)$ یك چند جمله‌ای از درجهٔ کمتر از n است . در این حالت می‌توان نشان داد که $P(s)/Q(s)$ دارای بسطی به‌کسرهای ساده به‌صورت زیر است

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{s-r_1}+\cdots+\frac{A_n}{s-r_n} \qquad \text{(یك)}$$

که در آن باید ضرایب A_1، ...، A_n را تعیین کرد.

(الف) نشان دهید که

$$A_k=\frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}, \quad k=1,\ldots,n \qquad \text{(دو)}$$

راهنمایی: یك روش برای این‌کار آن است که رابطهٔ (یك) را در $s-r_k$ ضرب کنیم و سپس حدآن را وقتی $s \to r_k$ بیابیم.

(ب) نشان دهید که

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}e^{r_k t} \qquad \text{(سه)}$$

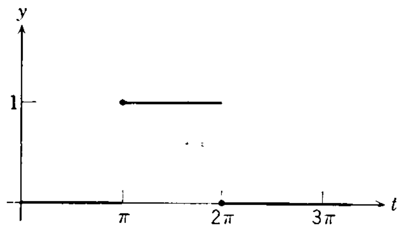
۳.۶ توابع پله‌ای

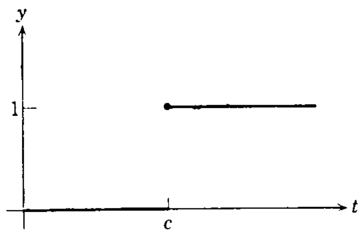
در بند ۲.۶ روش کلی حل مسائل‌مقدار اولیه با استفاده از تبدیل‌لاپلاس مطرح شد. برخی از جالبترین‌کاربردهای مقدماتی روش تبدیل را درحل معادلات دیفرانسیل خطی با توابع نیروی ناپیوسته یا ضربه‌ای می‌توان ملاحظه‌کرد. این نوع معادلات اغلب درتحلیل‌جریان درمدارهای الکتریکی‌یا ارتعاشات دستگاههای مکانیکی‌مطرح می‌شود. دراین‌بند وبندهای بعدی به‌بررسی برخی دیگر ازخواص تبدیل‌لاپلاس‌که درحل این نوع مسائل مفید هستند می‌پردازیم. جزدر مواردی‌که خلاف آن تصریح شود ذیلاً همهٔ توابع را پیوستهٔ قطعه‌ای و از رتبهٔ نمایی‌فرض می‌کنیم، تا بدین‌سان مبدل لاپلاس‌آنها حداقل به‌ازای مقادیر به‌قدر کافی بزرگ s وجود داشته باشد.

برای بررسی دقیق توابعی‌که دارای ناپیوستگی‌های جهشی‌می‌باشند، شناخت تابعی موسوم بـه تابع پله‌ای یکه بسیار مفید است. این تـابع‌کـه آن را با u_c نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$u_c(t)=\begin{cases} 0, & t<c, \\ 1, & t\geqslant c, \end{cases} \quad c\geqslant 0. \tag{۱}$$

نمودار تابع $y=u_c(t)$ درشکل ۲.۶ نشان داده شده است.


$y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t).$


$y = u_c(t).$

شکل ۲.۶ $y=u_c(t)$

شکل ۳.۶ $y=u_\pi(t)-u_{2\pi}(t)$

مثال ۱. نمودار تابع $y=h(t)$ راکه در آن

$$h(t)=u_\pi(t)-u_{2\pi}(t), \quad t\geqslant 0$$

است رسم‌کنید.

بنابرتعریف $u_c(t)$ در رابطهٔ (۱) داریم

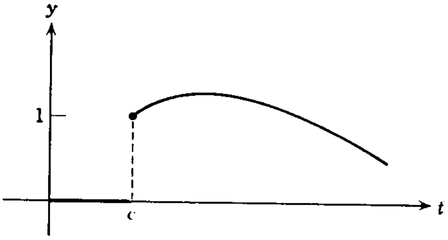
$$h(t)=\begin{cases} 0-0=0, & 0\leqslant t<\pi \\ 1-0=1, & \pi\leqslant t<2\pi \\ 1-1=0, & 2\pi\leqslant t<\infty \end{cases}$$

بدین‌سان نمودار $y=h(t)$ مطابق شکل ۳.۶ است.

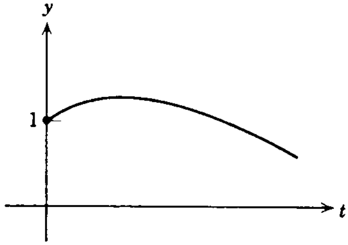
تابع پله‌ای یکه u_c را می‌توان برای انتقال به‌مسافت c به‌طرف راست یك تابع مفروض f، با حوزهٔ $t \geqslant 0$، به‌کار گرفت. به‌عنوان مثال، تابع زیر

$$y=u_c(t)f(t-c)=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < c, \\ f(t-c), & t \geqslant c, \end{cases}$$

نمایشگر انتقال تابع f به‌مسافت c در جهت مثبت t می‌باشد (شکل ۴.۶ را ببینید).



(ب) $y = u_c(t)f(t-c)$.



(الف) $y = f(t)$.

شکل ۴.۶

مبدل لاپلاس u_c به‌آسانی تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, u_c(t)dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s>0 \end{aligned} \tag{۲}$$

تابع پله‌ای یکه به‌علت رابطهٔ موجود بین‌مبدل $f(t)$ ومبدل انتقال یافتهٔ آن $u_c(t)f(t-c)$ که ذیلاً بیان می‌شود، در مبحث تبدیل لاپلاس دارای اهمیت ویژه‌ای است.

قضیهٔ ۴.۶ . اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ به‌ازای $s>a\geqslant 0$ وجود داشته باشد، و اگر c یك ثابت مثبت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-cs}F(s), \quad s>a \tag{۳}$$

عکس، اگر $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$، آنگاه

$$u_c(t)f(t-c)=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} \tag{۱}$$

برای اثبات قضیهٔ ۴.۶ کافی است مبدل $u_c(t)f(t-c)$ را محاسبه‌کنیم

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}=\int_{\circ}^{\infty}e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$
$$=\int_{c}^{\infty}e^{-st}\ f(t-c)dt$$

با تعویض متغیر $t-c=\xi$، خواهیم داشت

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}=\int_{\circ}^{\infty}e^{-(\xi+c)s}f(\xi)d\xi=e^{-cs}\int_{\circ}^{\infty}e^{-s\xi}f(\xi)d\xi$$
$$=e^{-cs}F(s)$$

بدین‌سان رابطهٔ (۳) اثبات شد؛ رابطهٔ (۴) از اعمال تبدیل عکس به‌دو طرف رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود.

مثال ساده‌ای برای این قضیه از قراردادن $f(t)=1$ به دست می‌آید. با توجه به $\mathcal{L}\{1\}=1/s$، مستقیماً از رابطهٔ (۳) داریم $\mathcal{L}\{u_c(t)\}=e^{-cs}/s$. این نتیجه با رابطهٔ (۲) مطابقت دارد. مثالهای۲ و۳ علاوه براین‌نشان می‌دهندکه چگونه‌ازقضیهٔ ۴.۶ می‌توان در محاسبهٔ مبدلها و عکس مبدلها استفاده‌کرد.

مثال ۲. اگرتابع f به‌صورت

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & \circ\leqslant t<2\pi\\ \sin t+\cos t, & t\geqslant 2\pi\end{cases}$$

تعریف شده باشد، $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بیابید.

دیده می‌شودکه $f(t)=\sin t+g(t)$، که در آن

$$g(t)=\begin{cases}\circ, & t<2\pi\\ \cos t, & t\geqslant 2\pi\end{cases}$$

بدین‌سان

$$g(t)=u_{2\pi}(t)\cos(t-2\pi)$$

و

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\sin t\}+\mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\cos(t-2\pi)\}$$
$$=\mathcal{L}\{\sin t\}+e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos t\}$$

با جایگزینی مبدلهای $\sin t$ و $\cos t$، به‌دست می‌آید

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{۱}{s^{۲}+۱}+e^{-۲\pi s}\frac{s}{s^{۲}+۱}$$
$$=\frac{۱+se^{-۲\pi s}}{s^{۲}+۱}$$

خوانندگان باید این روش را با محاسبهٔ مستقیم $\mathcal{L}\{f(t)\}$ براساس تعریف مقایسه کنند.

مثال ۳. مطلوب است مبدل معکوس

$$F(s)=\frac{۱-e^{-۲s}}{s^{۲}}$$

بنابرخطی بودن تبدیل معکوس خواهیم داشت

$$f(t)=\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}}\right\}-\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-۲s}}{s^{۲}}\right\}$$
$$=t-u_{۲}(t)(t-۲)$$

تابع f را نیز می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$f(t)=\begin{cases} t, & ۰\leqslant t<۲ \\ ۲, & t\geqslant ۲ \end{cases}$$

قضیهٔ زیر شامل خاصیت بسیار مفید دیگری از تبدیل لاپلاس است که از لحاظی نظیر خاصیت مذکور در قضیهٔ ۴.۶ است.

قضیهٔ ۵.۶. اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ به ازای $s>a\geqslant ۰$ وجود داشته، و c یك ثابت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}=F(s-c),\quad s>a+c \tag{۵}$$

برعکس، اگر $f(t)=\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\}$، آنگاه

$$e^{ct}f(t)=\mathcal{L}^{-۱}\{F(s-c)\} \tag{۶}$$

بنابرقضیهٔ ۵.۶، ضرب $f(t)$ در e^{ct} موجب انتقال مبدل $F(s)$ به‌مسافت c درجهت مثبت s می‌گردد، و بـرعکس. اثبات این قضیه تنها مستلزم محاسبهٔ $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$ است. بدین‌سان

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}e^{ct}f(t)dt=\int_{۰}^{\infty}e^{-(s-c)t}f(t)dt$$
$$=F(s-c)$$

که همان رابطهٔ (۵) است. قید $s > a+c$ از آنجا نتیجه می‌شود که بنابر فرض (دو) قضیهٔ ۲.۶ داریم $|f(t)| \leqslant ke^{at}$؛ بنابراین $|e^{ct}f(t)| \leqslant ke^{(a+c)t}$. رابطهٔ (۶) ازمبدل معکوس رابطهٔ (۵) نتیجه می گردد، و اثبات کامل می‌شود.

کاربرد اصلی قضیهٔ ۵.۶ درمحاسبهٔ برخی از مبدلهای معکوس است، چنانکه در مثال ۴ توضیح داده شده است.

مثال ۴. مطلوب است مبدل معکوس

$$G(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}$$

با جدا کردن مربع کامل موجود در مخرج، می‌توان نوشت

$$G(s)=\frac{1}{(s-2)^2+1}=F(s-2)$$

که در آن $F(s)=(s^2+1)^{-1}$. چون $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\sin t$ ، از قضیهٔ ۵.۶ نتیجه می‌شود که

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{2t}\sin t$$

نتایج این بند اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل مفید است، به‌ویژه معادلاتی که شامل توابع نیروی ناپیوسته‌اند. بند بعد به‌مثالی برای توضیح این نکته اختصاص یافته است.

مسائل

۱. نمودار هریك از توابع زیر را در فاصلهٔ $t \geqslant 0$ رسم کنید.

(الف) $u_1(t)+2u_2(t)-6u_4(t)$

(ب) $(t-3)u_2(t)-(t-2)u_3(t)$

(ج) $f(t-\pi)u_\pi(t)$، که در آن $f(t)=t^2$

(د) $f(t-3)u_3(t)$، که درآن $f(t)=\sin t$

(ه) $f(t-1)u_2(t)$، که درآن $f(t)=2t$

(و) $f(t)=(t-1)u_1(t)-2(t-2)u_2(t)+(t-3)u_3(t)$

۲. مبدل لاپلاس هریك از توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<2 \\ (t-2)^2, & t\geqslant 2 \end{cases}$

(ب) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<1 \\ t^2-2t+2, & t\geqslant 1 \end{cases}$

(ج) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<\pi \\ t-\pi, & \pi\leqslant t<2\pi \\ 0, & t\geqslant 2\pi \end{cases}$

(د) $f(t)=u_1(t)+2u_3(t)-6u_4(t)$

(ه) $f(t)=(t-3)u_2(t)-(t-2)u_3(t)$

(و) $f(t)=t-u_1(t)(t-1), \quad t\geqslant 0$

۳. مبدل لاپلاس معکوس هریك از توابع زیر را بیابید.

(الف) $F(s)=\dfrac{3!}{(s-2)^4}$ (ب) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$

(ج) $F(s)=\dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$ (د) $F(s)=\dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$

(ه) $F(s)=\dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$ (و) $F(s)=\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$

۴. فرض کنیم که $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ به‌ازای $s>a\geqslant 0$ وجود داشته باشد.

(الف) نشان دهید که اگر c ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s>ca$$

(ب) نشان دهید که اگر k ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\}=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

(ج) نشان دهید که اگر a و b مقادیر ثابت باشند و $a>0$، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\}=\frac{1}{a}e^{-bt/a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

۵. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۴، مبدل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیررا بیابید.

(الف) $F(s)=\dfrac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$ (ب) $F(s)=\dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

(ج) $F(s)=\dfrac{1}{9s^2-12s+3}$ (د) $F(s)=\dfrac{e^2e^{-4s}}{2s-1}$

۶. تبدیل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید. درقسمت (د) فرض می‌کنیم که انتگرال گیری جمله به‌جمله از سری مجاز باشد.

(الف) $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$ (ب) $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & 1\leqslant t<2\\ 1, & 2\leqslant t<3\\ 0, & t\geqslant 3\end{cases}$

(ج) $f(t)=1-u_1(t)+\cdots+u_{2n}(t)-u_{2n+1}(t)=1+\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k(t)$

(د) $f(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k(t)$. شکل ۵.۶ را ببینید.

۷. گیریم f در $f(t+T)=f(t)$ به‌ازای $t\geqslant 0$ و عدد مثبت T صدق کند؛ f را متناوب با دورهٔ تناوب T روی $0\leqslant t<\infty$ می‌نامند. نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

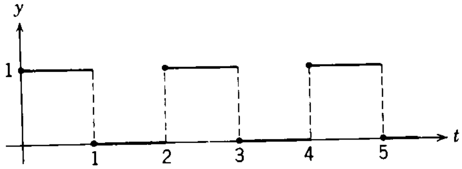
۸. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۷ مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & 1\leqslant t<2\end{cases}$
$f(t+2)=f(t)$
با مسئلهٔ ۶ (د) مقایسه کنید.

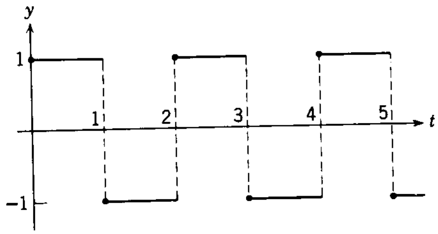
(ب) $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ -1, & 1\leqslant t<2\end{cases}$
$f(t+2)=f(t)$
شکل ۶.۶ را ببینید.

(ج) $f(t)=t,\quad 0\leqslant t<1$
$f(t+1)=f(t)$
شکل ۷.۶ را ببینید.

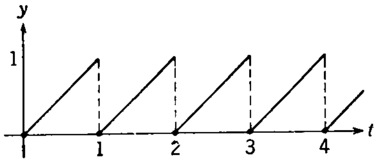
(د) $f(t)=\sin t,\quad 0\leqslant t<\pi$
$f(t+\pi)=f(t)$
شکل ۸.۶ را ببینید.



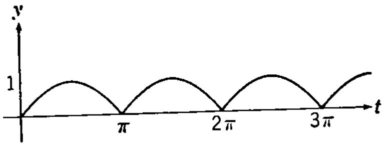
شکل ۵.۶ موج مربعی.



شکل ۶.۶ موج مربعی.



شکل ۷.۶ موج دندانه‌ای.



شکل ۸.۶ موج سینوسی یکطرفه.

۹* (الف) اگر $f(t)=1-u_1(t)$، مطلوب است $\mathcal{L}\{f(t)\}$؛ با مسئلهٔ ۶ (الف) مقایسه کنید. نمودار $y=f(t)$ را رسم کنید.

(ب) گیریم $g(t)=\int_0^t f(\xi)d\xi$، که در آن f تابعی است که در قسمت (الف) تعریف شد. نمودار $y=g(t)$ را رسم کنید، و $\mathcal{L}\{g(t)\}$ را بیابید.

(ج) گیریم $h(t)=g(t)-u_1(t)g(t-1)$، که در آن g تابعی است که در قسمت (ب) تعریف شده است. نمودار $y=h(t)$ را رسم کنید، و $\mathcal{L}\{h(t)\}$ را بیابید.

۱۰* تابع p را که به‌صورت زیر تعریف شده است درنظر می‌گیریم

$$p(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<1 \\ 2-t, & 1\leqslant t<2 \end{cases} \qquad p(t+2)=p(t)$$

(الف) نمودار $y=p(t)$ را رسم کنید.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۷، $\mathcal{L}\{p(t)\}$ را که در آن p ادامهٔ تناوبی تابع h در مسئلهٔ ۹ (ج) است بیابید.

(ج) با استفاده از قضیهٔ ۳.۶، $\mathcal{L}\{p(t)\}$ مبدل لاپلاس

$$p(t)=\int_0^t f(t)dt$$

را که در آن f تابع مسئلهٔ ۸ (ب) است بیابید.

۱.۳.۶ یك معادلهٔ دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته

اکنون توجه خودرا به‌یك مسئلهٔ نمونه‌که متضمن‌یك تابع نیروی ناپیوسته(جملهٔ ناهمگن) است معطوف می‌کنیم. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+۴y=h(t) \qquad (۱)$$

راکه درآن

$$h(t)=\begin{cases}۱, & \pi\leqslant t<۲\pi \\ ۰, & ۰\leqslant t<\pi, \quad t\geqslant ۲\pi\end{cases} \qquad (۲)$$

(شکل ۳.۶ صفحهٔ ۳۰۹ را ببینید) درنظرمی‌گیریم.
فرض‌کنیم‌که شرایط اولیه عبارتند از

$$y(۰)=۱, \quad y'(۰)=۰ \qquad (۳)$$

به‌عنوان مثال بار یك خازن در یك مدارالکتریکی ساده‌که شامل مقاومت نباشد و ولتاژ اعمال شده به‌صورت (۲) باشد از این مسئله تبعیت می‌کند. همچنین، y می‌تواند نمایشگر پاسخ یك نوسانگر هماهنگ نامیرا تحت نیروی اعمال شدهٔ $h(t)$ باشد.

قبل از آنکه مبدل معادلهٔ (۱) را به‌دست‌آوریم مناسبتر است‌که $h(t)$ را به‌صورت

$$h(t)=u_{\pi}(t)-u_{۲\pi}(t) \qquad (۴)$$

(مثال ۱ بند ۳.۶ را ببینید) بنویسیم. بدین‌سان مبدل لاپلاس معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$(s^{۲}+۴)Y(s)-sy(۰)-y'(۰)=\mathcal{L}\{u_{\pi}(t)\}-\mathcal{L}\{u_{۲\pi}(t)\}$$
$$=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-۲\pi s}}{s}$$

با درنظرگرفتن مقادیر اولیهٔ (۳) و استخراج $Y(s)$، به‌دست می‌آید

$$Y(s)=\frac{s}{s^{۲}+۴}+\frac{e^{-\pi s}}{s(s^{۲}+۴)}-\frac{e^{-۲\pi s}}{s(s^{۲}+۴)} \qquad (۵)$$

برای پیداکردن $y=\phi(t)$ باید جمله به‌جمله‌ازطرف دوم رابطهٔ (۵) مبدل معکوس گرفت. بنابرجدول ۱.۶ مبدل معکوس جملهٔ اول چنین است

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+۴}\right\}=\cos ۲t \qquad (۶)$$

برای محاسبهٔ مبدل معکوس جملهٔ دوم دیده می‌شودکه بنابرقضیهٔ ۴.۶ داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^{2}+4)}\right\}=u_{\pi}(t)g(t-\pi)$$

که در آن

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^{2}+4)}\right\}$$

با استفاده از تجزیه به‌کسرهای ساده، داریم

$$\frac{1}{s(s^{2}+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^{2}+4}\right)$$

و بنا بر جدول ۶.۱

$$g(t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

بدین‌سان

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^{2}+4)}\right\}=\frac{1}{4}u_{\pi}(t)[1-\cos 2(t-\pi)] \qquad (7)$$

و به‌همین طریق برای جملهٔ سوم داریم

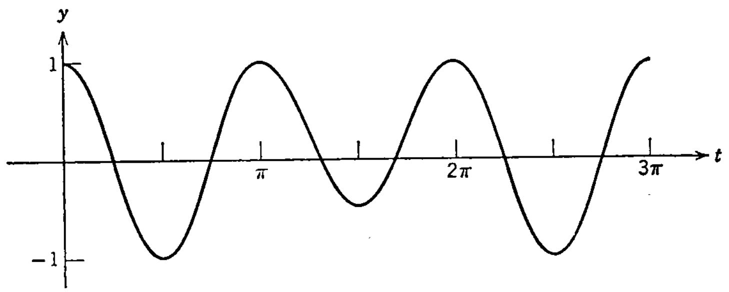
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^{2}+4)}\right\}=\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)] \qquad (8)$$

بالاخره با توجه به‌روابط (۶)، (۷) و (۸) به‌دست می‌آید

$$\phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$=\cos 2t+\frac{1}{4}u_{\pi}(t)[1-\cos 2(t-\pi)]-\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)] \qquad (9)$$

نمودار $y=\phi(t)$ در شکل ۶.۹ رسم شده است.



شکل ۶.۹ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱)، (۲)، (۳).

توجه شود که جمله‌های دوم و سوم طرف دوم رابطهٔ (۹) به‌ترتیب به‌ازای $t < \pi$ و $t < ۲\pi$ صفرند. اگر $\phi(t)$ را بدون استفاده از توابع پله‌ای یکه u_π و $u_{۲\pi}$ بنویسیم، آنگاه

$$\phi(t)=\begin{cases}\cos ۲t, & ۰\leqslant t<\pi\\ \frac{۳}{۴}\cos ۲t+\frac{۱}{۴}, & \pi\leqslant t<۲\pi\\ \cos ۲t, & ۲\pi\leqslant t<\infty.\end{cases} \qquad (۱۰)$$

مسئلهٔ مقدار اولیه که در اینجا بررسی شد، شامل یك معادلهٔ دیفرانسیل با تابع نیرو است که دارای یك ناپیوستگی جهشی می‌باشد. بنابراین کاملاً درمحدودهٔ قضیهٔ اساسی وجود ویکتایی ۲.۳ قرار نمی‌گیرد. بدین‌سان تعجبی ندارد که جواب $y=\phi(t)$ که با رابطهٔ ۱۰ بیان شده است با وجود آنکه به‌ازای $t > ۰$ پیوسته و دارای مشتق اول پیوسته است درنقاط $t=\pi$ و $t=۲\pi$ که تابع نیروی h دارای ناپیوستگی جهشی است دارای مشتق دوم نباشد. بنابر رابطهٔ (۱۰) داریم

$$\phi''(t)=\begin{cases}-۴\cos ۲t, & ۰<t<\pi,\\ -۳\cos ۲t, & \pi<t<۲\pi,\\ -۴\cos ۲t, & ۲\pi<t<\infty.\end{cases}$$

مثلاً درهمسایگی $t=\pi$، وقتی ازچپ $t\to\pi$، داریم $\phi''(t)\to -۴$، اما وقتی از راست $t\to\pi$، خواهیم داشت $\phi''(t)\to -۳$. بدین‌سان ϕ'' در $t=\pi$ دارای یك ناپیوستگی جهشی است، و در $t=۲\pi$ نیز وضعیت به‌همین منوال است. این ناپیوستگیها ناشی ازناپیوستگی تابع نیرو دراین نقاط است.

اکنون معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم کلی

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) \qquad (۱۱)$$

را درنظر می‌گیریم که در آن p و q روی یك فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند، اما g روی این فاصله تنها پیوسته قطعه‌ای است. اگر $y=\psi(t)$ یك جواب معادلهٔ (۱۱) باشد، آنگاه ψ و ψ' روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند، اما ψ'' همانند g و درهمان نقاط دارای ناپیوستگی جهشی خواهد بود. همین نکته درمورد معادلات ازمرتبهٔ بالاتر نیز صادق است؛ بالاترین مشتق جواب که درمعادلهٔ دیفرانسیل وجود دارد، همانند تابع نیرو، درهمان نقاط دارای ناپیوستگیهای جهشی‌است، اما جواب ومشتقهای پایینترحتی دراین‌نقاط پیوسته خواهند بود.

روش دیگر برای حل مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱)، (۲)، و (۳) آن است که معادلهٔ دیفرانسیل را در سه فاصلهٔ جداگانهٔ $۰ < t < \pi$، $\pi < t < ۲\pi$، $t > ۲\pi$ حل کنیم. در فاصلهٔ اول، ثابتهای دلخواه موجود در جواب عمومی به‌گونه‌ای انتخاب

می‌شوندکه در شرایط اولیه صدق کنند. درفاصلهٔ دوم ثابتها به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که ϕ ومشتق آن ϕ' در $t=\pi$ پیوسته باشند. توجه شودکه محدودیت تعداد ثابتها مانع از آن است که قید پیوستگی ϕ'' دراین نقطه را نیز اعمال کنیم. به‌همین طریق، درفاصلهٔ سوم ثابتها به‌گونه‌ای تعیین می‌شوندکه ϕ و ϕ' در $t=۲\pi$ پیوسته باشند. همین روش کلی را می‌توان در مسائل دیگری که دارای توابع نیروی پیوستهٔ قطعه‌ای‌اند به‌کار برد. اما، همین‌که موضوع از لحاظ نظری کامل شد، معمولاً آسانتر است که با استفاده از تبدیل لاپلاس این نوع مسائل را یکجا حل کرد.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۷ جواب مسئلهٔ مقدار اولیه داده شده را بیابید.

۱. $y''+y=f(t);\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۱\qquad f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leqslant t<\pi/۲\\ ۰, & \pi/۲\leqslant t<\infty\end{cases}$

۲. $y''+۲y'+۲y=h(t);\quad y(۰)=۰\quad y'(۰)=۱\qquad h(t)=\begin{cases}۱, & \pi\leqslant t<۲\pi\\ ۰, & ۰\leqslant t<\pi \text{ و } t\geqslant ۲\pi\end{cases}$

۳. $y''+۴y=\sin t-u_{۲\pi}(t)\sin(t-۲\pi);\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۰$

۴. $y''+۴y=\sin t+u_{\pi}(t)\sin(t-\pi);\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۰$

۵. $y''+۲y'+y=f(t);\quad y(۰)=۱,\ y'(۰)=۱\qquad f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leqslant t<۱\\ ۰, & t\geqslant ۱\end{cases}$

۶. $y''+۳y'+۲y=u_۲(t);\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۱$

۷. $y''+y=u_{\pi}(t);\quad y(۰)=۱,\ y'(۰)=۰$

*۸. گیریم تابع f به‌صورت

$$f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leqslant t<\pi\\ ۰, & \pi\leqslant t<۲\pi\end{cases}$$

تعریف شده‌است وبه‌ازای دیگر مقادیر مثبت t داشته باشیم $f(t+۲\pi)=f(t)$. یعنی، f متناوب و با دورهٔ تناوب ۲π است (مسئلهٔ ۷ بند ۳.۶ را ببینید). مطلوب است تعیین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر

$$y''+y=f(t);\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۰$$

*۹. فرض کنیم که تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<1 \\ 1, & t\geqslant 1 \end{cases}$$

(الف) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بیابید.
(ب) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y''+4y=f(t); \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$$

۴.۶ توابع ضربه‌ای

در برخی از کاربردها لازم می‌آید که پدیده‌هایی با ماهیت ضربه‌ای را بررسی کنیم، به‌عنوان مثال، ولتاژها یا نیروهای بسیار بزرگی که درفواصل زمانی بسیار کوتاه اثر می‌کنند. این نوع مسائل اغلب به‌معادلات دیفرانسیلی به‌صورت

$$ay''+by'+cy=g(t) \tag{1}$$

می‌انجامند که در آن $g(t)$ درطول یك فاصلهٔ کوتاه $t_0-\tau<t<t_0+\tau$ دارای مقدار بزرگی است و به‌ازای مقادیر دیگر t صفر است.

انتگرال $I(\tau)$، که با

$$I(\tau)=\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt \tag{2}$$

تعریف می‌شود، وچون درخارج فاصلهٔ $(t_0-\tau\,,\,t_0+\tau)$ داریم $g(t)=0$ بنابراین

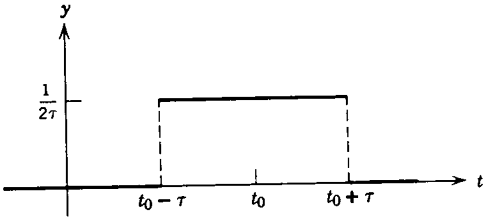
$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt\,, \tag{3}$$

نمایشگر اندازهٔ شدت تابع نیرو است. دریك دستگاه مکانیکی که $g(t)$ نیرو است، دراین صورت $I(\tau)$ ضربهٔ کل نیروی $g(t)$ درفاصلهٔ زمانی $(t_0-\tau\,,\,t_0+\tau)$ است. به‌همین‌نحو، اگر y نمایشگرجریان دریك مدار الکتریکی و $g(t)$ مشتق زمانی ولتاژباشد، آنگاه $I(\tau)$ نمایشگر ولتاژ کل است که درطول فاصله $(t_0-\tau\,,\,t_0+\tau)$ روی مدار اثر می‌کند.

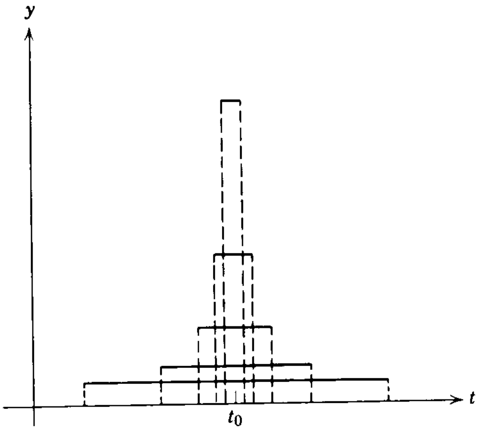
به‌ویژه، فرض‌کنیم t_0 برابر صفر، و $g(t)$ به‌صورت

$$g(t)=d_\tau(t)=\begin{cases} 1/2\tau\,, & -\tau<t<\tau \\ 0, & t\leqslant-\tau \text{ یا } t\geqslant\tau \end{cases} \tag{4}$$

باشدکه درآن τ ثابت مثبت کوچکی است (شکل ۱۰.۶ را ببینید). بنابر رابطهٔ (۲) یا (۳) مستقیماً نتیجه می‌شودکه دراین حالت مادامی‌که $\tau\neq 0$، داریم $I(\tau)=1$ و مستقل ازمقدار τ می‌باشد. اکنون با بررسی تأثیرتابع نیروی d_τ روی فواصل زمانی‌که بتدریج کوتاهتر می‌شوند؛ یعنی، بـا قید $\tau\to 0$ چنانکـه درشکل ۱۱.۶ نشان داده شده است



شکل۶.۱۰ $y=d_\tau(t)$.



شکل ۶.۱۱

به‌تجرید d_τ می‌پردازیم. درنتیجهٔ این عمل حدگیری خواهیم داشت

$$\lim_{\tau\to ۰} d_\tau(t)=۰,\quad t\neq ۰ \tag{۵}$$

علاوه براین، چون به‌ازای هر $۰\neq\tau$ داریم $I(\tau)=۱$، درنتیجه

$$\lim_{\tau\to ۰} I(\tau)=۱ \tag{۶}$$

روابط (۵) و (۶) را می‌توان برای تعریف یك «تابع ضربه یکه» ایده‌ال δ به‌کار گرفت، که یك ضربه با اندازه واحد در $t=۰$ وارد می‌کند، اما به‌ازای همهٔ مقادیر دیگر t برابر صفر است. یعنی، «تابع» δ با خواص زیر تعریف می‌شود

$$\delta(t)=۰,\quad t\neq ۰ \tag{۷}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=۱ \tag{۸}$$

روشن است که هیچ تابع معمولی از آن نوع که درآنالیز مقدماتی بررسی شده‌اند درهر

دو رابطهٔ (۷) و (۸) صدق نمی‌کند. «تابع» δ که با این روابط تعریف شد نمونه‌ای است از آنچه توابع تعمیم‌یافته نامیده می‌شود ومعمولاً آن‌را «تابع دلتای» دیراک[1] می‌نامند. اغلب مناسبتر است که توابع نیروی ضربه‌ای را به‌وسیلهٔ تابع دیراك نمایش دهیم. چون $\delta(t)$ متناظر با ضربهٔ واحد در $t=0$ است، یك ضربهٔ واحد درنقطهٔ دلخواه $t=t_0$ با $\delta(t-t_0)$ بیان می‌شود. از روابط (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که

$$\delta(t-t_0)=0, \quad t\neq t_0 \tag{۹}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1 \tag{۱۰}$$

تابع **دلتا** درشرایط قضیهٔ ۲.۶ صادق نیست، اما با وجود این مبدل لاپلاس آن را می‌توان به‌طور صوری تعریف کرد. چون $\delta(t)$ به‌عنوان حد $d_\tau(t)$ به‌ازای $\tau\to 0$ تعریف شده است، طبیعی است که مبدل لاپلاس δ نیز به‌طریق مشابه با حد مبدل d_τ تعریف شود. به ویژه، فرض می‌کنیم که $t_0>0$ باشد، و $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$ را با معادلهٔ

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} \tag{۱۱}$$

تعریف می‌کنیم. برای محاسبهٔ حد موجود در رابطهٔ (۱۱) نخست دیده می‌شود که اگر $\tau<t_0$، که در واقع چون $\tau\to 0$ شرط مزبور بالاخره برقرار می‌شود، آنگاه $t_0-\tau>0$. چون $d_\tau(t-t_0)$ تنها روی فاصله $t_0-\tau$ تا $t_0+\tau$ مخالف صفر است، داریم

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}=\int_0^\infty e^{-st}\,d_\tau(t-t_0)\,dt$$

$$=\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}e^{-st}\,d_\tau(t-t_0)\,dt$$

چون به‌جای $d_\tau(t-t_0)$ مقدار آن را از رابطهٔ (۴) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}=\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}e^{-st}\,dt=-\frac{1}{2\tau s}e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau}$$

$$=\frac{1}{2\tau s}e^{-st_0}(e^{s\tau}-e^{-s\tau})$$

یا

---

۱. پل. آ. م. دیراك (Paul A. M. Dirac)، (۱۹۰۲—) به خاطر تحقیقاتش در مکانیك کوانتیك در ۱۹۳۳ [همراه با اروین شرودینگر (Erwin Schrödinger)] به دریافت جایزهٔ نوبل نائل گردید.

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_\circ)\}=\frac{\sinh s\tau}{s\tau}e^{-st_\circ} \qquad (۱۲)$$

خارج‌قسمت $(\sinh s\tau)/s\tau$ وقتی $\tau \to \circ$ مبهم است، اما حدآن را می‌توان با استفاده ازقاعدهٔ هوپیتال محاسبه کرد. داریم

$$\lim_{\tau\to\circ}\frac{\sinh s\tau}{s\tau}=\lim_{\tau\to\circ}\frac{s\cosh s\tau}{s}=۱$$

آنگاه ازمعادلهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_\circ)\}=e^{-st_\circ} \qquad (۱۳)$$

چون رابطهٔ (۱۳) به‌ازای‌هر $t_\circ > \circ$ برقراراست، می‌توان $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ را از رابطهٔ (۱۳) با $t_\circ \to \circ$ تعریف کرد؛ بدین‌سان

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\lim_{t_\circ\to\circ}e^{-st_\circ}=۱ \qquad (۱۴)$$

به روش مشابــه می‌توان انتگرال حاصل‌ضرب تابع دلتا و هــر تابع پیوستهٔ f را تعریف کرد.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_\circ)f(t)\,dt=\lim_{\tau\to\circ}\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_\circ)f(t)\,dt \qquad (۱۵)$$

با استفاده ازتعریف $d_\tau(t)$، (۴) وقضیهٔ مقدار میانگین درمورد انتگرالها، به‌دست می‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_\circ)f(t)\,dt=\frac{۱}{۲\tau}\int_{t_\circ-\tau}^{t_\circ+\tau}f(t)\,dt$$
$$=\frac{۱}{۲\tau}\cdot ۲\tau\cdot f(t^*)=f(t^*)$$

کــه درآن $t_\circ-\tau<t^*<t_\circ+\tau$. بنابــراین وقتی $\tau\to\circ$، $t^*\to t_\circ$، و از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_\circ)f(t)\,dt=f(t_\circ) \qquad (۱۶)$$

اغلب هنگامی‌که با مسائل ضربه‌ای سروکار داریم، تابع دلتا را برای سهولت وارد کرده، و روی آن به‌طور صوری همانند یك تابع معمولی عمل می‌کنیم. این نکته را در مثال زیــر توضیح می‌دهیم. اما بایــد توجه داشت‌که توجیه نهایی این‌قبیل روشها بایــد برتحلیل دقیق عملیات حــدگیری مــزبور مبتنی باشد. دراین مورد نظریــهٔ ریاضی متقنی تکامل یافته است، اما دشوارتر ازآن است‌که دراینجا موردبحث قرارگیرد.

مثال. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \qquad (17)$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0 \qquad (18)$$

را بیابید.

این مسئلهٔ مقدار اولیه ممکن است در بررسی یك مدار الکتریکی که در آن یك ولتاژ ضربه‌ای واحد در زمان $t=\pi$ اعمال شده‌است مطرح گردد.

برای حل مسئلهٔ مزبور مبدل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل را به‌دست می‌آوریم

$$(s^2+2s+2)Y(s)=e^{-\pi s}$$

که در آن شرایط اولیهٔ (۱۸) به‌کار رفته‌اند. بدین‌سان

$$Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}=e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1} \qquad (19)$$

بنا بر قضیهٔ ۵.۶ یا ازجدول ۱.۶

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}=e^{-t}\sin t \qquad (20)$$

بدین‌سان، بنا بر قضیهٔ ۴.۶ داریم

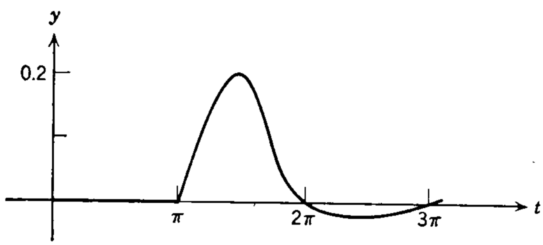
$$y=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi) \qquad (21)$$

که جواب صوری مسئلهٔ مزبور است. می‌توان y را به‌صورت زیر نوشت

$$y=\begin{cases}0, & t<\pi\\ e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi), & t\geqslant\pi\end{cases} \qquad (22)$$

نمودار تابع (۲۲) درشکل ۱۲.۶ نشان داده شده‌است.

چون در $t=0$ شرایط اولیه همگن‌انـد، وتحریك خارجی تا $t=\pi$ وجود ندارد،



شکل ۱۲.۶ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۷) و (۱۸)

درفاصلهٔ $\pi > t > ۰$ پاسخی وجودنخواهد داشت. ضربه در $t = \pi$ پاسخی ایجاد می‌کند که به‌طور نامحدود ادامه دارد، گرچه به‌طور نمایی، درصورت فقدان تحریك خارجی دیگر، مستهلك می‌شود. توجه به‌این نکته نیز جالب است که پاسخ در $t = \pi$ علی‌رغم ماهیت غیرعادی تابع نیرو دراین نقطهٔ، پیوسته است، اما شیب جواب دراین نقطهٔ دارای یك‌ناپیوستگی جهشی است، ومشتق دوم آن دراین نقطه تعریف نشده‌است. این لازمهٔ معادلهٔ دیفرانسیل (۱۷) است زیرا وجود نقطهٔ غیرعادی دریك طرف آن باید با یك نقطهٔ غیرعادی درطرف دیگر توازن یابد.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۷ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را با استفاده ازتبدیل لاپلاس بیابید.

۱. $y'' + ۲y' + ۲y = \delta(t-\pi); \quad y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۰$

۲. $y'' + ۴y = \delta(t-\pi) - \delta(t-۲\pi); \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۰$

۳. $y'' + ۲y' + y = \delta(t) + u_{۲\pi}(t); \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۱$

۴. $y'' - y = ۲\delta(t-۱); \quad y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۰$

۵. $y'' + ۲y' + ۳y = \sin t + \delta(t-\pi), \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۱$

۶. $y'' + \omega^۲ y = \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right); \quad y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۰$

۷. $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t; \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۱$

*۸. (الف) با استفاده از روش تغییرپارامترها نشان دهیدکه جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + ۲y' + ۲y = f(t), \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۰$$

عبارت است از

$$y = \int_۰^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \sin(t-\tau)\, d\tau$$

(ب) نشان دهیدکه اگر $f(t) = \delta(t-\pi)$، آنگاه جواب قسمت (الف) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)$$

که با رابطهٔ (۲۱) متن تطبیق می‌کند.

۵.۶ انتگرال تلفیقی

گاهی می‌توان یك مبدل لاپلاس $H(s)$ را به صورت حاصل‌ضرب دومبدل دیگر $F(s)$ و $G(s)$ که به ترتیب با توابع f و g متناظرند بیان‌کرد. دراین حالت، ممکن است انتظار داشته باشیم که $H(s)$ مبدل حاصل‌ضرب f و g باشد. امـا، چنین *نیست*؛ به‌عبارت دیگر، **مبدل لاپلاس حاصل‌ضرب معمولی دو تابع، حاصل‌ضرب مبدل آنها نیست. لیکن ازطرف دیگر، اگـر یك «ضرب تعمیم‌یافته» مناسبی تعریف‌کنیم وضعیت تغییر می‌کند، و به‌صورتی که درقضیهٔ زیر بیان شده‌است درمی‌آید.**

قضیهٔ ۶.۶. اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ و $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ هردو به‌ازای $s>a\geqslant 0$ وجود داشته باشند، آنگاه

$$H(s)=F(s)G(s)=\mathcal{L}\{h(t)\},\quad s>a \tag{۱}$$

که درآن

$$h(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{۲}$$

تابع h را تلفیق f و g می‌نامند؛ انتگرالهـای موجود در رابطهٔ (۲) را نیز انتگرالهـای تلفیقی می‌نامند.

تساوی دوانتگـرال رابطهٔ (۲) ازتعویض متغیر $\xi=t-\tau$ درانتگـرال اول نتیجه می‌شود. پیش‌ازآنکه به‌اثبات قضیه بپردازیم نکاتی را دربارهٔ انتگرال تلفیقی بیان می‌کنیم. **طبق این قضیه، مبدل تلفیق دو تـابع (و نـه مبدل حاصل‌ضـرب معمولـی آنهـا) بـا** حاصل‌ضرب مبدلهای آنهـا برابر است. به منظور تأکید این نکته‌کـه انتگرال تلفیقی را می‌توان به‌عنوان یك «ضرب تعمیم‌یافته» تلقی‌کرد قرار می‌دهند

$$h(t)=(f*g)(t) \tag{۳}$$

به‌ویژه، علامت $(f*g)(t)$ نمایشگر *نخستین* انتگرال موجود در رابطهٔ (۲) است.

تلفیق $f*g$ دارای بسیاری ازخواص ضرب معمولی است. به‌عنوان مثال، به‌آسانی می‌توان نشان دادکه

$$f*g=g*f \qquad \text{(خاصیت جابه‌جایی)} \tag{۴}$$

$$f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2 \qquad \text{(خاصیت توزیع‌پذیری)} \tag{۵}$$

$$(f*g)*h=f*(g*h) \qquad \text{(خاصیت شرکت‌پذیری)} \tag{۶}$$

$$f*0=0*f=0 \tag{۷}$$

اثبات این خواص به خواننده واگذار می‌شود. اما، ضرب معمولی دارای خواص دیگری

است کـه انتگرال تلفیقی واجد آنها نمی‌باشد. بـه‌عنوان مثال، معمولاً $f*1$ با f برابر نیست. برای اثبات کافی است توجه شود که

$$(f*1)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\cdot 1\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,d\tau$$

ومثلاً اگر $f(t)=\cos t$، آنگاه

$$\begin{aligned}(f*1)(t)&=\int_0^t \cos(t-\tau)\,d\tau=-\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\\&=-\sin 0+\sin t\\&=\sin t\end{aligned}$$

روشن است که، $(f*1)(t)\neq f(t)$. به‌همین نحو، نامنفی‌بودن $f*f$ ممکن است صادق نباشد. برای مثال مسئلهٔ ۳ را ببینید.

درکاربردهای گوناگونی که در آن رفتار دستگاه در لحظهٔ t نه‌تنها به‌وضعیت آن در لحظهٔ t بستگی دارد، بلکه به‌گذشتهٔ آن نیز وابسته است به‌انتگرالهای تلفیقی برمی‌خوریم. این نوع دستگاهها را گاهی دستگاههای وراثتی می‌نـامند و در زمینه‌های مختلفی ازقبیل انتقال نترونی، کشسانی-چسب، وبررسی ازدیاد جمعیتها مطرح می‌شود.

اکنون برگردیم به‌اثبات قضیهٔ ۶.۶، نخست دیده می‌شود که اگر

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi$$

و

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)\,d\eta$$

آنگاه

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)\,d\eta \qquad (۸)$$

چون تـابع زیر علامت انتگرال اول به‌متغیر انتگرالگیری دومین انتگرال بستگی ندارد، می‌توان $F(s)G(s)$ را به‌صورت انتگرال مکرر نوشت،

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty g(\eta)\,d\eta\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}f(\xi)\,d\xi \qquad (۹)$$

این عبارت را می‌توان با تعویض متغیر به‌صورت ساده‌تری درآورد. نخست به‌ازای η ی ثابت قرارمی‌دهیم $\xi=t-\eta$، آنگاه انتگـرال بـرحسب ξ در رابطهٔ (۹) به‌انتگرالی

برحسب t بدل می‌شود؛ بدین‌سان

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty g(\eta)\,d\eta\int_\eta^\infty e^{-st}f(t-\eta)\,dt \tag{۱۰}$$

سپس با قراردادن $\eta=\tau$؛ رابطهٔ (۱۰) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)\,dt \tag{۱۱}$$

انتگرال طرف دوم رابطهٔ (۱۱) در بخشی از صفحهٔ $t\tau$ کـه آن را درشکل ۱۳.۶ سایـه زده‌ایم وتا بینهایت ادامه دارد محاسبه می‌شود. با فرض آنکه بتوان ترتیب انتگرال‌گیری را معکوس کرد داریم

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dt\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{۱۲}$$

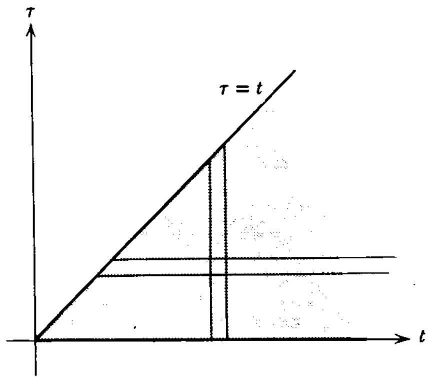
یا

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt\\&=\mathcal{L}\{h(t)\}\end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن $h(t)$ بـه وسیلهٔ رابطهٔ (۲) تعریف شده است. بدین‌سان اثبات قضیهٔ ۶.۶ پایان می‌یابد.

مثال. مطلوب است تعیین مبدل معکوس

$$H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$



شکل ۱۳.۶

به‌آسانی می‌توان $H(s)$ را به عنوان حاصل‌ضرب $s^{-۲}$ و $a/(s^۲+a^۲)$ تلقی کرد، که طبق جدول ۱.۶، به ترتیب مبدلهای t و $\sin at$ می‌باشند. بدین‌سان، بنا بر قضیهٔ ۶.۶، مبدل معکوس $H(s)$ عبارت است از

$$h(t)=\int_{\circ}^{t}(t-\tau)\sin a\tau\,d\tau=\frac{at-\sin at}{a^{۲}}$$

خواننده می‌تواند نشان دهدکه اگر برای $h(t)$ شق دیگر

$$h(t)=\int_{\circ}^{t}\tau\sin a(t-\tau)\,d\tau$$

را انتخاب کنیم به همین نتیجه می‌رسیم و رابطهٔ (۲) دراین‌حالت تأیید می گردد.

مسائل

۱. خواص جابه‌جایی، توزیع‌پذیری، وشرکت‌پذیری‌انتگرال تلفیقی را اثبات کنید.

(الف) $f*g=g*f$ (ب) $f*(g_۱+g_۲)=f*g_۱+f*g_۲$

(ج) $f*(g*h)=(f*g)*h$

۲. مثال دیگری به‌جزآنچه درمتن آمده است بیابیدکه نشان دهد $(f*۱)(t)$ لزوماً با $f(t)$ برابر نیست.

۳. با استفاده ازمثال $f(t)=\sin t$ نشان دهیدکه $f*f$ لزوماً نامنفی نیست.

۴. مبدل لاپلاس هریك از توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(t)=\int_{\circ}^{t}(t-\tau)^{۲}\cos ۲\tau\,d\tau$

(ب) $f(t)=\int_{\circ}^{t}e^{-(t-\tau)}\sin\tau\,d\tau$

(ج) $f(t)=\int_{\circ}^{t}(t-\tau)e^{\tau}\,d\tau$

(د) $f(t)=\int_{\circ}^{t}\sin(t-\tau)\cos\tau\,d\tau$

۵. با استفاده ازقضیهٔ تلفیق مبدل معکوس لاپلاس هریك ازتوابع زیر را بیابید.

(الف) $F(s)=\dfrac{۱}{s^{۴}(s^{۲}+۱)}$ (ب) $F(s)=\dfrac{s}{(s+۱)(s^{۲}+۴)}$

(ج) $F(s)=\dfrac{۱}{(s+۱)^{۲}(s^{۲}+۴)}$ (د) $F(s)=\dfrac{G(s)}{s^{۲}+۱}$

۶. مطلوب است تعیین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+2y'+2y=f(t); \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

که در آن $f(t)=1-u_{2\pi}(t)$.

۷. مطلوب است تعیین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+2y'+2y=\sin \alpha t; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

که در آن α مقداری است ثابت.

۸. معادلهٔ

$$\phi(t)+\int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi=f(t)$$

راکه درآن توابع f و k معلوم، و ϕ مجهول است درنظر می‌گیریم. چون تابع مجهول ϕ در زیر علامت انتگرال است، معادلهٔ مزبور را معادلهٔ انتگرالی می‌نامند؛ بویژه، این معادله به طبقه‌ای ازمعادلات انتگرالی تعلق داردکه به‌معادلات انتگرالی ولترا[1] مشهورند. با گرفتن مبدل لاپلاس ازمعادلهٔ انتگرالی مزبور، برای $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ عبارتی برحسب $\mathcal{L}\{f(t)\}$ و $\mathcal{L}\{k(t)\}$ مبدلهای توابع معلوم f و k به‌دست می‌آید. مبدل معکوس $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ جواب معادلهٔ انتگرالی داده شده است.

۹. معادلهٔ انتگرالی ولترا (مسئلهٔ ۸ را ببینید)

$$\phi(t)+\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi=\sin 2t$$

را درنظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهیدکه اگر تابع u به‌گونه‌ای باشدکه $u''(t)=\phi(t)$، آنگاه

$$u''(t)+u(t)-tu'(0)-u(0)=\sin 2t$$

(ب) نشان دهیدکه معادلهٔ انتگرالی مزبور با مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u''(t)+u(t)=\sin 2t; \quad u(0)=0, \quad u'(0)=0$$

هم‌ارز است.

(ج) معادلهٔ انتگرالی مزبور را با استفاده ازتبدیل لاپلاس حل‌کنید.

(د) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ قسمت (ب) را حل‌کنید، وتحقیق‌کنیدکه جواب همان است که درقسمت (ج) به‌دست آمد.

۱۰. توتوکرون[2] (خم همزمان). یکی از مسائل جالب درتاریخ ریاضیات مسئلهٔ

---

1. Volterra (1860–1940)　　2. The Tautochrone

تعیین توتوکرون است: خمی که هرگاه یك‌نقطهٔ مادی روی آن تنها دراثرنیروی ثقل بلغزد، زمان لازم برای رسیدن آن به‌پایینترین نقطهٔ خم مستقل ازنقطهٔ آغاز حرکت باشد. برای ساختن آونگی که تناوب آن از دامنهٔ نوسان مستقل‌باشد به‌این مسئله برخوزدند. توتوکرون را در ۱۶۷۳ کریستیان هویگنس[1] بـا روشهای هندسی به دست‌آورد، و بعـداً لایبنیتز و یاکوب برنولی آن را با روش تحلیلی به دست آوردند. روش برنولی (در ۱۶۹۰) یکی ازنخستین مواردی بودکه درآن صریحاً به حل یك معادلهٔ دیفرانسیل اقدام شد.

خم مزبور درشکل ۱۴.۶ نشان داده شده‌است. نقطهٔ آغازی $P(a\,,\,b)$ به‌نقطهٔ انتهایی $(\circ\,,\,\circ)$ باکمان C متصل شده است. طول‌کمان s را ازمبدأ انـدازه می‌گیریم، و $f(y)$ میزان تغییرات s را برحسب y نشان می‌دهد:

$$f(y)=\frac{ds}{dy}=\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(یك)}$$

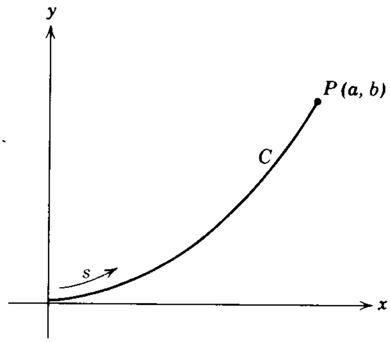
آنگاه $T(b)$ زمان لازم برای رسیدن P به مبدأ با استفاده ازاصل بقاء انرژی به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$T(b)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\circ}^{b}\frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\,dy \qquad \text{(دو)}$$

(الف) فرض‌کنیم که b هرچه باشد، $T(b)=T_{\circ}$ مقداری‌است ثابت. ازمعادلهٔ (دو) تبدیل لاپلاس بگیرید، وبا استفاده ازقضیهٔ تلفیق نشان دهیدکه

$$F(s)=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\cdot\frac{T_{\circ}}{\sqrt{s}}; \qquad \text{(سه)}$$

آنگاه نشان دهیدکه



شکل ۱۴.۶

1. Christian Huygens (1629–1695)

$$f(y)=\frac{\sqrt{۲g}\,T_\circ}{\pi\sqrt{y}} \qquad \text{(چهار)}$$

راهنمایی: مسئلهٔ ۱۰ بند ۱.۶ را ببینید.

(ب) با ترکیب معادلات (یك) و (چهار)، نشان دهید که

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{۲\alpha-y}{y}} \qquad \text{(پنج)}$$

که در آن $\alpha=gT_\circ^۲/\pi^۲$.

(ج) بـا استفاده از تعویض متغیر $y=۲\alpha\sin^۲(\theta/۲)$ برای حل معادلهٔ (پنج) نشان دهید که

$$x=\alpha(\theta+\sin\theta),\quad y=\alpha(۱-\cos\theta)\,. \qquad \text{(شش)}$$

معادلات (شش) نمایشگـر معادلات پارامتری یك سیکلوئید است. بدین‌سان توتوکـرون کمانی از سیکلوئید است.

۶.۶ بحث کلی و خلاصه

درخاتمهٔ این فصل، به‌اختصار بـرخی ازجنبه‌های کلیتر روش تبدیل را مورد بحث قـرار می‌دهیم. مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای راکه مشتمل برمعادلهٔ دیفرانسیل

$$ay''+by'+cy=f(t) \qquad (۱)$$

است و a، b و c ثابتهای حقیقی و f تابع معلومی است همراه با شرایط اولیهٔ

$$y(\circ)=y_\circ,\quad y'(\circ)=y'_\circ \qquad (۲)$$

درنظر می گیریم.

مبدل لاپلاس معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$(as^۲+bs+c)Y(s)-(as+b)y(\circ)-ay'(\circ)=F(s) \qquad (۳)$$

که در آن $Y(s)$ و $F(s)$ به‌ترتیب مبدلهـای y و $f(t)$ می‌باشند. با استفاده ازشرایط اولیهٔ (۲) واستخراج $Y(s)$، به دست می‌آید

$$Y(s)=\frac{F(s)+(as+b)y_\circ+ay'_\circ}{as^۲+bs+c} \qquad (۴)$$

بدین‌سان می‌توان $Y(s)$ را به‌عنوان حاصل‌ضرب توابع

$$H(s)=(as^۲+bs+c)^{-۱} \qquad (۵)$$

و

$$G(s)=F(s)+(as+b)y_\circ+ay'_\circ \qquad (۶)$$

تصور کرد. تابع نخست، H، کاملاً بهوسیلهٔ خواص دستگاه موردبررسی مشخص می‌گردد، و می‌توان آن را تابع دستگاه نامید. در مورد یک مدار الکتریکی معمولاً تابع $Z(s)=۱/sH(s)$ را امپدانس[1] مدار می‌نامند. تابع دوم، G، بـه تابع نیرو و شرایط اولیه بستگی دارد و می‌توان آن‌را تابع تحریک نامید. علاوه براین، تابع تحریک نیز از دوجزء تشکیل‌شده‌است: تابع F، که مبدل تابع نیروی f است، وتابع $(as+b)y_\circ+ay'_\circ$ که به شرایط اولیه بستگی دارد.

دراینجا این وسوسه پیش می‌آید که بنویسیم

$$Y(s)=H(s)G(s) \qquad (۷)$$

و، با استفادهٔ ازقضیهٔ تلفیق جواب معادلات (۱) و (۲) را به صورت زیر بهدست آوریم

$$y=\int_\circ^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \qquad (۸)$$

اما، تابع $(as+b)y_\circ+ay'_\circ$ نمی‌تواند مبدل لاپلاس یك تابع معمولی باشد.[2] درنتیجه، باید $Y(s)$ را بهصورت زیر نوشت

$$Y(s)=H(s)F(s)+\frac{(as+b)y_\circ+ay'_\circ}{as^۲+bs+c} \qquad (۹)$$

ازآنجا

$$y=\int_\circ^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{(as+b)y_\circ+ay'_\circ}{as^۲+bs+c}\right\} \qquad (۱۰)$$

به مجرد آنکه مقادیر a، b و c داده شوند، مبدل معکوس موجود در رابطهٔ (۱۰) را می‌توان ازجدول ۱.۶ یا بـا استفاده از روش کسرهای ساده تعیین کرد. بـا استفاده از خطی‌بودن تبدیل معکوس، معادلهٔ (۱۰) را می‌توان بهصورت زیر نوشت

$$y=\int_\circ^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+y_\circ\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{as+b}{as^۲+bs+c}\right\}$$
$$+y'_\circ\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{a}{as^۲+bs+c}\right\} \qquad (۱۱)$$

1. impedance

۲. اگر چنین بود وقتی $s\to\infty$ بهصفر میل می‌کرد (مسئلهٔ ۸ بند ۱.۶ را ببینید). اما، می‌توان این تابع را بهعنوان مبدل ترکیبی ازتابع دلتا و «مشتق» آن تعبیر کرد.

وچون قرار دهیم

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\}, \quad y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\} \quad (۱۲)$$

خواهیم داشت

$$y=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+y_0 y_1(t)+y_0' y_2(t) \quad (۱۳)$$

نخستین جملهٔ طرف دوم رابطهٔ (۱۳) پاسخ دستگاه را به تابع نیروی f نشان می‌دهد. بنا بر اصطلاحات فصل ۳ این یک جواب خصوصی معادلهٔ ناهمگن (۱) است. جملات دیگر طرف دوم رابطهٔ (۱۳) پاسخ دستگاه با شرایط اولیه را نمایش می‌دهد. اگر y_0 و y_0' را به‌عنوان ثابتهای دلخواه تلقی کنیم، این جمله‌ها متضمن تابع مکمل، یعنی جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظر با معادلهٔ (۱) می‌باشند.

مراجع

کتابهای زیر دربارهٔ تبدیل لاپلاس وکاربردهای آن حاوی اطلاعات بیشتری هستند.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1958.

Doetsch, Gustave, *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, Van Nostrand, London, 1967.

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

McLachlan, N. W., *Modern Operational Calculus*, Dover, NewYork. 1962.

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 1971.

هریك ازکتابهای فوق شامل یك جدول تبدیلات است. جداول مفصلتری نیز وجود دارند؛ به‌عنوان مثال، کتابهای زیر را ببینید:

Erdelyi, A. (editor), *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill, NewYork, 1954.

Roberts, G. E. and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms*, Saunders, Philadelphia, 1966.

درکتاب زیر بحث مفصلتری دربارهٔ توابع تعمیم‌یافته آمده است:

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, 1958.

۷

دستگاههای معادلات مرتبهٔ اول

۱.۷ مقدمه

این فصل به‌بررسی دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی اختصاص دارد. در مسائلی‌که مشتمل برچند تابع از یك متغیر مستقل می‌باشند، طبعاً به‌این نوع دستگاهها برمی‌خوریم. در اینجا توابع را با x_1، x_2، x_3، . . . و متغیر مستقل را با t نشان می‌دهیم. مشتق‌گیری نسبت به t را با علامت پریم نمایش می‌دهیم.

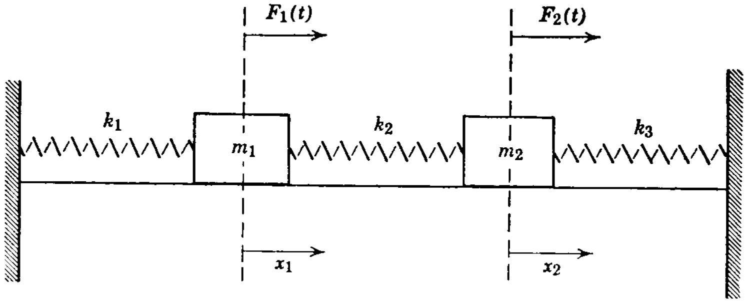
به‌عنوان مثال، حرکت یك نقطهٔ مادی درفضای سه بعدی از قانون نیوتن

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= F_1\left(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\frac{dx_3}{dt}\right),\\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= F_2\left(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\frac{dx_3}{dt}\right), \qquad (1)\\
m\frac{d^2x_3}{dt^2} &= F_3\left(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\frac{dx_3}{dt}\right),
\end{aligned}
$$

پیروی می‌کند، که در آن m جرم نقطهٔ مادی؛ x_1، x_2 و x_3 مختصات فضایی آن؛ و F_1، F_2 و F_3 نیروهای وارد برآن به‌ترتیب در راستاهـای x_1، x_2 و x_3 است. اگر مثـلاً نقطهٔ مزبور نمایشگر یك سفینـهٔ فضایی باشد، آنگاه F_1، F_2 و F_3 مشتمل است برنیروهـای

جاذبه که از اجرام سماوی مجاور برسفینه وارد می‌شوند، و نیروهایی که به‌وسیلهٔ دستگاه محرکـه ایجاد می‌گردند، و عـلاوه بر این اگر درجو زمین باشد، نیروهای مقاوم را نیز شامل است.

به‌عنوان مثال دیگر، دستگاه متشکل از فنر- جرم را که درشکل ۱.۷ نشان داده شده است درنظر می‌گیریم.



شکل ۱.۷ یك دستگاه فنر- جرم با دو درجهٔ آزادی

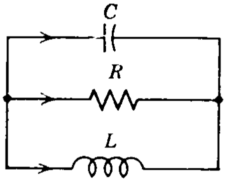
دوجرم مزبور روی سطحی بدون اصطکاك تحت تأثیـر نیروهای خارجی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ حرکت می‌کنند، و به‌سه فنرکـه ثابتهای آنهـا به‌ترتیب k_1، k_2 و k_3 است مقیدند. بـا استدلالی مشابه آنچه در بند ۷.۳ داشتیم برای x_1 و x_2، مختصات دوجرم مزبورمعادلات زیر به‌دست می‌آید

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_2(x_2-x_1)-k_1x_1+F_1(t)\\
&= -(k_1+k_2)x_1+k_2x_2+F_1(t),\\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2-k_2(x_2-x_1)+F_2(t)\\
&= k_2x_1-(k_2+k_3)x_2+F_2(t).
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

در مسئلهٔ ۶ چگونگی به‌دست آوردن معادلات (۲) طرح شده است.

به‌عنوان مثال دیگر، مدار موازی RLC راکـه در شکل ۲.۷ نشان داده شده است درنظرمی‌گیریم. اگر V افت ولتاژخازن و I جریان درخودالقا باشد، آنگاه بنابربند ۸.۳ و مسئلهٔ ۷ این بند، می‌توان نشان دادکه ولتاژ وجریان دراین مدارمطابق با دستگاه معادلات

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L},\\
\frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C}-\frac{V}{RC},
\end{aligned}
\tag{۳}
$$



شکل ۲.۷ یك مدارموازی شامل‌خازن، مقاومت و القایی

انجام می‌گیردکه در آن L ضریب القایی، C ظرفیت، و R مقاومت است.

به عنوان مثال آخر مسئلهٔ شکارگر- طعمه راکه یکی از مسائل اساسی اکولوژی ریاضی است بیان می‌کنیم. فرض‌کنیم $H(t)$ و $P(t)$ در زمان t جمعیت دو نوع جانور را نشان دهدکه یکی از آنها (P) از نوع دیگر (H) تغذیه می‌کند. به‌عنوان مثال، $P(t)$ و $H(t)$ می‌توانند به‌ترتیب نمایشگر تعداد روباه‌ها و خرگوشهای یك جنگل یا تعداد ماهیهای خاردار و ماهیهای قرمز (که به‌وسیلهٔ ماهیهای خاردار خورده می‌شوند) در یك برکه باشد. بدون وجود طعمه‌ها، شکارگران‌کاهش می‌یابند و بدون شکارگران، طعمه‌ها افزایش می‌یابند. برای بررسی کیفیت حفظ توازن اکولوژیکی در محیطی‌که هر دونوع وجود داشته باشند در سال ۱۹۲۵ لوتکا و ولترا[1] یك مدل ریاضی مطرح کردند. این مدل از دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dH}{dt}=a_1H-b_1HP,$$
$$\frac{dP}{dt}=-a_2P+b_2HP \qquad (۴)$$

تشکیل می‌گرددکه در آن ضریب a_1 میزان موالید جمعیت H ؛ و a_2 میزان مرگ ومیر جمعیت P است. b_1 و b_2 ضرایب تأثیر متقابل بین شکارگر و طعمه می‌باشند. معادلاتی به‌شکل (۴) راگاهی معادلات شکارگر- طعمه می‌نامند. در بند ۵.۹ به‌بررسی دقیق آنها خواهیم پرداخت.

مثالهای دیگری از دستگاههای معادلات دیفرانسیل‌مربوط به‌مدارهای الکتریکی‌در مسائل پایان این بند آمده است.

ارتباط مهمی بین معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ دلخواه ودستگاه معادلات وجود دارد. در واقع، یك معادلهٔ مرتبهٔ nام

---

۱. آلفرد ج. لوتکا (Alfred J. Lotka)، (۱۸۸۰–۱۹۴۹) یك بیوفیزیکدان آمریکایی بود. ویتو ولترا (Vito Volterra)، (۱۸۶۰–۱۹۴۰) ریاضیدان ایتالیایی بیشتربه‌خاطر پژوهشهایش در معادلات انتگرالی شهرت دارد (مسئلهٔ ۸ بند ۵.۶ را ببینید). وی نیزیکی از بنیانگذاران نظریهٔ جدید انتگرال‌گیری و آنالیزتابعی است.

$$y^{(n)}=F(t,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (۵)$$

را همواره می‌توان به‌یك دستگاه شامل n معادلهٔ مرتبهٔ اول که دارای شکل خاصی است تبدیل کرد. برای اثبات متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1=y\ ,\ x_2=y'\ ,\ x_3=y''\ ,\ \ldots\ ,\ x_n=y^{(n-1)} \qquad (۶)$$

آنگاه به‌آسانی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\ \vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \end{aligned} \qquad (۷)$$

وازمعادلهٔ (۵)

$$x_n'=F(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \qquad (۸)$$

معادلات (۷) و (۸) حالت خاصی از دستگاه کلیتر زیر است

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \\ x_2' &= F_2(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \\ &\ \vdots \\ x_n' &= F_n(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \end{aligned} \qquad (۹)$$

به‌طریق مشابه می‌توان دستگاههای (۱) و (۲) را نیز به دستگاههای معادلات مرتبهٔ اول به‌صورت (۹) تبدیل کرد، که به ترتیب شامل شش وچهارمعادله خواهند بود. دستگاههای (۳) و (۴) خود به صورت (۹) هستند. در واقع، دستگاههای به‌صورت (۹) تقریباً شامل تمام حالتهای جالب می‌باشند، و درنتیجه بخش اعظم نظریهٔ پیشرفته‌تر معادلات دیفرانسیل به‌این نوع دستگاهها اختصاص یافته است.

دستگاه معادلات (۹) را هنگامی روی فاصله $\alpha<t<\beta$ دارای جواب گویند که یك مجموعه از n تابع

$$x_1=\phi_1(t)\ ,\ \ldots\ ,\ x_n=\phi_n(t)$$

وجود داشته‌باشد، که درتمام نقاط $\alpha<t<\beta$ مشتق‌پذیر بوده و در دستگاه (۹) به‌ازای همهٔ نقاط این فاصله صدق کنند. علاوه بردستگاه معادلات دیفرانسیل مفروض، ممکن است شرایط اولیه‌ای به‌صورت زیر نیز داده شده باشد

$$x_1(t_0)=x_1^0\ ,\ x_2(t_0)=x_2^0\ ,\ \ldots\ ,\ x_n(t_0)=x_n^0 \qquad (۱۰)$$

که در آن t_0 مقدار خاصی از t واقع در $\alpha < t < \beta$ است، و اعداد x_1^0 ، . . . ، x_n^0 از پیش تعیین شده‌اند. معادلات دیفرانسیل (۹) وشرایط اولیهٔ (۱۰) بـا هم تشکیل یك مسئلهٔ مقدار اولیه می‌دهند.

به‌منظور آنکه بـرای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۹) و (۱۰) یك جواب یکتا تضمین شود، لازم است برتوابع F_1 ، F_2 ، . . . ، F_n شرایطی اعمال گردد. قضیهٔ زیر مشابـه قضایای وجود ویکتایی جواب درمورد معادلات مرتبهٔ اول و دوم است که به‌ترتیب درقضایای ۲.۲ و ۱.۳ آمده است.

قضیهٔ ۱.۷. فـرض کنیم هـر یـك از تـوابع F_1 ، . . . ، F_n و مشتقهای جـزئی $\partial F_1/\partial x_1$ ، . . . ، $\partial F_1/\partial x_n$ ، . . . ، $\partial F_n/\partial x_1$ ، . . . ، $\partial F_n/\partial x_n$ دریك ناحیهٔ R ، از فضای $tx_1x_2 \ldots x_n$ ، کـه شامل نقطهٔ $(t_0 , x_1^0 , x_2^0 , \ldots , x_n^0)$ بـاشد پیوسته است. آنگاه یك فاصلهٔ $|t-t_0| < h$ وجود دارد که درآن دستگاه معادلات دیفرانسیل (۹) دارای جواب یکتای $x_1 = \phi_1(t)$ ، . . . ، $x_n = \phi_n(t)$ است، کـه درشرایط اولیهٔ (۱۰) نیز صدق می‌کند.

این قضیه را می‌توان بـا تعمیم استدلال مـذکور در بند ۱۱.۲ ثابت کـرد، امـا دراینجا به‌بیان آن نمی‌پردازیم. اما، به‌این‌نکته توجه شود که دربارهٔ مشتقهای جزئی‌توابع F_1 ، F_2 ، . . . ، F_n نسبت به t درفرض قضیه چیزی بیان نشده‌است. علاوه براین درقسمت حکم، طول $2h$، فاصله‌ای‌که درآن جواب وجود دارد، دقیقاً مشخص نیست، و دربرخی از حالتها ممکن است بسیارکوتاه باشد. بالاخره، شرایط مذکور برای تأمین نتیجه کافی‌انـد نه لازم وقضیه به‌کلیترین صورتی‌که می‌شناسیم بیان نشده است.

اگـر هـریك از توابع F_1 ، . . . ، F_n در معادلات (۹) تابعی خطی ازمتغیرهـای x_1 ، . . . ، x_n باشند، آنگاه دستگاه معادلات مزبور را خطی می‌نامند. درغیر این صورت ناخطی است. بدین‌سان‌کلیترین دستگاه n معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

اگر هریك ازتوابع g_1 ، . . . ، g_n متحداً برابر صفرباشند، آنگاه دستگاه (۱۱) را همگن می‌نامند؛ درغیر این صورت ناهمگن است. ملاحظه شودکه دستگاههای (۲) و (۳) هردو خطی‌اند؛ دستگاه (۲) ناهمگن است مگر آنکه $F_1(t) = F_2(t) = 0$ ، امـا دستگاه (۳) همگن است. دستگاه (۴) ناخطی است. دستگاه (۱) بسته به نوع توابع F_1 ، F_2 و F_3 یا خطی است ویا ناخطی.

درمورد دستگاه خطی (۱۱) قضیهٔ وجود ویکتایی ساده‌تـر و دارای نتیجه‌ای قویتر است، ومشابه قضایای ۱.۲ و ۲.۳ می‌باشد.

قضیهٔ ۲.۷. اگرتوابع p_{11} ، . . . ، p_{nn} ، g_1 ، . . . ، g_n روی فاصلهٔ باز $\alpha < t < \beta$،

که شامل نقطهٔ $t=t_{\circ}$ است، پیوسته باشند، آنگاه یك جواب یکتای $x_{۱}=\phi_{۱}(t)$ ، . . . ، $x_n=\phi_n(t)$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۱) وجود دارد، کـه درشرایط (۱۰) صدق می‌کند. این جواب درتمام فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ معتبر است.

توجه شود که برخلاف وضعیت دستگاه ناخطی، وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی درتمام فاصله‌ای که در آن فرضها صادق‌اند محقق است. علاوه براین، درمورد یك دستگاه خطی مقادیـر اولیهٔ $x_{۱}^{\circ}$ ، . . . ، x_n° در $t=t_{\circ}$ کاملاً دلخواه‌اند، درحالی کـه برای حالت ناخطی نقطهٔ اولیه باید درناحیهٔ R که درقضیهٔ ۱.۷ تعریف شد واقع باشد.

این فصل بـه دستگاههای معادلات خطی مرتبهٔ اول اختصاص دارد (دستگاههـای ناخطی را درضمن فصول ۸ و ۹ مورد بحث قرار خواهیم داد). با به‌کارگرفتن برخی از نتایج نظریهٔ ماتریسها مطالب بـه سودمندترین وجه بیان می‌شود، و ازآغاز بند ۳.۷، بقیهٔ این فصل مبتنی براستفاده ازماتریسها است. نکات لازم دربارهٔ ماتریسها را دربندهای ۳.۷ و۴.۷ **خلاصه کرده‌ایم.** برای خوانندگانی که کاملاً با نظریـهٔ ماتریسها بیگانه‌اند، بند ۲.۷ شامل بحثی از روشهای مقدماتی حذف است که با آن می‌توان دستگاه معادلات را به یك معادله ازمرتبهٔ بالاتر تبدیل کـرد. این روش اساس مناسبی برای بحث کلی دستگاههـای خطی فراهم نمی‌کند، اما گاهی به عنوان وسیلهٔ حل دستگاههای دو یا سه معادله‌ای کاملاً مفید است.

مسائل

۱. هریك از دستگاههای (۱) و (۲) را به‌یك دستگاه معادلات مرتبهٔ اول به‌صورت (۹) تبدیل کنید.

۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u''+p(t)u'+q(t)u=g(t)\ ,\ u(\circ)=u_{\circ}\ ,\ u'(\circ)=u'_{\circ}$$

را درنظر می‌گیریم. این مسئله را به‌یك مسئلهٔ مقدار اولیهٔ متشکل از دومعادلـهٔ خطی مرتبهٔ اول تبدیل کنید.

۳. نشان دهید که اگر $a_{۱۱}$ ، $a_{۱۲}$ ، $a_{۲۱}$ ، و $a_{۲۲}$ مقادیری ثابت باشند، و $a_{۱۲}$ و $a_{۲۱}$ توأماً صفر نباشند، واگر توابع $g_{۱}$ و $g_{۲}$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را

$$x'_{۱}=a_{۱۱}x_{۱}+a_{۱۲}x_{۲}+g_{۱}(t)\ ,\qquad x_{۱}(\circ)=x_{۱}^{\circ}$$

$$x'_{۲}=a_{۲۱}x_{۱}+a_{۲۲}x_{۲}+g_{۲}(t)\ ,\qquad x_{۲}(\circ)=x_{۲}^{\circ}$$

می‌توان به‌یك مسئلهٔ مقداراولیه درمورد یك معادلهٔ مرتبهٔ دوم تبدیل کرد. آیا می‌توان همین روش را هنگامی که $a_{۱۱}$ ، . . . ، $a_{۲۲}$ توابعی از t باشند اجرا کرد؟

۴. دستگاه خطی همگن

$$x'=p_{۱۱}(t)x+p_{۱۲}(t)y$$

$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y$$

را درنظرمی‌گیریم. نشان دهیدکه‌اگر $x = x_1(t)$، $y = y_1(t)$ و $x = x_2(t)$، $y = y_2(t)$ دوجواب دستگاه مزبور باشند، آنگاه

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \ , \ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

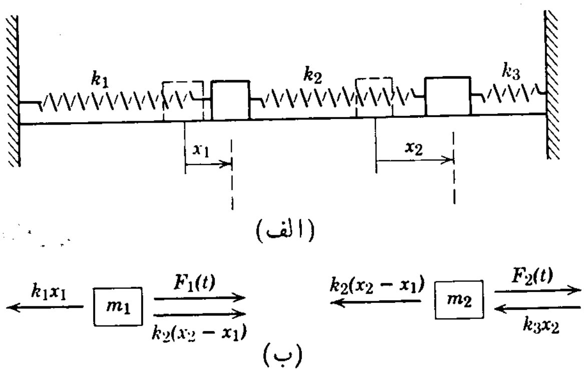
نیز به‌ازای ثابتهای دلخواه c_1 و c_2 يك جواب‌است. این خاصیت همان اصل انطباق‌است.

۵. فـرض کنیم $x = x_1(t)$، $y = y_1(t)$ و $x = x_2(t)$، $y = y_2(t)$ دو جواب دستگاه خطی ناهمگن زیر باشند

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t)$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t)$$

نشان دهیدکـه $x = x_1(t) - x_2(t)$ ، $y = y_1(t) - y_2(t)$ يك جواب دستگاه همگن متناظر است.

۶. معادلات (۲) را می‌توان با ترسیم يك نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر بر هرجـرم درآن نشان داده شده است، بـه دست آورد. شکل ۳.۷ (الف) این وضعیت را هنگامی‌که تغییرمکانهـای x_1 و x_2 مربوط بـه هردو جرم مثبت‌اند (بـه‌طرف راست) و $x_2 > x_1$ نشان می‌دهـد. فنرهای ۱ و ۲ منبسط گردیده وفنر ۳ منقبض شده‌است وبدین‌سان نیروهایی پدید آمـده است کـه درشکل ۳.۷ **(ب)** دیده می‌شود.با استفاده ازقانون نیوتن $(F = ma)$ معادلات (۲) را به دست آورید.



شکل ۳.۷

مدارهای الکتریکی. نظریه مـدارهای الکتریکی، مانند آنچه درشکل ۲.۷ نشان داده شده است، متشکل از خودالقاهـا، مقاومتها، و خـازنهـا، برقوانین کیرشهف مبتنی

است: (۱) جریان خالص درهر گره (یا اتصال) صفر است، (۲) افت خالص ولتاژ درطول هرحلقهٔ بسته صفر است. علاوه برقوانین کیرشهف روابط بین جریان I برحسب آمپر وافت ولتاژ V برحسب ولت درهریك از اجزاء مدار بهصورت زیر وجود دارد

$$V=RI; \quad R= \text{مقاومت برحسب اهم}$$

$$C\frac{dV}{dt}=I; \quad C= \text{ظرفیت برحسب فاراد}$$

$$L\frac{dI}{dt}=V; \quad L= \text{ضریب القا برحسب هنری}$$

قوانین کیرشهف و رابطهٔ جریان-ولتاژ بـرای هرجزء مدار یك دستگاه جبری و معادلات دیفرانسیل فراهم می‌سازد وبدین وسیله ولتاژ وجریان را می‌توان درسراسر مدار تعیین کرد. مسائل ۷ تا ۹ این روش را توضیح می‌دهند.

۷. مداری راکه درشکل ۲.۷ نشان داده شده‌است درنظرمی گیریم. جریان درخازن، مقاومت، والقایی را به‌ترتیب با I_1، I_2 و I_3 وافت ولتاژهای‌متناظر را با V_1، V_2 و V_3 نشان می‌دهیم. جهت مثبت جریانها وافت ولتاژها را به‌دلخواه انتخاب کرده‌ایم وآنها را با پیکان نشان داده‌ایم.

(الف) بااعمال قانون دوم کیرشهف درمورد حلقهٔ فوقانی مدار مزبور نشان دهیدکه

$$V_1-V_2=0 \qquad \text{(یك)}$$

و به‌طریق مشابه

$$V_2-V_3=0 \qquad \text{(دو)}$$

(ب) با اعمال قانون اول کیرشهف درمورد یکی از دو گره مدار، نشان دهیدکه

$$I_1+I_2+I_3=0 \qquad \text{(سه)}$$

(ج) با استفاده از رابطهٔ جـریان-ولتاژ درهریك ازاجزاء مدار معادلات زیـر را به دست آورید

$$CV_1'=I_1, \quad V_2=RI_2, \quad LI_3'=V_3 \qquad \text{(چهار)}$$

(د) باحذف V_2، V_3، I_1 و I_2 درمعادلات (یك) تا (چهار) روابط زیر را به‌دست آورید

$$CV_1'=-I_3-\frac{V_1}{R}, \quad LI_3'=V_1 \qquad \text{(پنج)}$$

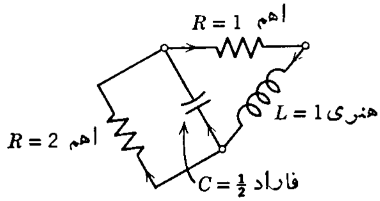
چنانکه دیده می‌شوداگر از اندیسهای‌معادلات (پنج) صرف‌نظر کنیم، آنگاه دستگاه (۳)ی

متن حاصل می‌گردد.

۸. مداری را که درشکل ۴.۷ نشان داده شده است درنظر می‌گیریم. با استفاده از روشی که درمسئلهٔ ۷ طرح‌شد، نشان دهید که‌جریان I درخودالقا و ولتاژ V درخازن دردستگاه معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$\frac{dI}{dt} = -I - V\,,$$

$$\frac{dV}{dt} = ۲I - V\,.$$

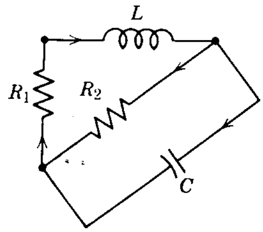


شکل ۴.۷

۹. مداری را که درشکل ۵.۷ نشان داده شده است درنظر می‌گیریم. با استفاده از روشی که درمسئلهٔ ۷ طرح‌شد، نشان دهید که‌جریان I درخودالقا و ولتاژ V درخازن دردستگاه معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$L\frac{dI}{dt} = -R_۱ I - V,$$

$$C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_۲}\,.$$



شکل ۵.۷

۲.۷ حل دستگاههای خطی با روش حذفی

ابتدایی‌ترین‌روش‌حل دستگاه‌معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت همانا روش مستقیم حذف است. یعنی، به‌منظور به‌دست‌آوردن یك معادله ازمرتبهٔ بالاتر که فقط‌شامل یك تابع مجهول باشد، متوالیاً به حذف توابع می‌پردازیم. پس ازحل این معادلـه توابع دیگر را می‌توان به‌نوبه‌خود به‌دست آورد.

این روش درمورد دستگاههایی‌که تنها از دو یا سه معادلهٔ مرتبهٔ اول تشکیل شده‌اند کاملاً کارگر است، این روش را می‌توان درمورد دستگاههـا خواه ناهمگن خواه همگن به‌کار برد، درمورد برخی ازمسائل شامل دستگاههای معادلات دیفرانسیل از مـرتبهٔ بالاتر نیز سودمند است. امـا روش حذف برای بحث نظری وبرای حل دستگاههـای بزرگتر مناسب نیست.

برای توضیح روش حذف دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

را درنظر می‌گیریم. معادلهٔ اول را نسبت به x_2 حل می‌کنیم

$$x_2 = x_1' - x_1 \qquad (2)$$

درنتیجه $x_2' = x_1'' - x_1'$، وازمعادلهٔ دوم پس ازساده‌کردن به دست می‌آید

$$x_1'' - 2x_1' - 3x_1 = 0 \qquad (3)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۳) عبارت است از

$$x_1 = \phi_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \qquad (4)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهند. ازمعادلهٔ (۲) فوراً نتیجه می‌شودکه

$$x_2 = \phi_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} \qquad (5)$$

جواب دستگاه (۱) متشکل ازمعادلات (۴) و (۵) شامل دو ثابت دلخواه است. به‌آسانی ثابت می‌شودکه می‌توان ثابتهای مزبور را به‌ازای شرایط اولیهٔ داده شده درهر نقطه تعیین‌کرد. بنابراین هرجواب دستگاه (۱) را می‌توان به‌ازای مقادیر مناسب c_1 و c_2 به‌صورت (۴) و (۵) نوشت. بدین‌سان معادلات (۴) و (۵) جواب عمومی دستگاه (۱) را تشکیل می‌دهند. خواننده می‌تواند تحقیق‌کندکه اگر به جای x_2 تابع x_1 را ازمعادلات (۱) حذف کنیم بازهم همین جواب به‌دست می‌آید.

همین روش را می‌توان درمورد دستگاه ناهمگن

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + g_1(t) \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + g_2(t) \end{aligned} \qquad (6)$$

به‌کار برد. تنها اختلاف آن است‌که دراینجا $x_2 = x_1' - x_1 - g_1(t)$، ومعادلهٔ مرتبهٔ دوم (۳) مربوط به x_1 به‌صورت یك معادلهٔ ناهمگن درمی‌آید.

چنانکه درپیش گفته شد، روش حذف را می‌توان برای حل دستگاههای معادلات مرتبهٔ بالاتر نیز به‌کار گرفت. این قبیل دستگاهها طبعاً درکاربردهای مختلف مطرح می‌شود؛ همچنین وقتی روش حذف را درمورد دستگاهی‌که بیش از دومعادلهٔ مرتبهٔ اول دارد به‌کار گیریم به‌این نوع دستگاهها برمی‌خوریم.

بدین‌سان دستگاه

$$\begin{aligned} L_1[x_1] + L_2[x_2] &= g_1(t) \\ L_3[x_1] + L_4[x_2] &= g_2(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

را درنظر می‌گیریم. L_1، L_2، L_3 و L_4 عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب ثابت

می‌باشند، و لزومی ندارد که ازمرتبهٔ اول باشند، و g_1 و g_2 توابعی مفروضند. مثلاً، فرض کنیم که L_1 عملگر دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم

$$L_1[x]=ax''+bx'+cx \tag{۸}$$

باشد. برای آسانی قرار می‌دهیم $D=d/dt$، ومعادلهٔ (۸) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$L_1[x]=(aD^2+bD+c)x \tag{۹}$$

قبل ازادامه بحث لازم است به‌بررسی معنی عباراتی ازقبیل $L_2L_1[x]$ که معرف اعمال متوالی عملگرهای L_1 و L_2 به‌تابع x است بپردازیم. به‌عنوان مثال فرض‌کنیم که

$$L_1[x]=(aD+b)x \tag{۱۰}$$

و

$$L_2[x]=(cD+d)x \tag{۱۱}$$

که درآن a، b، c و d مقادیر ثابت‌اند. آنگاه $L_2L_1[x]$ به‌صورت زیر تعیین می‌گردد

$$\begin{aligned} L_2L_1[x]&=cD[(aD+b)x]+d[(aD+b)x] \\ &=caD^2x+cbDx+daDx+dbx \\ &=[caD^2+(cb+da)D+db]x \end{aligned} \tag{۱۲}$$

توجه شود که معادلهٔ (۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$L_2L_1[x]=[(cD+d)(aD+b)]x \tag{۱۳}$$

که درهنگام بسط طرف دوم با D همانند یک‌کمیت جبری عمل می‌شود. به‌طریق مشابه

$$\begin{aligned} L_1L_2[x]&=aD[(cD+d)x]+b[cD+d)x] \\ &=[acD^2+(ad+bc)D+bd]x \end{aligned} \tag{۱۴}$$

ازمعادلات (۱۲) و (۱۴) به‌وضوح دیده می‌شود که

$$L_2L_1[x]=L_1L_2[x] \tag{۱۵}$$

یعنی، L_1 و L_2 خاصیت جابه‌جایی دارند. می‌توان نشان داد که خاصیت جابه‌جایی نه تنها درمورد عملگرهای L_1 و L_2 که با روابط (۱۰) و (۱۱) تعریف شده‌اند بلکه برای هردو عملگرخطی دیفرانسیلی L_1 و L_2 که دارای ضرایب ثابت (و ازهرمرتبه‌ای) باشند برقرار است. ازطرف دیگر، عملگرها با ضرایب متغیر عموماً دارای خاصیت جابه‌جایی نیستند (مسئلهٔ ۲۲).

به دستگاه (۷) برمی‌گردیم، به‌آسانی می‌توان یکی از دوتابع x_1 یا x_2 را حذف

کرد. برای حذف x_1 کافی است L_3 را به معادلهٔ اول، L_1 را بهمعادلهٔ دوم، اعمال کرده و آنگاه اولی را از دومی کم کنیم. بدین‌سان

$$L_3L_1[x_1]+L_3L_2[x_2]=L_3[g_1] \qquad (۱۶)$$

$$L_1L_3[x_1]+L_1L_4[x_2]=L_1[g_2] \qquad (۱۷)$$

واز تفریق معادلهٔ (۱۶) ازمعادلهٔ (۱۷) به دست می‌آید

$$L_1L_4[x_2]-L_3L_2[x_2]=L_1[g_2]-L_3[g_1] \qquad (۱۸)$$

معادلهٔ (۱۸) شامل x_1 نیست ومی‌توان آن را با روشهای معمول حل کرد. همین‌که x_2 از معادلهٔ (۱۸) به‌دست آمد، x_1 را می‌توان با حل هریك ازمعادلات (۷) تعیین کرد. امکان دیگر نخست حذف x_2 با روشی مشابه از دستگاه است. توجه شودکه برای استفاده ازاین روش لازم‌است توابع g_1 و g_2 به‌قدر کافی دارای مشتق باشند تابتوان عبارتهای $L_1[g_2]$ و $L_3[g_1]$ موجود درمعادلهٔ (۱۸) را محاسبه کرد.

به‌طور کلی، تعدادی ثابتهای زاید درطول این روش وارد می‌شوند. درحل معادلهٔ (۱۸)، تعداد ثابتهای دلخواه موجود درجواب x_2 برابر با مرتبهٔ[۱] عملگر $L_1L_4-L_3L_2$ خواهد بود. ثابتهای اضافی درهنگام تعیین x_1 با حل یکی ازمعادلات (۷)، وارد می‌شوند. تعیین روابط بین ثابتها وحذف ثابتهای زاید، با جایگزینی x_1 و x_2 درمعادلهٔ دیگر (۷) که برای‌یافتن x_1 به‌کار نرفته است انجام می‌گیرد. این‌نکته را درمثال زیر توضیح داده‌ایم.

این مسئله راکه چه تعداد ثابتهای دلخواه باید درجواب عمومی دستگاه (۷) وجود داشته باشد می‌توان به‌طریق زیر جواب گفت. اگر دستگاه (۷) ساده شده و به یك دستگاه معادلات مرتبهٔ اول تبدیل شود، آنگاه تعداد ثابتهای مستقل درجواب عمومی برابر باتعداد معادلات دستگاه خواهد بود. این نکته دربند ۵.۷ اثبات می‌شود. با حذف x_1، یك معادله به دست می‌آیدکه مرتبهٔ آن همان مرتبهٔ عملگر $L_1L_4-L_3L_2$ است. این معادلهٔ اخیر را می‌توان به‌نوبهٔ خود به‌یك دستگاه معادلات مرتبهٔ اول تبدیل کردکه تعداد معادلات آن با مرتبهٔ $L_1L_4-L_3L_2$ برابر باشد. بدین‌سان منطقاً می‌توان انتظار داشت‌که تعداد ثابتهای مستقل دلخواه درجواب عمومی دستگاه (۷) برابر با مرتبهٔ $L_1L_4-L_3L_2$ باشد، مشروط به‌آنکه $L_1L_4-L_3L_2$ صفر نباشد، وصحت این حدس را می‌توان اثبات کرد. با استفاده ازاین مطلب می‌توان صحت تعداد ثابتهای دلخواه موجود درجواب نهایی را امتحان کرد. این نتیجه را می‌توان به دستگاههای بزرگتر معادلات تعمیم داد (مسئلهٔ ۲۳ را ببینید).

---

۱. مقصود از مرتبهٔ $L_1L_4-L_3L_2$ بزرگترین مرتبهٔ مشتق موجود درآن است. اگر $L_1L_4-L_3L_2$ صفر باشد، دستگاه (۷) را **تبهگن** نامند. دراین حالت ممکن است تعداد جوابها نامتناهی ویا صفر باشد، برحسب آنکه طرف دوم معادله (۱۸) صفر شود یا نه (مسائل ۱۸ تا ۲۱ را ببینید). این وضعیت همانند وضعیت یك دستگاه معادلات جبری خطی است‌که دترمینان ضرایب آن صفر باشد.

مثال. مطلوب است تعیین جواب عمومی دستگاه زیر

$$(x_1''+x_1'-x_1)+(x_2''-3x_2'+2x_2)=0 \qquad (19)$$

$$(x_1'+2x_1)+\qquad(2x_2'-4x_2)=0 \qquad (20)$$

دراین حالت $L_1[x_1]=(D^2+D-1)x_1$ ، $L_2[x_2]=(D^2-3D+2)x_2$ ، $L_3[x_1]=(D+2)x_1$ ، و $L_4[x_2]=(2D-4)x_2$. بـا اعمال L_4 و L_1 به ترتیب به معادلات (۱۹) و (۲۰)، وتفریق نتایج، خواهیم داشت

$$(L_1L_4-L_3L_2)[x_2]$$
$$=[(D^2+D-1)(2D-4)-(D+2)(D^2-3D+2)]x_2=0$$

یا

$$(D^3-D^2-2D)x_2=0 \qquad (21)$$

بدین‌سان جواب عمومی دستگاه (۱۹)، (۲۰) بـاید شامل سه ثابت دلخواه باشد. جواب عمومی معادلهٔ (۲۱) چنین است

$$x_2=\phi_2(t)=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-t} \qquad (22)$$

با جایگزینی این عبارت به‌جای x_2 درمعادلهٔ (۲۰) خواهیم داشت

$$x_1'+2x_1=4c_1+6c_3e^{-t} \qquad (23)$$

که جواب عمومی آن عبارت است از

$$x_1=\phi_1(t)=2c_1+6c_3e^{-t}+c_4e^{-2t} \qquad (24)$$

برای حذف ثابتهای زایـد، x_1 و x_2 را درمعادلهٔ (۱۹) قـرار می‌دهیم، به‌دست می‌آیـد $c_4=0$. توجه شود که اگر x_2 را درمعادلهٔ (۱۹) قرار می‌دادیم وسپس ازحل معادلهٔ مرتبهٔ دوم حاصل x_1 را به دست می‌آوردیم، دو ثابت اضافی، بـه‌جای یکی، وارد می‌شد. این ثابتهای اضافی با جایگزینی x_1 و x_2 درمعادلهٔ (۲۰) حذف خواهند شد.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۱۱ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید.

۱.
$$x_1'=x_1+x_2$$
$$x_2'=4x_1-2x_2$$

۲.
$$x_1'=x_1+x_2+2e^t$$
$$x_2'=4x_1+x_2-e^t$$

۳. $x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \sin 2t, \quad x_1(0) = 0$
$x_2' = x_1 - 2x_2 + t, \quad x_2(0) = 1$

۴. $x_1' = x_1 - x_2 - t^2$
$x_2' = x_1 + 3x_2 + 2t$

۵. $x_1' = 3x_1 - 4x_2 + e^t, \quad x_1(0) = 1$
$x_2' = x_1 - x_2 - e^t, \quad x_2(0) = -1$

۶. $x_1' = 4x_1 - 2x_2 + 2t$
$x_2' = 8x_1 - 4x_2 + 1$

۷. $x_1' = 3x_1 - 2x_2 - e^{-t}\sin t$
$x_2' = 4x_1 - x_2 + 2e^{-t}\cos t$

۸. $x_1' = x_1 - 5x_2, \quad x_1(0) = 1$
$x_2' = 2x_1 - 5x_2, \quad x_2(0) = 0$

۹. $x_1' = x_1$
$x_2' = -x_2 + \sqrt{2}\,x_3$
$x_3' = \sqrt{2}\,x_2$

۱۰. $x_1' = x_1 - x_2 + 4x_3$
$x_2' = 3x_1 + 2x_2 - x_3$
$x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3$

۱۱. $x_1' = x_1 + x_2 + x_3$
$x_2' = 2x_1 + x_2 - x_3$
$x_3' = -8x_1 - 5x_2 - 3x_3$

۱۲. مسئله‌ای راکه با معادلات (۱۹) و (۲۰) درمثال طرح شد با جایگزینی x_2 از رابطهٔ (۲۲) درمعادله (۱۹) حل کنید.

درهریك ازمسائل ۱۳ تا ۱۷ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید. توجه شودکه درجواب عمومی به‌تعداد لازم، ثابتهای دلخواه موجود باشد.

۱۳. $(D^2-3D+2)x_1+(D-1)x_2=0$
$(D-2)x_1+(D+1)x_2=0$

۱۴. $(2D+1)x_1+Dx_2=t$
$(D-1)x_1+Dx_2=2$

۱۵. $(D^2-4D+4)x_1+3Dx_2=1$
$(D-2)x_1+(D+2)x_2=0$

۱۶. $D^2x_1+(D+1)x_2=0$
$(D-1)x_1+x_2=\sin t$

۱۷. $(D^2-4D+4)x_1+(D^2+2D)x_2=0$
$(D^2-2D)x_1+(D^2+4D+4)x_2=0$

درهریك ازمسائل ۱۸ تا ۲۱ نشان دهیدکه دستگاه معادلات داده شده تبهگن است. با اقدام به حل دستگاه مشخص کنیدکـه آیا دستگاه فاقد جواب است یـا دارای بینهایت جواب می‌باشد.

۱۸. $Dx_1+(D+1)x_2=t$
$Dx_1+(D+1)x_2=t+2$

۱۹. $(D+2)x_1+(D+2)x_2=e^{2t}$
$(D-2)x_1+(D-2)x_2=e^{-2t}$ راهنمایی: قرار دهید $u=x_1+x_2$

۲۰. $(D^2-1)x_1+(D-1)x_2=\sin t$
$(D+1)x_1+x_2=2e^t$

۲۱. $(D^2+3D+2)x_1+(D^2+2D)x_2=0$
$(D+1)x_1+Dx_2=0$

۲۲. عملگرهای‌خطی دیفرانسیلی با ضرایب متغیر عموماً خاصیت جابه‌جایی ندارند. عملگرهای

$$L_1[x]=x'+tx,\quad L_2[x]=x'+t^2x$$

را درنظر می‌گیریم. نشان دهیدکه

$$L_1L_2[x]=L_1\{L_2[x]\}=x''+(t^2+t)x'+(2t+t^3)x$$

و

$$L_2L_1[x]=L_2\{L_1[x]\}=x''+(t+t^2)x'+(1+t^3)x$$

از آنجا

$$L_1L_2[x]\neq L_2L_1[x]$$

۲۳. دستگاه معادلات زیر را درنظر می‌گیریم

$$L_{11}[x_1]+L_{12}[x_2]+L_{13}[x_3]=g_1(t)$$
$$L_{21}[x_1]+L_{22}[x_2]+L_{23}[x_3]=g_2(t)$$
$$L_{31}[x_1]+L_{32}[x_2]+L_{33}[x_3]=g_3(t)$$

که در آن L_{11}، . . . ، L_{33} عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب ثابت‌اند، اما لزوماً ازمرتبهٔ اول نیستند. می‌توان نشان دادکه مرتبهٔ این دستگاه، یعنی، تعداد ثابتهای دلخواه موجود درجواب عمومی، برابر است با مرتبهٔ عملگر L که با

$$L=\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33}\end{vmatrix}$$

تعریف می‌شود. درمحاسبهٔ این دترمینان، L_{11}، . . . ، L_{33} را به‌عنوان چندجمله‌ای از عملگر D درنظر می‌گیریم و به‌طور صوری از روش بسط دترمینان استفاده می‌کنیم. مطلوب است تعیین مرتبهٔ هریك از دستگاههای زیر

(الف)

$$\begin{aligned}(D^2+1)x_1+(D^2+2)x_2 \qquad\qquad &=0\\ (D-1)x_2+(D^2-2)x_3&=0\\ D^2x_1 \qquad\qquad -(D^3+1)x_3&=0\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}(D+1)x_1+Dx_2+(D^2+1)x_3&=0\\ (D^2+2D+2)x_1+(D-1)x_2+(D+2)x_3&=2te^t\\ (D-2)x_1+(D+3)x_2+(D^2+3D)x_3&=te^{2t}\end{aligned}$$

۳.۷ یادآوری مبحث ماتریسها

گرچه روش حذف که دربند اخیر موردبحث قرارگرفت اغلب برای حل دستگاههای خطی معادلات دیفرانسیل که تعداد معادلات آنها اندك باشد، رضایت‌بخش است اما هنگامی که با دستگاههای بزرگتر سروکار پیدا کنیم استفاده ازاین روش دشوارمی‌گردد. نکتهٔ مهمتر آنکه روش مزبور مبانی مناسبی برای بسط منطقی نظریهٔ وابسته به‌این نوع معادلات را به‌دست

نمی‌دهد. به این دو دلیل لازم است برخی ازنتایج ماتریسی مربوط به مسئلهٔ مقدار اولیه را درمورد یك دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل به‌کار بریم. به منظور سهولت مراجعه در این دوبند خلاصهٔ[1] نکاتی را که خواننده بعداً بدانها نیاز خواهد داشت می‌آوریم. فرض برآن است که خواننده با مبحث دترمینان وطرز محاسبهٔ آنها آشناست.

ماتریسها را با حروف بزرگ سیاه $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، ... وگاهی با حروف بزرگ سیاه‌یونانی $\mathbf{\Phi}$، $\mathbf{\Psi}$، ... نشان خواهیم داد. یك ماتریس $\mathbf{A}$ ازیك جدول مستطیلی اعداد یا عناصر تشکیل می‌شودکه در m سطر و n ستون مرتب شده‌اند، یعنی،

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\mathbf{A}$ را یك ماتریس $m\times n$ می‌نامیم. گرچه بعداً دراین فصل عناصر برخی ازماتریسها را اعداد حقیقی می‌گیریم، اما دراین بند امکان آن‌را که عناصر ماتریس اعداد مختلط باشند درنظر گرفته‌ایم. عنصر واقع درسطر i ام وستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهند، اندیس اول نمایشگر سطر واندیس دوم نمایشگر ستون آن است. گاهی علامت (a_{ij}) برای نشان‌دادن ماتریس با عنصر عمومی a_{ij} به‌کار رفته است.

به هر ماتریس $\mathbf{A}$ یك ماتریس $\mathbf{A}^T$ موسوم به ترانهادهٔ $\mathbf{A}$ که ازتعویض سطرها و ستونها به یکدیگر حاصل می‌شود متناظر است. بدین‌سان، اگر $\mathbf{A}=(a_{ij})$، آنگاه $\mathbf{A}^T=(a_{ji})$. همچنین، مزدوج عدد مختلط a_{ij} را با $\bar{a}_{ij}$، وماتریس حاصل از $\mathbf{A}$ با تبدیل هرعنصر a_{ij} به مزدوجش $\bar{a}_{ij}$ را با $\overline{\mathbf{A}}$ نشان می‌دهند. ماتریس $\overline{\mathbf{A}}$ را مزدوج $\mathbf{A}$ می‌نامند، و نیزلازم می‌آیدکه ترانهادهٔ ماتریس مزدوج $\overline{\mathbf{A}}^T$ را درنظربگیریم. این ماتریس راالحاقی $\mathbf{A}$ می‌نامند وبا $\mathbf{A}^*$ نشان می‌دهند.

به عنوان مثال، فرض‌کنیم

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}$$

---

۱. اسامی برخی ازکتب جبر ماتریسی را به‌عنوان نمونه درپایان این فصل آورده‌ایم.

انواع خاصی ازماتریسهاکه دراینجا بیشتر مورد توجه‌اند عبارتند از: ماتریسهای مربع، یعنی ماتریسهایی که تعداد سطرهـا وستونهای آنها برابر است، $m=n$؛ وبردارها (یا بردارهای ستونی)، که می‌توان آنها را به عنوان ماتریسهای $n \times 1$، یعنی ماتریسهایی که تنها دارای یك ستون‌انـد تلقی کرد. ماتریسهای مربع راکه n سطر و n ستون دارند، ماتریسهای‌رستهٔ n می گویند. بردارهای (ستونی) را باحروف کوچك سیاه $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، $\boldsymbol{\xi}$، $\boldsymbol{\eta}$، ... نشان می‌دهیم. $\mathbf{x}^T$ **ترانهادهٔ**یك بردار ستونی $n \times 1$، یك بردار سطری $1 \times n$ است؛ یعنی، ماتـریسی است متشکل از یك سطرکه عناصر آن همان عناصر $\mathbf{x}$ در موضع‌های متناظر می‌باشند.

خواص جبری

۱. تساوی. $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، دوماتریس $m \times n$ را هنگامی مساوی گویندکه عناصر متناظر آنها با هم مساوی باشد؛ یعنی، هنگامی‌که به‌ازای هر i و j داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$.

۲. صفر. نماد $\mathbf{0}$ برای نمایش ماتریس یا برداری‌که هریك ازعناصر آن صفر است به‌کار می‌رود.

۳. جمع. مجموع دوماتریس $m \times n$ با ماتریسی تعریف می‌شودکـه هرعنصر آن مجموع دوعنصر متناظر است:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \qquad (۲)$$

بنا براین تعریف، جمع ماتریسی جابه‌جایی وشرکت‌پذیر است

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \qquad (۳)$$

۴. ضرب دریك عدد. ضرب ماتریس $\mathbf{A}$ دریك عدد مختلط α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha\mathbf{A}=\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij}) \qquad (۴)$$

قانونهای توزیع‌پذیری

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}, \quad (\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} \qquad (۵)$$

برای این نوع ضرب برقرارنـد. به ویژه، منفی $\mathbf{A}$ کـه آن را بـا $-\mathbf{A}$ نشان می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$-\mathbf{A}=(-۱)\mathbf{A} \qquad (۶)$$

۵. تفریق. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ تفاضل دوماتریس $m \times n$ با

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \qquad (۷)$$

تعریف می‌شود. بدین‌سان

$$(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij}) \qquad (۸)$$

که مشابه رابطهٔ (۲) است.

۶. ضرب. $\mathbf{AB}$ حاصل‌ضرب دوماتریس هنگامی معین است که تعداد ستونهای سازهٔ اول با تعداد سطرهای سازهٔ دوم برابر باشد. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌ترتیب ماتریسهای $m\times n$ و $n\times r$ باشند، آنگاه حاصل‌ضرب $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ یك ماتریس $m\times r$ است. عنصر سطر iام و ستون jام $\mathbf{C}$ ازضرب هرعنصرسطر iام $\mathbf{A}$ درعنصرمتناظرستون jام $\mathbf{B}$ وجمع حاصل‌ضربها به‌دست می‌آید. به‌طور نمادی،

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{۹}$$

با محاسبهٔ مستقیم می‌توان نشان داد که ضرب ماتریسی درقانون شرکت‌پذیری

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{۱۰}$$

وقانون توزیع‌پذیری

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC} \tag{۱۱}$$

صدق می‌کند. اما، به طور کلی ضرب ماتریسی جابه‌جایی نیست. برای آنکه هردو حاصل‌ضرب $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ وجود داشته باشند، لازم است که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای مربعی و همرتبه باشند. حتی دراین حالت لزومی‌ندارد که این دوحاصل‌ضرب برابرباشند، بدین‌سان معمولاً

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA} \tag{۱۲}$$

مثال ۱. برای توضیح ضرب ماتریسها، ونیز بیان این نکته‌که ضرب ماتریسی لزوماً جابه‌جایی نیست، ماتریسهای زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

بنا برتعریف ضرب که با رابطهٔ (۹) بیان شد، داریم

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} ۲-۲+۲ & ۱+۲-۱ & -۱+۰+۱ \\ ۰+۲-۲ & ۰-۲+۱ & ۰+۰-۱ \\ ۴+۱+۲ & ۲-۱-۱ & -۲+۰+۱ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۷ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

به همین طریق، خواهیم داشت

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & -۴ & ۲ \\ ۴ & -۵ & ۴ \end{pmatrix}$$

روشن است که، $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

۷. ضرب بردارها. ضرب ماتریسها را به‌صورتی که در بالا بیان شد می‌توان به‌عنوان حالت خاص هنگامی که ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌ترتیب $n\times ۱$ و $۱\times n$ یعنی بردارهای سطری وستونی باشند به‌کار گرفت. اگر این بردارها را با $\mathbf{x}^T$ و $\mathbf{y}$ نشان دهیم خواهیم داشت

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i \qquad (۱۳)$$

حاصل این عمل یك عدد (مختلط) است، ومستقیماً از رابطهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x},\quad \mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}^T\mathbf{y}+\mathbf{x}^T\mathbf{z},\quad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y}=\alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y})=\mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}) \qquad (۱۴)$$

برای بردارها ضرب دیگری وجود دارد، که بسیارمفید است و به‌ازای هردو بردار که تعداد مؤلفه‌های آنها یکی باشد معین است. این حاصل‌ضرب را با $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نشان می‌دهند و آن‌را ضرب داخلی یا اسکالر می‌نامند، وبا

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=۱}^{n} x_i \bar{y}_i \qquad (۱۵)$$

تعریف می‌شود. حاصل‌ضرب اسکالر نیز یك عدد (مختلط) است، و ازمقایسهٔ روابط (۱۳) و (۱۵) دیده می‌شود که

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{y}} \qquad (۱۶)$$

از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}&(\mathbf{x},\mathbf{y})=\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})},\quad (\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}),\\ &(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}),\quad (\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})=\bar{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

توجه شود که حتی اگر بردار $\mathbf{x}$ دارای عناصری با قسمتهای موهومی ناصفر باشد، ازضرب اسکالری $\mathbf{x}$ درخودش یك عدد حقیقی نامنفی حاصل می‌شود،

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\sum_{i=۱}^{n} x_i\bar{x}_i=\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲ \qquad (۱۸)$$

اگر $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ۰$ ، آنگاه بـردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را متعامد گویند. مثلاً، بردارهای یکه $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ درهندسهٔ برداری سه‌بعدی یك مجموعهٔ متعامد را تشکیل می‌دهند.

از طرف دیگر، امکان دارد که حاصلضرب ماتریسی

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ \qquad (۱۹)$$

یك عدد حقیقی نباشد. اگر همهٔ مؤلفه‌های سازهٔ دوم در روابط (۱۳) و (۱۵) حقیقی باشند، آنگاه هردو حاصلضرب برابرند، و به همان ضرب نقطه‌ای که معمولاً درمتون هندسی و فیزیکی با $n = ۳$ برخورد می‌شود تبدیل می گردند.

به عنوان مثال، فرض کنیم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -۲ \\ ۱+i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} ۲-i \\ i \\ ۳ \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (i)(۲-i)+(-۲)(i)+(۱+i)(۳) = ۴+۳i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (i)(۲+i)+(-۲)(-i)+(۱+i)(۳) = ۲+۷i,$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = (i)^۲+(-۲)^۲+(۱+i)^۲ = ۳+۲i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (i)(-i)+(-۲)(-۲)+(۱+i)(۱-i) = ۷$$

۸. واحد. واحد ضربی، یا به‌طور ساده ماتریس واحد $\mathbf{I}$ با

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix} \qquad (۲۰)$$

معین می‌شود. بنا بر تعریف ضرب ماتریسی به‌ازای هرماتریس (مربع) $\mathbf{A}$ داریم

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \qquad (۲۱)$$

بنابراین اگر یکی ازماتریسها ماتریس واحد باشد خاصیت جابه‌جایی برقرار می‌شود.

۹. وارون. به منظور آنکه درمورد ماتریسهای مربع عملی نظیر تقسیم اعداد تعریف کنیم، لازم است متناظر بـه هر ماتریس $\mathbf{A}$ یك ماتریس دیگر $\mathbf{B}$ تعیین کنیم بـه طوری که

$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$ ، $\mathbf{I}$ ماتریس واحد است. اگر $\mathbf{B}$ وجود داشته باشد، آن را وارون ضربی، یا به‌طور ساده وارون $\mathbf{A}$ می‌نامند، ومی‌نویسند $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. می‌توان نشان دادکه اگر $\mathbf{A}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I} \tag{۲۲}$$

به عبارت دیگر، ضرب بین ماتریس و وارونش جابه‌جایی است. اگر $\mathbf{A}$ دارای وارون ضربی $\mathbf{A}^{-1}$ باشد، آنگاه $\mathbf{A}$ را عادی گویند؛ وگرنه $\mathbf{A}$ را **غیرعادی** نامند.

برای محاسبه $\mathbf{A}^{-1}$ از $\mathbf{A}$ ، با فرض آنکه وجود داشته باشد، روشهای گوناگونی در دست است. یکی از روشها مبتنی براستفاده از دترمینانهاست. به‌هر عنصر a_{ij} ازماتریس مفروض یك مینور M_{ij} متناظر می‌شودکه دترمینان ماتریسی است که ازحذف سطر iام و ستون jام ماتریس‌اصلی، یعنی، سطر وستونی که شامل a_{ij} می‌باشند به‌دست می‌آید. همچنین به هرعنصر a_{ij} یك همسازه C_{ij} متناظر است که با معادلهٔ

$$C_{ij}=(-۱)^{i+j}M_{ij} \tag{۲۳}$$

تعریف می‌شود. اگر $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$ ، آنگاه می‌توان نشان دادکه عنصر عمومی b_{ij} عبارت است از

$$b_{ij}=\frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}} \tag{۲۴}$$

گرچه رابطهٔ (۲۴) برای محاسبهٔ $\mathbf{A}^{-1}$ چندان کارآمد[1] نیست، اما شرطی راکه باید $\mathbf{A}$ درآن صدق‌کند تا دارای وارون باشد روشن می‌کند. در واقع، این‌شرط هم لازم است وهم کافی: $\mathbf{A}$ یك ماتریس عادی است اگر، وفقط، اگر $\det \mathbf{A}\neq ۰$. اگر $\det \mathbf{A}=۰$ ، آنگاه $\mathbf{A}$ غیرعادی است.

روش دیگری‌که معمولاً برای محاسبهٔ $\mathbf{A}^{-1}$ مناسبتر است مبتنی براستفاده از اعمال سطری مقدماتی است. این اعمال برسه نوعند:

۱. تعویض دوسطر با هم.
۲. ضرب یك سطر دراسکالری ناصفر.
۳. اضافه‌کردن هرمضربی ازیك سطر به سطر دیگر.

هرماتریس عادی $\mathbf{A}$ را می‌توان با دنبالهٔ منظمی ازاین عملیات به‌واحد $\mathbf{I}$ تبدیل کرد.

---

۱. به‌ازای مقادیر بزرگ n تعداد ضربهای لازم برای محاسبهٔ $\mathbf{A}^{-1}$ بااستفاده ازرابطهٔ (۲۴) متناسب با $n!$ است. اگر شخص روشهای کارآمدتری ازقبیل روش تحویل سطری راکه ذیلاً بیان می‌شود به‌کارگیرد تعداد ضربها فقط با $n^۳$ متناسب است. حتی به‌ازای مقادیرکوچك n (مانند $n=۴$)، روش دترمینانی برای محاسبهٔ وارون چندان اقتصادی نیست، و روش تحویل سطرها مرجح است.

می‌توان نشان داد که اگر همان دنبالهٔ عملیات روی $\mathbf{I}$ انجام گیرد آن‌را به $\mathbf{A}^{-1}$ تبدیل می‌کند. این تبدیل را معمولاً تحویل سطری نامند. مثال زیر این روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۲. مطلوب است تعیین وارون

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{A}$ را می‌توان با دنبالهٔ عملیات زیر به $\mathbf{I}$ تبدیل کرد. نتیجهٔ هر مرحله در ستون سمت چپ دیده می‌شود

(الف) برای صفر کردن عناصر ستون اول واقع در زیر قطر، (−۳) برابر سطر اول را به سطر دوم و (−۲) برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ب) برای آنکه عنصر قطری واقع درستون دوم برابر یک شود، سطر دوم را در ۱/۲ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ج) برای آنکه عناصر غیرقطری در ستون دوم صفر شوند، سطر دوم را با سطر اول جمع می‌کنیم و (−۴) برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(د) برای آنکه عنصر قطری ستون سوم برابر یك شود سطر سوم را در (−۱/۵) ضرب می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ه) برای آنکه عناصر غیرقطری ستون سوم صفر شوند، (−۳/۲) سطر سوم را به سطر اول و (−۵/۲) سطر سوم را به سطر دوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اگر این دنباله عملیات را به همین‌ترتیب روی I انجام دهیم، متوالیاً ماتریسهای زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۱ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۴}{۵} & \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{۷}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} & \frac{۳}{۱۰} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۴}{۵} & \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} \end{pmatrix}$$

آخرین ماتریس، $\mathbf{A}^{-۱}$ است، این‌نتیجه را می‌توان مستقیماً با ضرب آن در $\mathbf{A}$ تحقیق‌کرد.

این مثال بدان سبب‌که عنصر واقع در گوشهٔ چپ فوقانی درماتریس اصلی $\mathbf{A}$ برابر یك بود $(a_{۱۱} = ۱)$ اندکی ساده شد. اگر چنین نباشد آنگاه نخستین‌گام آن است‌که سطر اول را در $۱/a_{۱۱}$ ضرب‌کنیم تا عنصر مزبور به‌یك بدل شود،البته هنگامی‌که $a_{۱۱} \neq ۰$. اگـر $a_{۱۱} = ۰$، آنگاه سطر اول را با یك سطر دیگر تعویض می‌کنیم تا قبل از شروع عملیات فوق دربالای ستون چپ عنصری ناصفر قرار داشته باشد.

توابع ماتریسی. گاهی لازم است به‌بررسی بردارها یا ماتریسهایی‌که عناصرآنها توابعی ازمتغیر حقیقی t هستند بپردازیم، به‌ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_{۱}(t) \\ \vdots \\ x_{n}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{۱۱}(t) & \cdots & a_{۱n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n۱}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad (۲۵)$$

ماتریس $\mathbf{A}(t)$ را در $t=t_\circ$ یا روی فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ پیوسته گویند اگر هریك ازعناصر $\mathbf{A}$ درنقطهٔ $t_\circ$ یا روی فاصلهٔ مزبور تابعی پیوسته باشد. به همین‌نحو، $\mathbf{A}(t)$ را مشتق‌پذیر گویند اگر هر یك از عناصر آن مشتق پذیر باشد ، و مشتق آن $d\mathbf{A}/dt$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right) \tag{۲۶}$$

یعنی، هرعنصر $d\mathbf{A}/dt$ مشتق عنصر متناظر $\mathbf{A}$ است. به‌همین طریق انتگرال یك ماتریس تابعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)\,dt=\left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right) \tag{۲۷}$$

مثلاً، اگر

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} \sin t & t \\ ۱ & \cos t \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\mathbf{A}'(t)=\begin{pmatrix} \cos t & ۱ \\ \circ & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_\circ^\pi \mathbf{A}(t)\,dt=\begin{pmatrix} ۲ & \pi^۲/۲ \\ \pi & \circ \end{pmatrix}$$

بسیاری ازقواعد حساب دیفرانسیل وانتگرال را می‌توان به‌آسانی به‌توابع ماتریسی تعمیم داد؛ به‌ویژه

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA})=\mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{۲۸}$$

که درآن $\mathbf{C}$ یك ماتریس ثابت است.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{dt}+\frac{d\mathbf{B}}{dt}; \tag{۲۹}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB})=\mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} \tag{۳۰}$$

در روابط (۲۸) و (۳۰) باید توجه داشت‌که ترتیب عوامل ضرب تغییر نکند. تعاریفی‌که با روابط (۲۶) و (۲۷) بیان شد به‌عنوان حالت خاص درمورد بردارها نیز به‌کار می‌روند.

مسائل

۱. اگر
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۴ & -۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ & ۰ \\ ۶ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$
مطلوب است

(الف) $\mathbf{۲A+B}$، (ب) $\mathbf{A-۴B}$، (ج) $\mathbf{AB}$، (د) $\mathbf{BA}$.

۲. اگر
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۱+i & -۱+۲i \\ ۳+۲i & ۲-i \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} i & ۳ \\ ۲ & -۲i \end{pmatrix}،$$
مطلوب است

(الف) $\mathbf{A-۲B}$، (ب) $\mathbf{۳A+B}$، (ج) $\mathbf{AB}$، (د) $\mathbf{BA}$.

۳. اگر
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۳ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۱ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$
مطلوب است

(الف) $\mathbf{A}^T$، (ب) $\mathbf{B}^T$، (ج) $\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$، (د) $(\mathbf{A+B})^T$.

۴. اگر
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۳-۲i & ۱+i \\ ۲-i & -۲+۳i \end{pmatrix}،$$
مطلوب است

(الف) $\mathbf{A}^T$، (ب) $\overline{\mathbf{A}}$، (ج) $\mathbf{A}^*$.

۵. اگر
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}،$$
تحقیق کنید که $۲(\mathbf{A+B})=\mathbf{۲A+۲B}$.

۶. اگر
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}،$$
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}، \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

تحقیق کنید که

الف) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ ب) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

ج) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

۷. هریك ازقواعد زیر را درمورد جبر ماتریسی ثابت کنید:

الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ب) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

ج) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ د) $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$

ه) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ و) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

۸. اگر $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۲ \\ ۳i \\ ۱-i \end{pmatrix}$ و $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} -۱+i \\ ۲ \\ ۳-i \end{pmatrix}$، مطلوب است

الف) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$، ب) $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$، ج) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$، د) $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

۹. اگر $\mathbf{x}=\begin{matrix} ۱-۲i \\ i \\ ۲ \end{matrix}$ و $y=\begin{matrix} ۲ \\ ۳-i \\ ۱+۲i \end{matrix}$، نشان دهید که

الف) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x}$، ب) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$.

درهریك ازمسائل ۱۰ تا ۱۹ وارون ماتریس داده شده را محاسبه کنید یا نشان‌دهید که غیرعادی است.

۱۰. $\begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{pmatrix}$

۱۱. $\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۶ & ۲ \end{pmatrix}$

۱۲. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$

۱۳. $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$

۱۴. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۸ \\ ۱ & -۲ & -۷ \end{pmatrix}$

۱۵. $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$

۱۶. $\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{pmatrix}$

۰۱۷. $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}$ ۰۱۸. $\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$

۰۱۹. $\begin{pmatrix} ۰ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۴ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۲ & -۲ \end{pmatrix}$

۰۲۰. ثابت کنید که اگر $\mathbf{A}$ عادی باشد، آنگاه $\mathbf{A}^{-۱}$ یکتاست؛ یعنی، نشان دهید که نمی‌توان دوماتریس متمایز $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را طوری تعیین کرد که $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$ و $\mathbf{AC}=\mathbf{I}$.

۰۲۱. ثابت کنید که اگر $\mathbf{A}$ عادی باشد، آنگاه $\mathbf{AA}^{-۱}=\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A}$؛ یعنی، ضرب هر ماتریس عادی در وارون آن جابه‌جایی است.

۰۲۲. اگر
$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} e^{t} & ۲e^{-t} & e^{۲t} \\ ۲e^{t} & e^{-t} & -e^{۲t} \\ -e^{t} & ۳e^{-t} & ۲e^{۲t} \end{pmatrix}$$
و
$$\mathbf{B}(t)=\begin{pmatrix} ۲e^{t} & e^{-t} & ۳e^{۲t} \\ -e^{t} & ۲e^{-t} & e^{۲t} \\ ۳e^{t} & -e^{-t} & -e^{۲t} \end{pmatrix}،$$
مطلوب است

(الف) $\mathbf{A}+۳\mathbf{B}$، (ب) $\mathbf{AB}$، (ج) $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$، (د) $\int_{۰}^{۱}\mathbf{A}(t)\,dt$.

درهریك ازمسائل ۲۳ تا ۲۵ تحقیق کنیدکه بردار داده شده درمعادلهٔ دیفرانسیل متناظر صدق می‌کند.

۰۲۳. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}$، $\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۴ \\ ۲ \end{pmatrix}e^{۲t}$

۰۲۴. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{t}$، $\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}e^{t}+۲\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}te^{t}$

۲۵. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} \mathbf{x}$ ، $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ۶ \\ -۸ \\ -۴ \end{pmatrix} e^{-t} + ۲ \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} e^{۲t}$

درهریك ازمسائل ۲۶ و ۲۷ تحقیق کنیدکه ماتریس داده شده درمعادلهٔ دیفرانسیل متناظر صدق می‌کند.

۲۶. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{pmatrix} \mathbf{\Psi}$ ، $\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-۳t} & e^{۲t} \\ -۴e^{-۳t} & e^{۲t} \end{pmatrix}$

۲۷. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix} \mathbf{\Psi}$ ، $\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-۲t} & e^{۳t} \\ -۴e^{t} & -e^{-۲t} & ۲e^{۳t} \\ -e^{t} & -e^{-۲t} & e^{۳t} \end{pmatrix}$

۴.۷ دستگاههای معادلات جبری خطی؛ استقلال خطی، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه

در این بند برخی ازنتایج جبر خطی راکه برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی دارای اهمیت‌اند یادآوری می‌کنیم. اثبات برخی ازاین نتایج آسان وبرخی دشوار است؛ اما چون هدف ما تنها تلخیص اطلاعات مفیدی به صورت فشرده است، به اثبات هیچ‌یك ازآنها نمی‌پردازیم. همهٔ نتایج این بند برچند نکتهٔ اساسی دربارهٔ جواب دستگاههای معادلات جبری خطی مبتنی است.

دستگاههای معادلات جبری خطی. مجموعه‌ای از دستگاههای n معادلهٔ جبری خطی n متغیری

$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n &= b_۱, \\ &\vdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{۱}$$

را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{۲}$$

که درآن $\mathbf{A}$ ماتریس $n \times n$ ، وبردار $\mathbf{b}$ داده شده‌انـد وباید مؤلفه‌های $\mathbf{x}$ را تعیین کـرد. اگر $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، دستگاه را همگن؛ وگرنه ناهمگن نـامند. دو دستگاه کـه دقیقاً دارای یك مجموعهٔ جواب باشند دستگاههای هم‌ارز نامیده می‌شوند.

اگر $\mathbf{A}$ ،ماتریس ضرایب،عادی باشد، یعنی،اگر $\det \mathbf{A}$ صفر نباشد،آنگاه دستگاه(۲)

دارای جوابی یکتاست. چون $\mathbf{A}$ عادی است، $\mathbf{A}^{-1}$ وجود دارد، ومی‌توان جواب را با ضرب $\mathbf{A}^{-1}$ ازچپ درهردوطرف معادلهٔ (۲) به دست آورد؛ بدین‌سان

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{۳}$$

به‌ویژه، مسئلهٔ دستگاه همگن $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$، متناظر با $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ درمعادلهٔ (۲)، تنها دارای جواب بدیهی $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است.

ازطرف دیگر، اگر $\mathbf{A}$ غیرعادی باشد، یعنی، اگر $\det \mathbf{A}$ صفر باشد،آنگاه جواب معادلهٔ (۲) یا وجود ندارد یا وجود دارد اما یکتا نیست. چون $\mathbf{A}$ غیرعادی است، $\mathbf{A}^{-1}$ وجود ندارد، بنابراین رابطهٔ (۳) دیگر برقرار نیست. دستگاه همگن

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{0} \tag{۴}$$

علاوه برجواب بـدیهی صفر دارای بینهایت جواب ناصفر است. وضعیت درمورد دستگاه ناهمگن (۲) دشوارتر است. این دستگاه دارای جواب نیست مگر آنکه بردار $\mathbf{b}$ درشرط دیگری، که به هیچ‌وجه لزوم آن بدیهی نیست، صدق کند. این شرط عبارت است ازآنکه رابطهٔ

$$(\mathbf{b},\,\mathbf{y})=0 \tag{۵}$$

به‌ازای هر بردار $\mathbf{y}$ که در $\mathbf{A}^{*}\mathbf{y}=\mathbf{0}$ صدق کند برقرار باشد، $\mathbf{A}^{*}$ ماتریس الحاقی $\mathbf{A}$ است. اگر شرط (۵) برقرار باشد، آنگاه دستگاه (۲) دارای (بینهایت) جواب است. هریك از این جوابها به‌صورت

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}+\boldsymbol{\xi}, \tag{۶}$$

است‌که درآن $\mathbf{x}^{(0)}$ یك جواب خصوصی معادلـهٔ (۲) و $\boldsymbol{\xi}$ جوابی از دستگاه همگن (۴) است. شباهت بین رابطهٔ (۶) وجواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن، رابطهٔ (۴) بند ۶.۳ شایان توجه است؛ $\mathbf{x}^{(0)}$ و $\boldsymbol{\xi}$ به‌ترتیب با جواب خصوصی y_p وجواب مکمل y_c متناظرند. اثبات برخی ازگزاره‌های فوق درمسائل ۲۱ تا ۲۵ طرح شده است.

گرچه رابطهٔ (۳)، حداقل هنگامی که $\mathbf{A}$ عادی باشد، فرمول فشرده‌ای برای جواب معادلهٔ (۲) است، اما اغلب آسانتر است‌که معادلـهٔ (۲) را با استفاده ازعملیات مقدماتی سطری به دستگاه هم‌ارز بسیارساده‌تری تبدیل کردکه جواب آن را بتوان به‌آسانی به‌دست آورد. به‌ویژه، ممکن است بخواهیم ماتـریس ضرایب را به‌یك ماتریس مثلثی تبدیل کنیم؛ یعنی، ماتریسی بیابیم‌که عناصر واقع در زیرقطر اصلی همه صفرباشند. مثال زیر این‌روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۱. دستگاه معادلات زیر را حل‌کنید

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3&=7\\ -x_1+\ \ x_2-2x_3&=-5\\ 2x_1-\ \ x_2-\ \ x_3&=4 \end{aligned} \tag{۷}$$

مناسب است که معادلات (۷) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۷ \\ -۵ \\ ۴ \end{pmatrix} \qquad (۸)$$

این معادله باعناصر ماتریس ضریب و بردار طرف دوم معادلهٔ (۸) مشخص می‌شود، به‌ویژه، مقدار و محل هریك ازعناصر به‌دست می‌آید. بدین‌سان می‌توان از xها صرف‌نظر کرد و به‌اختصار نوشت

$$\left(\begin{array}{ccc:c} ۱ & -۲ & ۳ & ۷ \\ -۱ & ۱ & -۲ & -۵ \\ ۲ & -۱ & -۱ & ۴ \end{array}\right) \qquad (۹)$$

ماتریس (۹) را ماتریس افزودهٔ دستگاه (۷) می‌نامند. خط نقطه‌چین جانشین علامتهای تساوی است و می‌گوییم ماتریس را افراز می‌کند. اکنون به‌انجام عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس (۹) به‌منظور صفرکردن عناصرقسمت پایین چپ ماتریس مزبور می‌پردازیم. باید توجه داشت که عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس (۹) با عملیات مجاز روی دستگاه معادلات (۷) متناظر است. هرگام را در زیرتوضیح داده‌ایم، ونتیجه درطرف چپ نوشته شده است.

(الف) سطر اول را به سطر دوم و (۲ −) برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} ۱ & -۲ & ۳ & ۷ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & -۷ & -۱۰ \end{array}\right)$$

(ب) سطر دوم را در (۱ −) ضرب می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} ۱ & -۲ & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & -۷ & -۱۰ \end{array}\right)$$

(ج) (۳ −) برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} ۱ & -۲ & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۴ & -۴ \end{array}\right)$$

(د) سطر سوم را به (۴ −) تقسیم می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} ۱ & -۲ & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right)$$

ماتریسی که بدین‌سان به‌دست آمد با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ &= ۷, \\ x_۲ - x_۳ &= -۲, \\ x_۳ &= ۱, \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

متناظر است واین دستگاه با دستگاه اصلی (۷) هم‌ارز است. باید توجه داشت که ضرایب معادلات (۱۰) تشکیل یك ماتریس مثلثی می‌دهند. ازآخرین معادلهٔ دستگاه (۱۰) داریم $x_۳ = ۱$، از دومین معادله $x_۲ = -۲ + x_۳ = -۱$، و ازاولین معادله

$$x_۱ = ۷ + ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۲$$

بدین‌سان داریم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

که جواب دستگاه (۷) یا (۸) داده شده‌است.

این روش برای حل دستگاههای همگن و دستگاههایی که تعداد معادلات آنها با تعداد مجهولات مساوی نباشد نیز مفید است.

استقلال خطی. هنگامی گویند مجموعه‌ای از k بردار $\mathbf{x}^{(۱)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}$ بستگی خطی دارند که بتوان مجموعهٔ اعداد (مختلط) $c_۱$، . . . ، c_k را که حداقل یکی از آنها ناصفر باشد طوری تعیین کرد که

$$c_۱\mathbf{x}^{(۱)} + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)} = ۰ \qquad (۱۱)$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{x}^{(۱)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}$ بستگی خطی دارند اگر یك رابطهٔ خطی بین آنها باشد. ازطرف دیگر، اگر تنها مجموعهٔ $c_۱$، . . . ، c_k که به‌ازای آن معادلهٔ (۱۱) برقرار گردد $c_۱ = c_۲ = \cdots = c_k = ۰$ باشد، آنگاه $\mathbf{x}^{(۱)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}$ را **مستقل خطی** گویند.

اکنون مجموعهٔ n بردار راکه هریك دارای n مؤلفه است درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $x_{ij} = x_i^{(j)}$ مؤلفهٔ iام بردار $\mathbf{x}^{(j)}$ باشد، وفرض کنیم $\mathbf{X} = (x_{ij})$. آنگاه معادلهٔ (۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x_۱^{(۱)}c_۱ + \cdots + x_۱^{(n)}c_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(۱)}c_۱ + \cdots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{۱۱}c_۱ + \cdots + x_{۱n}c_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n۱}c_۱ + \cdots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = ۰ \qquad (۱۲)$$

اگر $\det \mathbf{X} \neq ۰$، آنگاه تنها جواب معادلهٔ (۱۲)، $\mathbf{c} = ۰$ است، اما اگر $\det \mathbf{X} = ۰$،

جوابهای ناصفری وجود دارد. بدین‌سان مجموعهٔ بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}$، . . .، $\mathbf{x}^{(n)}$ مستقل خطی‌اند اگر، وفقط اگر، $\det \mathbf{X} \neq 0$.

مثال ۲. تعیین کنید که آیا بردارهای

$$\mathbf{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

مستقل خطی‌اند یا نه. اگر مستقل خطی نیستند یك رابطهٔ خطی بین آنها بیابید.

برای بررسی استقلال خطی $\mathbf{x}^{(1)}$، $\mathbf{x}^{(2)}$، و $\mathbf{x}^{(3)}$ به محاسبهٔ $\det(x_{ij})$ که ستونهای آن به‌ترتیب مؤلفه‌های $\mathbf{x}^{(1)}$، $\mathbf{x}^{(2)}$، و $\mathbf{x}^{(3)}$ می‌باشند می‌پردازیم. بدین‌سان

$$\det(x_{ij})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

ومحاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که این دترمینان صفر است. بدین‌سان $\mathbf{x}^{(1)}$، $\mathbf{x}^{(2)}$، و $\mathbf{x}^{(3)}$ مستقل خطی نیستند وثابتهای c_1، c_2، و c_3 را می‌توان طوری تعیین کرد که

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}+c_2\mathbf{x}^{(2)}+c_3\mathbf{x}^{(3)}=0 \qquad (14)$$

معادلهٔ (۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

وآن را با عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array}\right) \qquad (16)$$

مانند مثال ۱ حل کرد.

(الف) (۲−) برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم و سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

(ب) سطر دوم را بر ۳— تقسیم می‌کنیم؛ آنگاه (۵—) برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

بدین‌سان دستگاه هم‌ارز

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0 \\ c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

به دست می‌آید. ازمعادلهٔ دوم (۱۷) داریم $c_2 = 3c_3$، و ازمعادلهٔ اول حاصل می‌شود $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. بدین‌سان c_1 و c_2 را برحسب c_3 به دست آورده‌ایم و c_3 دلخواه باقی می‌ماند. اگر برای سهولت قرار دهیم $c_3 = -1$، آنگاه $c_1 = 2$ و $c_2 = -3$. دراین حالت رابطهٔ مطلوب (۱۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = 0$$

دربسیاری موارد مفید است که ستونها یا سطرهای ماتریس $\mathbf{A}$ را به عنوان بردار درنظر بگیریم. این بردارهای ستونی (یا سطری) مستقل خطی‌اند اگر، وفقط اگر، $\det \mathbf{A} \neq 0$. علاوه براین، اگر $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$، آنگاه می‌توان نشان دادکه $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. بنابراین، اگر ستونها یا سطرهای هر دوماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مستقل خطی باشند، آنگاه ستونها یا سطرهای $\mathbf{C}$ نیز مستقل خطی‌اند.

اکنون به‌تعمیم مفاهیم استقلال وعدم استقلال خطی درمورد مجموعه‌ای از توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ که روی فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ معین‌اند می‌پردازیم. بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ را روی فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ وابستهٔ خطی گویند اگر ثابتهای c_1، . . . ، c_k راکه همگی صفر نباشند بتوان طوری تعیین کردکه به ازای هر t در فاصلهٔ مزبور $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) = 0$. درغیر این‌صورت، $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ را مستقل خطی گویند. توجه شودکه اگر $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ روی فاصله‌ای وابستهٔ خطی باشند، در هر نقطهٔ فاصلهٔ مزبور وابستهٔ خطی‌اند. اما، اگر $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ روی فاصله‌ای‌مستقل‌خطی باشند، درهرنقطهٔ فاصلهٔ مزبورممکن است مستقل خطی یا وابستهٔ خطی باشند؛ در واقع امکان دارد درهرنقطه وابستهٔ خطی باشند، اما مجموعه‌های ثابتها درنقاط متفاوت مختلف باشند. به‌عنوان مثال مسئلهٔ ۹ را ببینید.

مقادیر ویژه وبردارهای ویژه. معادلهٔ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \qquad (18)$$

را می‌توان به‌عنوان یك تبدیل خطی که هربردار مفروض $\mathbf{x}$ را به‌بردار جدید $\mathbf{y}$ می‌نگارد (یا تبدیل می‌کند) درنظر گرفت. بردارهایی که به‌مضاربی ازخود تبدیل می‌شوند در بسیاری

کاربردها نقش مهمی ایفا می‌کنند.[1] برای تعیین چنین بردارهایی قرار می‌دهیم $\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}$ ، که درآن اسکالر λ ضریب تناسب است، و به جستجوی جوابهای معادلات

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \tag{۱۹}$$

یا

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=0 \tag{۲۰}$$

می‌پردازیم. معادلهٔ اخیر دارای جوابهای ناصفر است اگر، وفقط اگر، λ به‌گونه‌ای تعیین شود که

$$\Delta(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0. \tag{۲۱}$$

مقادیر λ که درمعادلهٔ (۲۱) صدق می‌کنند مقادیر ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ نام دارند، وجوابهای معادلهٔ (۱۹) یا (۲۰) که به ازای این مقادیر λ به دست می‌آیند بردارهای ویژهٔ متناظـر با مقدار ویژهٔ مزبورنامیده می‌شوند. بردارهای ویژه با تقریب یك ثابت ضربی دلخواه تعیین می‌گردند، اگـر این ثابت را به‌نحوی مشخص‌کنیم، آنگاه بردارهـای ویـژهٔ مزبور را نرمال شده نامند. اغلب مناسب است‌که بردار ویژهٔ $\mathbf{x}$ با قید $(\mathbf{x},\mathbf{x})=1$ نرمال شود. در برخی موارد ممکن است بخواهیم یکی ازمؤلفه‌ها برابر واحد باشد.

چون معادلهٔ (۲۱) یك‌معادلهٔ چندجمله‌ای ازدرجهٔ n برحسب λ است، n مقدار ویژهٔ λ_1 ، . . . ، λ_n وجود داردکه برخی ازآنها ممکن است مکرر باشند. اگر یك مقدار ویژه m بار بـه عنوان ریشهٔ معادله (۲۱) ظاهر شود، آنگاه گفته می‌شودکه مقدار ویژهٔ مزبور دارای مرتبهٔ تکرار m است. هرمقدار ویژه حداقل دارای یك بردار ویـژهٔ متناظر است، و هرمقدار ویژه‌که دارای مرتبهٔ تکرار m باشد ممکن است دارای q بردار ویژهٔ مستقل خطی باشد، به طوری که

$$1\leqslant q\leqslant m. \tag{۲۲}$$

حالتی راکـه درآن q کوچکتر از m است ذیلاً با مثال ۳ توضیح داده‌ایم. اگـر همهٔ مقادیر ویژهٔ یك ماتریس $\mathbf{A}$ ساده باشند (یعنی مرتبهٔ تکرارشان یك باشد)، آنگاه می‌توان نشان دادکه n بردار ویژهٔ $\mathbf{A}$ ، به‌ازای هرمقدار ویژه،یك بردار، مستقل خطی‌اند. از طرف دیگر،اگر $\mathbf{A}$ دارای یك یا چند مقدار ویژهٔ مکررباشد، آنگاه ممکن است تعداد بردارهای ویژهٔمستقل خطی‌ماتریس $\mathbf{A}$ از n کمترباشد، زیرا به‌ازای هرمقدار ویژهٔ مکرر ممکن است داشته باشیم $q<m$. این‌نکته بعداً درحل دستگاههای معادلات دیفرانسیل ایجاد مشکلاتی می‌کند.

مثال ۳. مطلوب است تعیین مقادیر ویژه وبردارهای ویژهٔ ماتریس

---

۱. به عنوان مثال، درتعیین محورهای اصلی استرس یـا استرین یك جسم‌کشسان، و درتعیین مدهای ارتعاش آزاد دستگاه کنسرواتیو با تعداد درجات آزادی محدود به‌این مسئله برمی‌خوریم.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix} \qquad (۲۳)$$

مقادیر ویژهٔ λ و بردارهای ویژهٔ $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\circ$ ، یا

$$\begin{pmatrix} ۱-\lambda & -۱ \\ ۱ & ۳-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}. \qquad (۲۴)$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} ۱-\lambda & -۱ \\ ۱ & ۳-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^۲-۴\lambda+۴=\circ\,. \qquad (۲۵)$$

بدین‌سان دومقدار ویژهٔ مزبور عبارتند از $\lambda_۱=۲$ و $\lambda_۲=۲$؛ یعنی، مقدار ویژهٔ ۲ دارای مرتبهٔ تکرار دو است.

برای تعیین بردارهای ویژه باید به معادلهٔ (۲۴) برگردیم و درآن به‌جای λ مقدار ۲ را منظور کنیم. ازآنجا

$$\begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}. \qquad (۲۶)$$

بدین ترتیب تنها یك شرط $x_۱+x_۲=\circ$ حاصل می‌شود، که $x_۲$ را برحسب $x_۱$ یا برعکس معین می‌کند. اگر $x_۱=c$ ، آنگاه $x_۲=-c$ و بردار ویژهٔ $\mathbf{x}^{(۱)}$ چنین است

$$\mathbf{x}^{(۱)}=c\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \qquad (۲۷)$$

معمولاً پس از تعیین بردارهای ویژه از ثابت دلخواه c صرف‌نظر می‌کنیم؛ بدین‌سان به‌جای رابطهٔ (۲۷) می‌نویسیم

$$\mathbf{x}^{(۱)}=\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \qquad (۲۸)$$

و به‌خاطر می‌سپاریم که هرمضرب این بردار نیز یك بردار ویژه است. توجه شود که تنها یك بردار ویژهٔ مستقل خطی متناظر با مقدار ویژهٔ مضاعف مزبور به دست آمد.

مثال ۴. مطلوب است تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۲۹}$$

مقادیر ویژهٔ λ و بردارهای ویژهٔ $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ، یا

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳۰}$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه عبارتند از ریشه‌های معادله

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^3+3\lambda+2=0 \tag{۳۱}$$

ازحل‌معادلهٔ (۳۱)، مثلاً* با آزمون وخطا، سه ریشه به دست می‌آیدکه عبارتند از $\lambda_1=2$، $\lambda_2=-1$، و $\lambda_3=-1$. بدین‌سان ۲ یك مقـدار ویژهٔ ساده، و ۱ — مقدار ویژه‌ای با مرتبهٔ تکرار دو است.

برای تعیین بـردار ویژهٔ $\mathbf{x}^{(1)}$ متناظر به‌مقدار ویژهٔ λ_1 ، بـا جایگزینی $\lambda=2$ در معادلهٔ (۳۰)؛ به دستگاه زیر می‌رسیم

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳۲}$$

می‌توان آن‌را با عملیات مقدماتی سطری به دستگاه هم‌ارز

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳۳}$$

ساده‌کرد. ازحل این دستگاه بردار ویژهٔ زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۳۴}$$

به‌ازای $\lambda = -1$، معادلات (۳۰) فوراً به‌یك معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{۳۵}$$

تبدیل می‌شوند. بدین‌سان برای دو کمیت ازسه کمیت x_1، x_2، x_3 می‌توان مقادیر دلخواهی انتخاب کرد وسومی را ازمعادلهٔ (۳۵) به دست آورد. مثلاً، اگر $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$، آنگاه $x_3 = -1$ و

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{۳۶}$$

یك بردار ویژه است. هرمضرب $\mathbf{x}^{(2)}$ نیز یك بردار ویژه است، اما بردار ویژهٔ مستقل دوم را می‌توان با انتخاب مقادیر دیگری برای x_1 و x_2 مثلاً $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ به‌دست آورد. دراینجا نیز $x_3 = -1$ و

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{۳۷}$$

یك بردار ویژه است که با $\mathbf{x}^{(2)}$ بستگی خطی ندارد. بنابراین دراین مثال دوبردار ویژهٔ مستقل خطی به‌مقدار ویژهٔ مضاعف متناظر قرار گرفته است.

طبقهٔ خاص مهمی ازماتریسها، موسوم به ماتریسهای هرمیتی یا خودالحاقی عبارتند ازماتریسهایی‌که در $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ صدق می‌کنند؛ یعنی، $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. ماتریسهای هرمیتی شامل ماتریسهای متقارن حقیقی می‌باشند؛ یعنی، ماتریسهایی‌که دارای عناصر حقیقی‌اند وبه‌ازای آنها $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. این ماتریسها زیرطبقه‌ای ازماتریسهای هرمیتی تشکیل می‌دهند. مقادیر ویژه وبردارهای ویژهٔ ماتریسهای هرمیتی دارای خواص مفید زیرهستند.

۱. همهٔ مقادیر ویژه حقیقی‌اند.

۲. مرتبهٔ تکرار مقادیر ویژه هرچه باشد همواره یك مجموعهٔ کامل از n بردار ویژهٔ مستقل خطی وجود دارد.

۳. اگر $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ دوبردار ویژهٔ متناظر به دومقدار ویژهٔ متمایز باشند، آنگاه $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$. بدین‌سان، اگر همهٔ مقادیر ویژه ساده باشند، آنگاه بردارهای ویژهٔ متناظر تشکیل یك مجموعهٔ بردارهای متعامد می‌دهند.

۴. متناظر با هرمقدار ویژهٔ با مرتبهٔ تکرار m، می‌توان m بردار ویژهٔ دو به دو متعامد انتخاب کرد. بدین‌سان مجموعهٔ کامل n بردار ویژه را همواره می‌توان طوری انتخاب کردکه هم متعامد و هم مستقل خطی باشند.

مثال ۴ بالا شامل یك مـاتریس متقارن حقیقی است و خواص ۱، ۲ و ۳ را توضیح می‌دهد، اما با انتخابی که برای $\mathbf{x}^{(۲)}$ و $\mathbf{x}^{(۳)}$ کردیم خاصیت ۴ برقرار نیست. اما، همواره می‌توان $\mathbf{x}^{(۲)}$ و $\mathbf{x}^{(۳)}$ را طوری انتخاب کـرد کـه $(\mathbf{x}^{(۲)}, \mathbf{x}^{(۳)}) = ۰$. مثلاً امکان داشت بردارهای ویژهٔ متناظر به‌مقدار ویژهٔ $\lambda = -۱$ (درمثال ۴) را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$\mathbf{x}^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(۳)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

مثال ۳ نشان می‌دهد که اگر ماتریس هرمیتی نباشد، ومقدار ویژه مکرر باشد، آنگاه امکان دارد باکمبود بردارهای ویژه مواجه شویم. اثبات گزاره‌های ۱ و ۳ درمسائل ۲۷ تا ۲۹ طرح شده است.

درحل دستگاههای معادلات جبری وموارد دیگری گاهی لازم می‌آیدکـه ماتریس مفروضی را بـه صورت قطری درآوریم، یعنی، ماتریسی که تنها روی قطر دارای عناصر ناصفر باشد. برای انجام این‌کار می‌توان ازبردارهای ویژه استفاده‌کرد. فرض‌کنیم که $\mathbf{A}$ دارای یك مجموعهٔ کامل n بـردار ویژهٔ مستقل خطی باشد (خواه $\mathbf{A}$ هرمیتی بـاشد خواه نباشد). این‌بردارهای ویژه را با $\mathbf{x}^{(۱)}، \ldots، \mathbf{x}^{(n)}$ ومقادیر ویژهٔ متناظر را به $\lambda_۱، \ldots، \lambda_n$ نشان می‌دهیم، ماتریس $\mathbf{T}$ را که ستونهای آن ازبردارهای ویژهٔ $\mathbf{x}^{(۱)}، \ldots، \mathbf{x}^{(n)}$ تشکیل شده‌انـد درنظر می‌گیریم. چون ستونهای $\mathbf{T}$ بـردارهای مستقل خطی‌اند، $\det \mathbf{T} \neq ۰$؛ بنابراین $\mathbf{T}$ عـادی است و $\mathbf{T}^{-۱}$ وجود دارد. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهدکـه ستونهای ماتـریس $\mathbf{AT}$ دقیقاً از بـردارهـای $\mathbf{Ax}^{(۱)}، \ldots، \mathbf{Ax}^{(n)}$ تشکیل شده‌انـد. چـون $\mathbf{Ax}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$، نتیجهٔ می‌شودکه

$$\begin{aligned} \mathbf{AT} &= \begin{pmatrix} \lambda_۱ x_۱^{(۱)} & \cdots & \lambda_n x_۱^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_۱ x_n^{(۱)} & \cdots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{TD}, \end{aligned} \tag{۳۸}$$

که درآن

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & ۰ & \ldots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{۳۹}$$

یك ماتریس قطری است که عناصر قطری آن همان مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ می‌باشند. از رابطهٔ (۳۸)

نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D} \tag{۴۰}$$

بدین‌سان، اگر مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ $\mathbf{A}$ معلوم باشند، $\mathbf{A}$ را می‌توان با روشی که در رابطهٔ (۴۰) بیان شده‌است به‌یك ماتریس قطری تبدیل کرد. این روش به‌تبدیل تشابهی موسوم است، و رابطهٔ (۴۰) معادل با آن است که بگوییم $\mathbf{A}$ با ماتریس قطری $\mathbf{D}$ متشابه است. به‌عبارت دیگر می‌توان گفت $\mathbf{A}$ قطری شدنی است. دربقیهٔ این فصل امکان قطری کردن ماتریسها دارای اهمیت شایانی است.

اگر $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد، آنگاه تعیین $\mathbf{T}^{-1}$ بسیار ساده است. بردارهای ویژه $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ ماتریس $\mathbf{A}$ را طوری‌انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر i با $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(i)})=1$ نرمال شده ومتعامد باشند. آنگاه به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{*}$؛ به‌عبارت دیگر، وارون $\mathbf{T}$ همان ماتریس **الحاقی** آن (**ترانهادهٔ مزدوج مختلط** آن) است.

بالاخره، متذکر می‌شویم که اگر تعداد بردارهای ویژهٔ مستقل خطی ماتریس $\mathbf{A}$ از n کمتر باشد، آنگاه نمی‌توان ماتریس $\mathbf{T}$ را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D}$. دراین حالت، $\mathbf{A}$ با یك ماتریس قطری متشابه *نیست*، به‌عبارت دیگر قطری‌شدنی نیست.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۵ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید، یا نشان دهید که دارای جواب نیست.

۱.
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 \quad + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

۲.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

۳.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

۴.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

۵.
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

۶. تعیین‌کنید که آیا مجموعهٔ بردارهای زیر مستقل خطی‌اند. اگر وابستهٔ خطی باشند، رابطهٔ خطی بین آنها را بیابید. بردارها را ازلحاظ صرفه‌جویی درجا به صورت

سطری نوشته‌ایم، اما می‌توان آنها را به صورت بردارهای ستونی در نظر گرفت؛ یعنی، به‌جای بردارها می‌توان از **ترانهادهٔ** آنها استفاده کرد.

(الف) $\mathbf{x}^{(1)}=(1,\ 1,\ 0),\quad \mathbf{x}^{(2)}=(0,\ 1,\ 1),\quad \mathbf{x}^{(3)}=(1,\ 0,\ 1)$

(ب) $\mathbf{x}^{(1)}=(2,\ 1,\ 0),\quad \mathbf{x}^{(2)}=(0,\ 1,\ 0),\quad \mathbf{x}^{(3)}=(-1,\ 2,\ 0)$

(ج) $\mathbf{x}^{(1)}=(1,\ 2,\ 2,\ 3),\quad \mathbf{x}^{(2)}=(-1,\ 0,\ 3,\ 1),$

$\mathbf{x}^{(3)}=(-2,\ -1,\ 1,\ 0),\quad \mathbf{x}^{(4)}=(-3,\ 0,\ -1,\ 3)$

(د) $\mathbf{x}^{(1)}=(1,\ 2,\ -1,\ 0),\quad \mathbf{x}^{(2)}=(2,\ 3,\ 1,\ -1),$

$\mathbf{x}^{(3)}=(-1,\ 0,\ 2,\ 2),\quad \mathbf{x}^{(4)}=(3,\ -1,\ 1,\ 3)$

(ه) $\mathbf{x}^{(1)}=(1,\ 2,\ -2),\quad \mathbf{x}^{(2)}=(3,\ 1,\ 0,),\quad \mathbf{x}^{(3)}=(2,\ -1,\ 1),$

$\mathbf{x}^{(4)}=(4,\ 3,\ -2)$

۷. فرض کنیم که بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}$، . . .، $\mathbf{x}^{(m)}$ هر یک دارای n مؤلفه باشند و $n<m$. نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}$، . . .، $\mathbf{x}^{(m)}$ وابستهٔ خطی‌اند.

۸. تعیین کنید که آیا هر یک از مجموعهٔ بردارهای زیر به‌ازای $-\infty<t<\infty$ مستقل خطی‌اند. اگر وابستهٔ خطی باشند، رابطهٔ خطی بین آنها را پیدا کنید. مانند مسئلهٔ ۶ برای صرفه‌جویی در جا بردارها را به‌صورت سطری نوشته‌ایم.

(الف) $\mathbf{x}^{(1)}(t)=(e^{-t},\ 2e^{-t}),\quad \mathbf{x}^{(2)}(t)=(e^{-t},\quad e^{-t}),$

$\mathbf{x}^{(3)}(t)=(3e^{-t},\ 0)$

(ب) $\mathbf{x}^{(1)}(t)=(2\sin t,\ \sin t)\ ,\quad \mathbf{x}^{(2)}(t)=(\sin t,\ 2\sin t)\ .$

۹. فرض کنیم

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ درهر نقطهٔ از فاصلهٔ $0\leqslant t\leqslant 1$ وابستهٔ خطی‌اند. باوجود این، نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ روی $0\leqslant t\leqslant 1$ مستقل خطی‌اند.

درهریك از مسائل ۱۰ تا ۱۹ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس داده شده را بیابید.

۱۰. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ۱۱. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ۱۲. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

۱۳. $\begin{pmatrix} ۱ & i \\ -i & ۱ \end{pmatrix}$ ۱۴. $\begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{pmatrix}$ ۱۵. $\begin{pmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & -۷ \end{pmatrix}$

۱۶. $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ ۱۷. $\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ -۲ & -۴ & -۱ \end{pmatrix}$

۱۸. $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}$ ۱۹. $\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$

۲۰. به ازای هرماتریس داده شدهٔ $\mathbf{A}$ ، ماتریس $\mathbf{T}$ را طوری تعیین کنید که $\mathbf{T}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D}$ که در آن $\mathbf{D}$ یك ماتریس قطری است.

(الف) $\mathbf{A}$ ماتریس مسئلهٔ ۱۰ است.

(ب) $\mathbf{A}$ ماتریس مسئلهٔ ۱۱ است.

(ج) $\mathbf{A}$ ماتریس مسئلهٔ ۱۴ است.

مسائل ۲۱ تا ۲۵ مربوط به حل $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ درحالت $\det \mathbf{A}=۰$ است.

۲۱. فرض کنیم که به‌ازای ماتریس داده شدهٔ $\mathbf{A}$ ، بردار ناصفر $\mathbf{x}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{Ax}=۰$. نشان دهید که بردار ناصفر $\mathbf{y}$ نیز وجود دارد به طوری که $\mathbf{A}^*\mathbf{y}=۰$.

۲۲. نشان دهید که به‌ازای هر بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ داریم $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})=(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$.

۲۳. فرض کنیم که $\det \mathbf{A}=۰$ ، اما $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ دارای جواب باشد. نشان دهید که $(\mathbf{b}, \mathbf{y})=۰$، که در آن $\mathbf{y}$ هرجواب $\mathbf{A}^*\mathbf{y}=۰$ است. درستی این گزاره را دربارهٔ مجموعهٔ معادلات مسئلهٔ ۳ تحقیق کنید.

راهنمایی: ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۲۲ استفاده کنید.

۲۴. فرض کنیم که $\det \mathbf{A}=۰$ و $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(۰)}$ یك جواب $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ است. نشان دهید که اگر $\boldsymbol{\xi}$ یك جواب $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=۰$ و α ثابت دلخواهی باشد، آنگاه $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(۰)}+\alpha\boldsymbol{\xi}$ نیز یك جواب $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ است.

*۲۵. فرض کنیم که $\det \mathbf{A}=۰$ ، و $\mathbf{y}$ یك جواب $\mathbf{A}^*\mathbf{y}=۰$ باشد. نشان دهید که اگر $(\mathbf{b}, \mathbf{y})=۰$ ، آنگاه $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ دارای جواب است. توجه شود که این گزاره عکس مسئلهٔ ۲۳ است؛ صورت جواب درمسئلهٔ ۲۴ داده شده است.

۲۶. ثابت کنید که $\lambda=۰$ یك مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$ است اگر، وفقط اگر، $\mathbf{A}$ غیرعادی باشد.

۲۷. ثابت کنید که اگر $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد، آنگاه $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})=(\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$، که در آن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بردارهای دلخواه‌اند.

۲۸. دراین مسئله نشان می‌دهیم که مقادیر ویژهٔ یك ماتریس هرمیتی $\mathbf{A}$ حقیقی‌اند.

گیریم $\mathbf{x}$ یك بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ λ باشد.

(الف) نشان دهید که $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. راهنمایی: مسئلهٔ ۲۷ را ببینید.

(ب) نشان دهید که $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. راهنمایی: توجه شود که $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

(ج) نشان دهید که $\bar{\lambda} = \lambda$؛ یعنی، مقدار ویژهٔ λ حقیقی است.

۲۹. نشان دهید که اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژهٔ یك ماتریس هرمیتی $\mathbf{A}$ باشند، و اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$، آنگاه بردارهای ویژهٔ متناظر $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ متعامدند.
راهنمایی: با استفاده از نتایج مسائل ۲۷ و ۲۸ نشان دهید که $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.

۵.۷ نظریهٔ اساسی دستگاههای معادلات خطی مرتبهٔ اول

نظریهٔ عمومی دستگاه n معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

دقیقاً همانند نظریهٔ یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ nام است. ازاین‌رو دراین بند با پیروی ازهمان خطوط کلی بندهای ۲.۳، ۳.۳ و ۵.۲ بـه‌بحث می‌پردازیم. بـرای آنکه دستگاه (۱) را به‌بهترین وجه بررسی کنیم، آن‌را با نماد ماتریسی می‌نویسیم. یعنی، توابع $x_1 = \phi_1(t)$، ...، $x_n = \phi_n(t)$ را به عنوان مؤلفه‌های بردار $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ درنظر می‌گیریم؛ به‌همین نحو $g_1(t)$، ...، $g_n(t)$ مؤلفه‌های بردار $\mathbf{g}(t)$، و $p_{11}(t)$، ...، $p_{nn}(t)$ عناصر یك‌ماتریس $n \times n$، $\mathbf{P}(t)$ می‌باشند. بدین‌سان معادلهٔ (۱) به‌صورت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \tag{2}$$

درمی‌آید.

کاربرد بردارها وماتریسها نه‌تنها موجب صرفه‌جویی بزرگی‌درجا وتسهیل محاسبات می‌شود، بلکه شباهت بین یك‌دستگاه معادلات ویك معادلهٔ (اسکالر) تنها را نمایان می‌سازد.

بردار $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ را هنگامی جواب معادلهٔ (۲) نامندکـه مؤلفه‌های‌آن در دستگاه معادلات (۱) صدق کند. درسراسر این بند فـرض بـر آن استکـه $\mathbf{P}$ و $\mathbf{g}$ روی فـاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌انـد؛ یعنی، هریك ازتوابع اسکالر p_{11}، ...، p_{nn}، g_1، ...، g_n روی فاصلهٔ مزبور پیوسته‌انـد. بنابرقضیهٔ ۲.۷، این شرط برای وجود جواب معادلهٔ (۲) روی فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ کافی است.

مناسبتر استکه نخست معادلهٔ همگن

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{3}$$

راکه ازمعادلهٔ (۲) به‌ازای $\mathbf{g}(t) = 0$ به‌دست می‌آیدبررسی کنیم. همینکه معادلهٔ همگن‌حل

شد، با استفاده از روش تغییر پارامترها می‌توان معادلهٔ ناهمگن (۲) را حل کـرد؛ در بند ۱۰.۷ به‌این‌موضوع می‌پردازیم. برای نمایش جوابهای خاص دستگاه (۳) از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)=\begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \ldots \qquad (۴)$$

توجه شود که $x_{ij}(t)=x_i^{(j)}(t)$ نمایشگر مؤلفه iام ازجواب jام $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ است. نکات‌اصلی درخصوص ساختمان جوابهای دستگاه (۳) در قضایـای ۳.۷ تا ۶.۷ بیان شده‌است. این قضایا کاملاً شبیه قضایای متناظر دربندهای ۲.۳، ۳.۳، و ۲.۵ می‌باشند؛برخی از برهانها را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار کرده‌ایم.

قضیهٔ ۳.۷. اگـر توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1\mathbf{x}^{(1)}+c_2\mathbf{x}^{(2)}$ نیز به‌ازای ثابتهای دلخواه c_1 و c_2 یك جواب است.

این همان اصل انطباق است؛ و به‌آسانی با مشتق‌گیری از $c_1\mathbf{x}^{(1)}+c_2\mathbf{x}^{(2)}$ و بـا استفاده ازاین نکته‌که $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ درمعادلـهٔ (۳) صدق می‌کنند اثبات می‌شود. با استفادهٔ مکرر ازقضیهٔ ۳.۷ به‌این نتیجه می‌رسیم کـه اگر $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}$ جوابهای معادلـهٔ (۳) باشند، آنگاه

$$\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \qquad (۵)$$

نیز به‌ازای ثابتهای دلخواه c_1، . . . ، c_k یك جواب است. به‌عنوان مثال می‌توان تحقیق کرد که

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} \qquad (۶)$$

درمعادلهٔ

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad (۷)$$

صدق می‌کند. طبق قضیهٔ ۳.۷

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} \\ &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \qquad (۸)$$

نیز درمعادلهٔ (۷) صدق می‌کند. این جواب دستگاه (۷) را در بند ۲.۷ با روش حذفی به دست آوردیم.

چنانکه در بالا اشاره‌کردیم، با استفادهٔ مکرر از قضیهٔ ۳.۷ نتیجه می‌شودکه هر ترکیب خطی متناهی از جوابهای معادلهٔ (۳) نیز یك جواب است. اکنون این مسئله پیش می‌آیدکه آیا تمام جوابهای معادلهٔ (۳) را می‌توان بدین‌طریق به دست آورد. ازقیاس با موارد پیش می‌توان حدس زدکه برای دستگاه مرتبهٔ nام (۳) کافی است ترکیبهای خطی n جواب را که درست انتخاب شده باشند تشکیل داد. بنابراین فرض می‌کنیم که $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$، n جواب دستگاه مرتبهٔ nام (۳) باشند، و ماتریس $\mathbf{X}(t)$ راکه ستونهای آن بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ می‌باشند درنظر می‌گیریم؛

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \cdots x_{1n}(t) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_{n1}(t) \cdots x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{۹}$$

بردارهای ستونی $\mathbf{X}(t)$، همان‌طورکه در بند ۴.۷ دیدیم، به‌ازای مقدار داده شدهٔ t مستقل خطی‌اند اگر،وفقط اگر،به‌ازای این مقدار t، $\det \mathbf{X} \neq 0$. این دترمینان را رونسکین n جواب $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ می‌نامند وبا $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ نشان می‌دهند؛ یعنی

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]=\det \mathbf{X} \tag{۱۰}$$

بنابراین جوابهای $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ دریك نقطه مستقل خطی‌اند اگر،وفقط‌اگر، درآن $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ صفر نباشد.

قضیهٔ ۴.۷. اگر توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ به‌ازای هرنقطهٔ فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ جوابهای مستقل خطی دستگاه (۳) باشند، آنگاه هرجواب $\mathbf{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ دستگاه (۳) را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ دقیقاً به یك طریق بیان کرد.

$$\boldsymbol{\phi}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{۱۱}$$

پیش ازاثبات قضیهٔ ۴.۷، توجه شودکه طبق قضیهٔ ۳.۷ همهٔ عبارتهای به‌شکل (۱۱) جوابهای دستگاه (۳) می‌باشند، وبنابرقضیهٔ ۴.۷ همهٔ جوابهای معادلهٔ (۳) را می‌توان به صورت (۱۱) نوشت. اگر ثابتهای c_1، ...، c_n را دلخواه تلقی کنیم، آنگاه رابطهٔ (۱۱) شامل تمام جوابهای دستگاه (۳) می‌باشد، و معمولاً آن را جواب عمومی می‌نامند. هر مجموعهٔ $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ ازجوابهای معادلهٔ (۳) راکه درهر نقطهٔ فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ مستقل خطی باشند یك مجموعهٔ اساسی جوابها دراین فاصله می‌نامند.

برای اثبات قضیهٔ ۴.۷ نشان می‌دهیم که هرجواب داده شدهٔ معادلهٔ (۳) مانند $\boldsymbol{\phi}$ به‌ازای مقادیر مناسب c_1، ...، c_n به‌صورت

$$\boldsymbol{\phi}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

نوشته می‌شود. فرض کنیم که $t=t_0$ نقطه‌ای در فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ باشد و فرض کنیم $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\phi}(t_0)$. اکنون می‌خواهیم بدانیم که آیا جوابی به‌صورت

$$\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

وجود دارد که درهمان شرط اولیهٔ $\mathbf{x}(t_0)=\boldsymbol{\xi}$ نیز صدق کند. یعنی، می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان مقادیر c_1، . . . ، c_n را طوری تعیین کرد که

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0)=\boldsymbol{\xi} \qquad (۱۲)$$

یا به صورت اسکالری

$$\begin{aligned} c_1x_{11}(t_0)+\cdots+c_nx_{1n}(t_0)&=\xi_1,\\ &\vdots\\ c_1x_{n1}(t_0)+\cdots+c_nx_{nn}(t_0)&=\xi_n. \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه معادلات (۱۳) دارای جواب یکتای c_1، . . . ، c_n باشند، دقیقاً آن است که دترمینان ضرایب که همان رونسکین $W[\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}]$ در نقطهٔ $t=t_0$ است مخالف صفر باشد. فرض آنکه $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ درسراسر $\alpha<t<\beta$ مستقل خطی‌اند متضمن آن است که $W[\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}]$ در $t=t_0$ صفر نیست، وبنابراین جوابی (یکتا) برای معادلهٔ (۳) به صورت $\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ وجود دارد که درشرط اولیهٔ (۱۲) نیز صدق می‌کند. بنابر قسمت **یکتایی** قضیهٔ ۲.۷ این جواب همان $\boldsymbol{\phi}(t)$ است، وازاین‌رو $\boldsymbol{\phi}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$، همان **مطلبی** که باید اثبات می‌شد.

قضیهٔ ۵.۷. اگر $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ جوابهای معادلهٔ (۳) روی فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ باشند، آنگاه در این فاصله $W[\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}]$ یا متحد با صفر است یا هیچگاه صفر نمی‌شود.

اهمیت قضیهٔ ۵.۷ دراین‌است که ما را از **ضرورت** بررسی $W[\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}]$ در همهٔ نقاط فاصلهٔ مورد توجه معاف می‌کند، و موجب می‌شود که بتوان **فقط** با محاسبهٔ رونسکین در یك نقطهٔ مناسب در فاصلهٔ مزبور، تعیین کرد که آیا $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ یك مجموعهٔ اساسی جواب تشکیل می‌دهند یا نه.

برای اثبات قضیهٔ ۵.۷ نخست نشان می‌دهیم که رونسکین $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ در معادلهٔ دیفرانسیل (مسئلهٔ ۲ را ببینید)

$$\frac{dW}{dt}=(p_{11}+p_{22}+\cdots+p_{nn})W. \qquad (۱۴)$$

صدق می‌کند. بنابراین W یك تابع نمایی است، ومدعای قضیه فوراً نتیجه می‌شود. عبارت

W که با حل معادلهٔ (۱۴) به‌دست می‌آید به فرمول آبل موسوم است؛ به شباهت این معادله با معادلهٔ (۱۳) بند ۲.۳ توجه شود.

طریق دیگر، برای اثبات قضیهٔ ۵.۷ این است که نشان دهیم اگر n جواب $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ معادلهٔ (۳) در یك نقطهٔ $t=t_0$ وابستهٔ خطی باشند، آنگاه باید درهر نقطهٔ $\alpha < t < \beta$ وابستهٔ خطی باشند (مسئلهٔ ۸ را ببینید). در نتیجه، اگر $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ در یك نقطه مستقل خطی باشند باید درهر نقطهٔ فاصلهٔ مزبور مستقل خطی باشند.

قضیهٔ زیر مبین آن است که همواره دستگاه (۳) حداقل دارای یك مجموعهٔ اساسی جواب است.

قضیهٔ ۶.۷. فرض کنیم

$$\mathbf{e}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\mathbf{e}^{(n)}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

وعلاوه براین‌گیریم $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشندکه به‌ترتیب درشرایطاولیهٔ

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0)=\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0)=\mathbf{e}^{(n)} \tag{۱۵}$$

صدق می‌کنند، t_0 نقطه‌ای در $\alpha < t < \beta$ است. آنگاه $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ یك مجموعهٔ اساسی جواب دستگاه (۳) است.

برای اثبات این قضیه، توجه شود که قضیهٔ ۲.۷ وجود و یکتایی جوابهای $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ راکه درقضیهٔ ۶.۷ آمده است تأمین می‌کند. به‌آسانی می‌توان دیدکه رونسکین این جوابها برای $t=t_0$ برابر یك‌است؛ بنابراین $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ یك مجموعهٔ اساسی جواب است.

همینکه یك مجموعهٔ اساسی جواب به دست‌آمد مجموعه‌های دیگر را می‌توان با تشکیل ترکیبهای خطی (مستقل) مجموعهٔ اول‌ایجاد کرد. از لحاظ نظری ساده‌ترین مجموعه همان است که قضیهٔ ۶.۷ به دست می‌دهد.

خلاصه آنکه، هر مجموعهٔ n جواب مستقل خطی دستگاه (۳) تشکیل یك مجموعهٔ اساسی جواب می‌دهد. تحت شرایطی که دراین بند بیان شد، این قبیل مجموعه‌های‌اساسی همواره وجود دارند، وهرجواب دستگاه (۳) را می‌توان به صورت ترکیبی خطی ازهر مجموعهٔ اساسی جواب نمایش داد.

مسائل

۱. با استفاده از جبر ماتریسی، درستی گزارهٔ ذیل قضیهٔ ۳.۷ را به ازای مقدار صحیح دلخواه k اثبات کنید.

۲. دراین مسئله به طرح اثباتی برای قضیهٔ ۵.۷ درحالت $n = ۲$ می‌پردازیم. فرض کنیم $\mathbf{x}^{(۱)}$ و $\mathbf{x}^{(۲)}$ به‌ازای $\alpha < t < \beta$ جوابهای معادلهٔ (۳) و W رونسکین $\mathbf{x}^{(۱)}$ و $\mathbf{x}^{(۲)}$ باشد.

(الف) نشان دهید که

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_۱^{(۱)}}{dt} & \dfrac{dx_۱^{(۲)}}{dt} \\ x_۲^{(۱)} & x_۲^{(۲)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_۱^{(۱)} & x_۱^{(۲)} \\ \dfrac{dx_۲^{(۱)}}{dt} & \dfrac{dx_۲^{(۲)}}{dt} \end{vmatrix} .$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ (۳)، نشان دهید که

$$\frac{dW}{dt} = (p_{۱۱} + p_{۲۲})W .$$

(ج) $W(t)$ را با حل معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست آمده درقسمت (ب) بیابید. با استفاده ازاین عبارت نتیجهٔ مذکور درقضیهٔ ۵.۷ را به‌دست آورید.

*(د) این روش‌را طوری تعمیم دهید که قضیهٔ ۵.۷ را به ازای مقدار دلخواه n اثبات کند.

۳. نشان دهید که رونسکین دو مجموعهٔ اساسی جواب دستگاه (۳) حداکثر می‌توانند دریك ضریب ثابت تفاوت داشته باشند.

راهنمایی: ازمعادلهٔ (۱۴) استفاده کنید.

۴. اگر $x_۱ = y$ و $x_۲ = y'$ ، آنگاه معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰ \qquad \text{(یك)}$$

با دستگاه

$$\begin{aligned} x_۱' &= x_۲ , \\ x_۲' &= -q(t)x_۱ - p(t)x_۲ \end{aligned} \qquad \text{(دو)}$$

متناظر است. نشان‌دهید که اگر $\mathbf{x}^{(۱)}$ و $\mathbf{x}^{(۲)}$ یك‌مجموعهٔ‌اساسی‌جواب‌معادلات(دو)، و $y^{(۱)}$ و $y^{(۲)}$ یك‌مجموعهٔ اساسی جواب‌معادلهٔ (یك) باشند، آنگاه $W[y^{(۱)}, y^{(۲)}] = cW[\mathbf{x}^{(۱)}, \mathbf{x}^{(۲)}]$، که در آن c مقدار ثابت ناصفر است.

راهنمایی: $y^{(۱)}(t)$ و $y^{(۲)}(t)$ باید ترکیبهای خطی $x_{۱۱}(t)$ و $x_{۱۲}(t)$ باشند.

۵. نشان دهید که جواب عمومی $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ برابر مجموع یك جواب

خصوصی $\mathbf{x}^{(p)}$ این معادله وجواب عمومی $\mathbf{x}^{(c)}$ مربوط به معادلهٔ همگن متناظر است.

۶. بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) رونسکین $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ را حساب کنید.

(ب) $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ درچه فاصله‌هایی مستقل خطی‌اند؟

(ج) دربارهٔ ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل همگنی که $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در آن صدق می‌کنند چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(د) این دستگاه معادلات را بیابید ونتایج قسمت (ب) را تحقیق کنید.

۷. بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید، و به همان سؤالات مسئلهٔ ۶ پاسخ دهید.

دومسئلهٔ زیر روش دیگری برای اثبات قضیهٔ ۴.۷ به دست می‌دهند.

۸. فرض کنیم که $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(m)}$ جوابهای $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ روی فاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ باشند. فرض کنیم که $\mathbf{P}$ پیوسته است وگیریم t_0 نقطهٔ دلخواهی درفاصلهٔ مزبور باشد. نشان دهیدکه $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(m)}$ به‌ازای $\alpha<t<\beta$ وابسته خطی‌اند اگر (وفقط اگر) $\mathbf{x}^{(1)}(t_0)$، ...، $\mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ وابسته‌خطی باشند. به‌عبارت‌دیگر، $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(m)}$ روی فاصلهٔ $(\alpha\ ,\ \beta)$ وابسته خطی‌اند اگر درنقطه‌ای ازاین فاصله وابسته خطی باشند.

راهنمایی: می‌توان ثابتهای c_1، ...، c_m را طوری تعیین کرد که $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0)+\cdots+c_m\mathbf{x}^{(m)}(t_0)=0$. قرار دهید

$$\mathbf{z}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_m\mathbf{x}^{(m)}(t)$$

وبا استفاده ازقضیهٔ یکتایی نشان دهیدکه به‌ازای هر t در $\alpha<t<\beta$ داریم $\mathbf{z}(t)=0$.

۹. فرض کنیم $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ باشند، که درآن $\mathbf{P}$ روی $\alpha<t<\beta$ پیوسته است.

(الف) نشان دهیدکه هرجواب $\mathbf{x}=\mathbf{z}(t)$ را می‌توان باانتخاب مناسب ثابتهای c_1، ...، c_n به‌صورت زیرنوشت

$$\mathbf{z}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

راهنمایی: از نتیجهٔ مسئلهٔ ۷ بند ۴.۷، ومسئلهٔ ۸ فوق استفاده کنید.

(ب) نشان دهیدکه عبارت متناظر با جواب $\mathbf{z}(t)$ در قسمت (الف) یکتاست؛ یعنی، اگر

$$\mathbf{z}(t)=k_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\cdots+k_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

آنگاه $k_1=c_1$، ...، $k_n=c_n$.

راهنمایی: نشان دهیدکه بهازای هر t در $\alpha < t < \beta$ داریم

$$(k_1 - c_1)\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + (k_n - c_n)\mathbf{x}^{(n)}(t) = 0$$

و از استقلال خطی $\mathbf{x}^{(1)}$، ...، $\mathbf{x}^{(n)}$ استفاده کنید.

۶.۷ دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

دراین بند مقدمتاً بهبررسی طرزساختن جواب عمومی دستگاه معادلات خطی همگن باضرایب ثابت یعنی، دستگاهی بهصورت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (1)$$

راکه در آن $\mathbf{A}$ یك ماتریس ثابت $n \times n$ است می‌پردازیم . همانند روش حل معادلات خطی مرتبهٔ دوم دربند ۵.۳، برای معادلهٔ (۱) جوابهایی بهصورت

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt} \qquad (2)$$

درنظر می‌گیریم که درآن r وبردار ثابت $\boldsymbol{\xi}$ باید تعیین شوند. چون $\mathbf{x}$ را از رابطهٔ (۲) در دستگاه (۱) قراردهیم به دست می‌آید

$$r\boldsymbol{\xi} e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} e^{rt} \,.$$

باحذف سازهٔ اسکالری ناصفر e^{rt} داریم $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$ یا

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = 0 \,, \qquad (3)$$

که درآن $\mathbf{I}$ ماتریس‌واحد $n \times n$ است. بدین‌سان، برای حل‌دستگاه معادلات‌دیفرانسیل(۱) باید دستگاه معادلات جبری (۳) را حل کرد. این دقیقاً همان مسئلهٔ تعیین مقادیر ویژه وبردارهای ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ است. بنابراین بردار $\mathbf{x}$ که بارابطهٔ (۲) داده شده است، هنگامی جواب معادلهٔ (۱) است که r مقدار ویژهٔ ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ و $\boldsymbol{\xi}$ بردار ویژهٔ متناظر با آن باشد.

مثال ۱ . مطلوب است جواب عمومی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \,. \qquad (4)$$

فرض کنیم که $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$، باقراردادن $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ (۴)، بهدستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

می‌رسیم. دستگاه معادلات (۵) دارای جواب ناصفر است اگر، و فقط اگر، دترمینان ضرایب صفر شود. بدین‌سان مقادیر مطلوب r از معادلهٔ

$$\begin{vmatrix} ۱-r & ۱ \\ ۴ & ۱-r \end{vmatrix} = (۱-r)^۲ - ۴$$

$$= r^۲ - ۲r - ۳ = ۰ \qquad (۶)$$

به دست می‌آید. معادلهٔ (۶) دارای ریشه‌های $r_۱ = ۳$ و $r_۲ = -۱$ است که همان مقادیر ویژهٔ ماتریس ضرایب درمعادلهٔ (۴) می‌باشند. اگر $r = ۳$، آنگاه دستگاه (۵) به‌یک معادلهٔ

$$-۲\xi_۱ + \xi_۲ = ۰ \qquad (۷)$$

تبدیل می‌شود. بدین‌سان $\xi_۲ = ۲\xi_۱$ وبردار ویژهٔ متناظر با $r_۱ = ۳$ را می‌توان به صورت

$$\boldsymbol{\xi}^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} \qquad (۸)$$

اختیار کرد. به همین ترتیب، متناظـر با $r_۲ = -۱$ داریم $\xi_۲ = -۲\xi_۱$، بنابراین بردار ویژه عبارت است‌از

$$\boldsymbol{\xi}^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \end{pmatrix}. \qquad (۹)$$

متناظراً جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل عبارتند‌از

$$\mathbf{x}^{(۱)}(t) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} e^{۳t}, \quad \mathbf{x}^{(۲)}(t) = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \end{pmatrix} e^{-t}. \qquad (۱۰)$$

رونسکین این جوابها عبارت است از

$$W[\mathbf{x}^{(۱)}, \mathbf{x}^{(۲)}](t) = \begin{vmatrix} e^{۳t} & e^{-t} \\ ۲e^{۳t} & -۲e^{-t} \end{vmatrix} = -۴e^{۲t} \qquad (۱۱)$$

کــه هیچگاه صفر نمی‌شود. بنابراین جوابهای $\mathbf{x}^{(۱)}$ و $\mathbf{x}^{(۲)}$ تشکیل یــك مجموعــهٔ اساسی می‌دهند، وجواب عمومی دستگاه (۴) عبارت است‌از

$$\mathbf{x} = c_۱\mathbf{x}^{(۱)}(t) + c_۲\mathbf{x}^{(۲)}(t)$$

$$= c_۱\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} e^{۳t} + c_۲\begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \end{pmatrix} e^{-t} \qquad (۱۲)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه‌اند. این با جوابی که در بند ۲.۷ باروش حذف یافتیم یکی است.

درمورد دستگاه عمومی (۱) نیزهمانند مثال بالاعمل می‌کنیم. برای تعیین جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۱) باید مقادیر ویــژه وبردارهای ویــژهٔ $\mathbf{A}$ را ازدستگاه جبری متناظر (۳) به دست آورد. مقادیرویژهٔ r_1 ، . . . ، r_n (که لزومی ندارد همهٔ آنها متفاوت باشند) ریشه‌های معادلهٔ چند جمله‌ای

$$\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I})=0 \tag{۱۳}$$

هستند. ماهیت مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر، ماهیت جواب عمومی دستگاه (۱) را تعیین می‌کند.

دستگاههای هرمیتی. ساده‌ترین حالت آن است که $\mathbf{A}$ یك ماتریس هرمیتی باشد. چنانکه در بند ۴.۷ بیان‌شد، مقادیرویژهٔ r_1 ، . . . ، r_n دراین حالت همه حقیقی‌اند. علاوه براین، حتی هنگامی که برخی ازمقادیرویژه مکرر باشند، همواره یك مجموعهٔ متشکل از n بردار ویژهٔ مستقل خطی $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ ، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ وجود دارد. بنابراین جوابهای متناظــر دستگاه دیفرانسیلی (۱) عبارتنداز

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}\ , \ldots ,\ \mathbf{x}^{(n)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}\ . \tag{۱۴}$$

برای اثبات آنکه این جوابها تشکیل یك مجموعهٔ اساسی می‌دهند، بــه محاسبهٔ رونسکین می‌پردازیم:

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t)=\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}e^{r_1 t} & \ldots & \xi_1^{(n)}e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)}e^{r_1 t} & \ldots & \xi_n^{(n)}e^{r_n t} \end{vmatrix}$$

$$=e^{(r_1+\cdots+r_n)t}\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \ldots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \ldots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{۱۵}$$

نخست دیده می‌شود که تابع نمایی مزبور هیچگاه صفر نیست. دیگر آنکه، چون بردارهای ویژهٔ $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ ، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ مستقل خطی‌اند، دترمینان موجود درجملــهٔ آخــر معادلهٔ (۱۵) نیز هیچگاه صفر نیست. درنتیجه رونسکین $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$ هیچگاه صفــر نیست، و بنابراین $\mathbf{x}^{(1)}$ ، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ تشکیل یك مجموعهٔ اساسی جواب می‌دهند. بدین‌سان هنگامــی که $\mathbf{A}$ ماتریس هرمیتی باشد، جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x}=c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}+\ldots+c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}\ . \tag{۱۶}$$

طبقهٔ‌مهمی ازماتریسهای‌هرمیتی‌راماتریسهای‌متقارن‌حقیقی‌تشکیل‌می‌دهند. اگر $\mathbf{A}$ متقارن وحقیقی باشد، آنگاه بردارهای ویژهٔ $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، ...، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ وهمچنین مقادیرویژهٔ r_1، ...، r_n همه حقیقی‌اند. بنابراین جوابهایی که‌باروابطهٔ (۱۴) داده شده‌اندتوابعی بامقادیرحقیقی‌اند. اما، اگرماتریس هرمیتی $\mathbf{A}$ حقیقی نباشد، آنگاه عموماً بردارهای ویــژه دارای قسمتهای موهومی ناصفرند، وجوابهای (۱۴) توابعی بامقادیر مختلط‌اند.

مثال ۲. مطلوب است تعیین جواب عمومی

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{۱۷}$$

ماتریس ضرایب درمعادلهٔ (۱۷) متقارن وحقیقی است، بنابراین مــی‌توان بــه‌همان روشی که دربالا بیان شد عمل کرد. فرض $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ به‌دستگاه جبری زیر می‌انجامد

$$\begin{pmatrix} 1-r & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{۱۸}$$

مقادیر ویژه درمعادلهٔ

$$\begin{vmatrix} 1-r & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-r \end{vmatrix}=(1-r)(-1-r)-3$$

$$=r^2-4=0 \tag{۱۹}$$

صدق می‌کنند. بدین‌سان $r_1=2$ و $r_2=-2$. به‌ازای $r=2$، معادلهٔ (۱۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{۲۰}$$

بنابراین $\xi_1=\sqrt{3}\,\xi_2$ و $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ بردار ویژهٔ متناظر به‌مقدارویژهٔ $r_1=2$ را می‌توان به‌صورت

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{۲۱}$$

اختیارکرد. به‌همین طریق، متناظر به‌مقدارویژهٔ $r_2=-2$، داریم $\xi_2=-\sqrt{3}\,\xi_1$، بنابراین بردار ویژه عبارت‌است از

$$\boldsymbol{\xi}^{(۲)}=\begin{pmatrix} ۱ \\ -\sqrt{۳} \end{pmatrix}. \qquad (۲۲)$$

بدین‌سان جواب عمومی معادلهٔ (۱۷) عبارت است‌از

$$\mathbf{x}=c_۱\begin{pmatrix} \sqrt{۳} \\ ۱ \end{pmatrix}e^{۲t}+c_۲\begin{pmatrix} ۱ \\ -\sqrt{۳} \end{pmatrix}e^{-۲t} \qquad (۲۳)$$

مثال ۳. مطلوب است تعیین جواب عمومی

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}\mathbf{x}. \qquad (۲۴)$$

در اینجا نیز دیده می‌شود که ماتریس ضرایب متقارن و حقیقی است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ این ماتریس‌را درمثال ۴ بند ۴.۷ یافتیم،

$$r_۱=۲;\quad \boldsymbol{\xi}^{(۱)}=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \qquad (۲۵)$$

$$r_۲=-۱,\quad r_۳=-۱;\quad \boldsymbol{\xi}^{(۲)}=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}^{(۳)}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}. \qquad (۲۶)$$

بنابراین یك مجموعهٔ اساسی جواب معادلهٔ (۲۴) عبارت است‌از

$$\mathbf{x}^{(۱)}(t)=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}e^{۲t},\quad \mathbf{x}^{(۲)}(t)=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{-t},\ \mathbf{x}^{(۳)}(t)=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{-t} \qquad (۲۷)$$

وجواب عمومی چنین است

$$\mathbf{x}=c_۱\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}e^{۲t}+c_۲\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{-t}+c_۳\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{-t}. \qquad (۲۸)$$

این مثال، مبین این نکته است‌که حتی هنگامی‌که یکی‌از مقادیرویژه ($r=-۱$) مضاعف

باشد، بازهم امکان دارد بتوان دوبردار ویژهٔ مستقل خطی $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ به دست آورد ودر نتیجه جواب عمومی (۲۸) را ساخت.

دستگاههای ناهرمیتی. اگرماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ در دستگاه (۱)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

هرمیتی نباشد، آنگاه تعیین جواب پیچیده‌ترمی‌شود. نخست فرض‌کنیم که $\mathbf{A}$ حقیقی است. دراین صورت برای مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ سه حالت وجود دارد:

۱. همهٔ مقادیرویژه حقیقی ومتمایزند.
۲. برخی ازمقادیرویژه به‌صورت زوجهای مختلط مزدوج‌اند.
۳. برخی ازمقادیرویژه مکررند.

درحالت اول به‌اشکالی برنمی‌خوریم. متناظر به‌هرمقدارویژه تنها یك بردار ویژهٔ حقیقی مستقل خطی وجود دارد، ودرنتیجه n جواب مستقل خطی به‌صورت (۱۴) به‌دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی بازهم به وسیلهٔ معادلهٔ (۱۶) داده می‌شود که در آن r_1، . . .، r_n همه متمایزفرض شده‌اند. مثال ۱ بالا این حالت راتوضیح می‌دهد.

اگربرخی ازمقادیر ویژه به‌صورت زوجهای مختلط مزدوج باشند، آنگاه بازهم n جواب مستقل خطی به صورت (۱۴) وجود دارد، به شرط آنکه همهٔ مقادیرویژه متمایز باشند. البته، جوابهای حاصل ازمقادیرویژهٔ مختلط توابعی بامقدارمختلط‌اند. اما، همانند بند ۱.۵.۳، می‌توان یك مجموعهٔ‌کامل جواب بامقدارحقیقی به‌دست‌آورد. این موضوع را دربند ۷.۷ بررسی می‌کنیم.

هنگامی که مقدارویژه‌ای مکررباشد بادشواریهای مهمتری مواجه می‌شویم. دراین حالت امکان دارد تعداد بردارهای ویژهٔ مستقل خطی متناظر، کوچکتر ازمرتبهٔ تکرار مقدار ویژهٔ مزبورباشد، مانند مثال ۳ بند ۴.۷. دراین‌حالت تعداد جوابهای مستقل‌خطی به‌صورت $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ از n کوچکتراست وبرای ساختن یك مجموعهٔ اساسی جواب‌لازم می‌آیدکه جوابهایی به‌صورت دیگرجستجوکنیم. این وضعیت تااندازه‌ای مشابه حالتی ازمعادلهٔ خطی‌مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت است که درآن بهازای یك ریشهٔ مکررمعادلهٔ مشخصه جوابهایی به‌صورت e^{rx}، xe^{rx}، x^2e^{rx}، . . . به‌دست آمد. حالت مقادیر ویژهٔ مکرررا دربند ۸.۷ بررسی می‌کنیم.

بالاخره، اگر $\mathbf{A}$ مختلط باشد، اما هرمیتی نباشد، در این صورت لزومی ندارد که مقادیرویژهٔ مختلط به‌صورت زوجهای مزدوج باشند، وبردارهای ویژه نیزمعمولاً مختلط‌اند حتی اگرمقدارویژهٔ متناظرحقیقی باشد. هنگامی که مقادیرویژه متمایزباشند جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل(۱) بازهم به‌صورت(۱۴) خواهند بود، اما، عموماً همهٔ جوابها توابعی بامقدار مختلط‌اند.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۱۰ جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید.

۱. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۲. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۳. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۴. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۵. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۶. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۷. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۸. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۹. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۱۰. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

درهریك ازمسائل ۱۱ تا ۱۴ مسئلهٔ مقداراولیهٔ داده شده را حل کنید.

۱۱. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

۱۲. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

۱۳. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

۱۴. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

۱۵. دستگاه $t\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$ نظیر معادلهٔ اویلر مرتبهٔ دوم است (بند ۴.۴). فرض کنیم که $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}t^r$، که در آن $\boldsymbol{\xi}$ یك بردار ثابت است، نشان دهید که $\boldsymbol{\xi}$ و r باید در $(\mathbf{A}-r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$

صدق کنند؛ ونیز نشان دهید که برای پیداکردن جوابهای ناصفرمعادلهٔ دیفرانسیل مزبور باید r ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ $\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I})=0$ باشد.

با توجه به‌مسئلهٔ ۱۵، دستگاه معادلات هریك ازمسائل ۱۶ تا ۱۹ را حل کنید. فرض کنید که $t>0$.

۱۶. $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **۱۷.** $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۱۸. $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **۱۹.** $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲۰. دستگاه مرتبهٔ دوم $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$ را درنظر می‌گیریم. با فرض $r_1\neq r_2$، جواب عمومی عبارت است از

$$\mathbf{x}=c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1t}+c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2t}$$

به‌شرط آنکه $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ مستقل خطی باشند. دراین مسئله می‌خواهیم استقلال خطی $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ را بااثبات آنکه فرض بستگی خطی آنها به‌تناقض می‌انجامد نشان دهیم.

(الف) توجه شودکه $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ به‌ترتیب درمعادلات ماتریسی $(\mathbf{A}-r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)}=0$ و $(\mathbf{A}-r_2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(2)}=0$ صدق می‌کنند.

(ب) نشان دهیدکه $(\mathbf{A}-r_2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)}=(r_1-r_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)}$

(ج) فرض کنیم که $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ وابسته خطی‌اند. آنگاه $c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}+c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}=0$ و حداقل یکی ازمقادیر c_1 و c_2 صفرنیست؛ فرض کنیم $c_1\neq 0$. نشان دهیدکه

$$(\mathbf{A}-r_2\mathbf{I})\,(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}+c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)})=0\,.$$

ونیز نشان دهیدکه

$$(\mathbf{A}-r_2\mathbf{I})\,(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}+c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)})=c_1(r_1-r_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)}$$

بنابراین $c_1=0$، که یك تناقض است. درنتیجه $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ مستقل خطی‌اند.

(د) استدلال قسمت (ج) را برای اثبات حالتی که c_1 برابرصفر و c_2 مخالف صفر است تغییردهید.

(ه) استدلال مشابهی برای حالت $n=3$ طرح کنید؛ توجه شودکه این روش را می‌توان به‌مقداردلخواه n تعمیم داد.

۲۱. معادلهٔ

$$ay''+by'+cy=0 \qquad \text{(یك)}$$

راکه درآن a، b و c ثابت‌اند درنظر می‌گیریم. درفصل۳ نشان داده شدکه جواب عمومی بستگی به‌ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ

$$ar^2+br+c=0 \qquad \text{(دو)}$$

دارد.

(الف) معادلهٔ (یك) را باقراردادن $x_1 = y$ ، $x_2 = y'$ به‌یك دستگاه معادلات مرتبهٔ اول تبدیل کنید. دستگاه معادلات $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ راکه در آن $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ صدق می‌کند، بیابید.

(ب) معادله‌ای بیابیدکه مقادیرویژهٔ ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ درقسمت (الف) را به‌دست دهد. توجه شودکه این‌معادله درست همان معادلهٔ مشخصهٔ (دو) متناظر به‌معادلهٔ (یك) است.

۲۲. دراین مسئله طرز استفاده ازروش‌کاهش مرتبه را بـرای دستگاههای معادلات نشان می‌دهیم. این‌روش درمورد دستگاههایی‌که دارای یك مجموعهٔ‌کامل جواب به‌صورت $\boldsymbol{\xi} e^{rt}$ نیستند به‌کارمی‌رود. دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad \text{(یك)}$$

را درنظرمی‌گیریم.

(الف) تحقیق کنیدکه $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده صدق می‌کند.

(ب) متغیروابستهٔ جدیدی باتبدیل

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \text{(دو)}$$

درنظرمی‌گیریم. توجه شودکه این‌تبدیل ازماتریس واحد باقراردادن جواب معلوم به‌جای ستون‌دوم آن به‌دست آمده است. باجایگذاری $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ (یك) نشان دهیدکه $\mathbf{y}$ دردستگاه معادلات زیرصدق می‌کند

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \text{(سه)}$$

(ج) معادلهٔ (سه) راحل‌کنید ونشان دهیدکه

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-t} \\ -\frac{1}{3} e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(چهار)}$$

که درآن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه‌اند.

(د) بااستفاده ازمعادلهٔ (دو)، نشان دهیدکه

$$\mathbf{x}=-\frac{c_1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{2t} \qquad \text{(پنج)}$$

جملهٔ اول یك جواب مستقل دیگر معادلهٔ (یك) است. این همان روش کاهش مرتبه است که دربارهٔ دستگاه معادلات مرتبهٔ دوم اعمال می‌شود.

درمسائل ۲۳ و ۲۴ بااستفاده ازروش کاهش مرتبه (مسئلهٔ ۲۲) دستگاه معادلات داده شده را حل کنید.

۰۲۳ $\quad \mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & -4\\4 & -7\end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad$ ۰۲۴ $\quad \mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

مدارهای الکتریکی. مسائل ۲۵ و ۲۶ دربارهٔ مدار الکتریکی مذکور درمسئلهٔ ۹ بند ۱.۷ می‌باشند که برای آن دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به‌دست آمد

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\V\end{pmatrix} \qquad \text{(یك)}$$

۰۲۵ (الف) مطلوب است تعیین جواب عمومی معادلهٔ (یك) درصورتی که $R_1=1$ اهم، $R_2=3/5$ اهم، $L=2$ هانری، و $C=2/3$ فاراد.
(ب) نشان دهید که وقتی $t\to\infty$، مقادیر اولیهٔ $I(0)$ و $V(0)$ هرچه باشند

$I(t)\to 0$ و $V(t)\to 0$.

۰۲۶ دستگاه معادلات دیفرانسیل (یك) بالا را درنظر می‌گیریم.
(الف) مطلوب است تعیین شرطی که R_1، R_2، C و L باید درآن صدق کنند تا مقادیرویژهٔ ماتریس ضرایب حقیقی ومتمایز باشند.
(ب) اگرشرطی که درقسمت (الف) به‌دست آمد برقرار باشد، نشان دهید که هردو مقدار ویژه منفی‌اند. آنگاه نشان دهید که وقتی $t\to\infty$، شرایط اولیه هرچه باشند $I(t)\to 0$ و $V(t)\to 0$.
*(ج). اگرشرطی که درقسمت (الف) به‌دست‌آمد برقرارنباشد، آنگاه مقادیرویژه یا مختلط‌اند یا مکرر. آیا فکر می‌کنید که دراین حالتها نیزوقتی $t\to\infty$ خواهیم داشت $I(t)\to 0$ و $V(t)\to 0$؟
راهنمایی: یکی ازراه حلها برای قسمت (ج) آن است که دستگاه (یك) را به‌یك معادلهٔ مرتبهٔ دوم تبدیل کنیم. دربندهای ۷.۷ و ۸.۷ نیز به‌بحث دربارهٔ مقادیرویژهٔ مختلط و مکرر می‌پردازیم.

۷.۷ مقادیر ویژهٔ مختلط

دراین بند نیز به‌بررسی دستگاه n معادلهٔ خطی همگن باضرایب ثابت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{۱}$$

می‌پردازیم وفرض می‌کنیم که در آن ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ حقیقی باشد. اگر بخواهیم جوابهایی به‌صورت $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ پیداکنیم، آنگاه همانند بند ۶.۷ نتیجه می‌شودکه r باید یك مقدار ویژهٔ ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ و $\boldsymbol{\xi}$ بردارویژهٔ متناظر باشد. توجه شودکه مقادیر ویژهٔ r_1، . . .، r_n ماتریس $\mathbf{A}$ ریشه‌های معادلهٔ

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{۲}$$

هستند و بردارهای ویژهٔ متناظردر

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{۳}$$

صدق می‌کنند.

اگر $\mathbf{A}$ حقیقی باشد، آنگاه ضرایب معادلهٔ چند جمله‌ای (۲) حقیقی‌اند و مقادیر ویژهٔ مختلط باید به‌صورت زوجهای مزدوج باشند. مثلاً، اگر $r_1 = \lambda + i\mu$، که در آن λ و μ حقیقی‌اند، یك مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$ باشد، آنگاه $r_2 = \lambda - i\mu$ نیزیك مقدارویژه است. علاوه براین بردارهای ویژهٔ $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ نیزمختلط مزدوج‌اند. برای اثبات این‌نکته، فرض کنیم‌که r_1 و $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ در

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = 0 \tag{۴}$$

صدق‌کنند. چون از این معادله مزدوج مختلط بگیریم، باتوجه به‌آنکه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{I}$ با مقادیر حقیقی‌اند، خواهیم داشت

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = 0 \tag{۵}$$

که در آن $\bar{r}_1$ و $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ به‌ترتیب مزدوجهای مختلط r_1 و $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ اند. به‌عبارت دیگر، $r_2 = \bar{r}_1$ نیزیك مقدار ویژه، و $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ بردارویژهٔ متناظرباآن است. جوابهای

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} e^{\bar{r}_1 t} \tag{۶}$$

که بدین‌سان برای معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌دست می‌آیند نیزمزدوج یکدیگرند. بنابراین، باتعمیم قضیهٔ ۹.۳ در مورد دستگاهها (که به‌آسانی انجام می‌گیرد) می‌توان دوجواب با مقدارحقیقی برای معادلهٔ (۱) متناظربا مقادیر ویژهٔ r_1 و r_2 با محاسبهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ یا $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ که باروابط (۶) داده شده‌اند به‌دست آورد.

اگرقراردهیم $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$، که در آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ حقیقی‌اند، آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t) \end{aligned} \tag{۷}$$

باجداکردن قسمتهای حقیقی وموهومی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ بهدست می‌آید

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos\mu t-\mathbf{b}\sin\mu t)+ie^{\lambda t}(\mathbf{a}\sin\mu t+\mathbf{b}\cos\mu t) \qquad (۸)$$

اگرقراردهیم $\mathbf{x}^{(1)}(t)=\mathbf{u}(t)+i\mathbf{v}(t)$، آنگاه بردارهای

$$\mathbf{u}(t)=e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos\mu t-\mathbf{b}\sin\mu t), \qquad (\text{۹ الف})$$

$$\mathbf{v}(t)=e^{\lambda t}(\mathbf{a}\sin\mu t+\mathbf{b}\cos\mu t) \qquad (\text{۹ ب})$$

جوابهای با مقدار حقیقی معادلهٔ (۱) خواهند بود. می‌توان نشان دادکه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ جوابهای مستقل خطی‌اند (مسئلهٔ ۱۳ را ببینید).

بهعنوان مثال، فرض‌کنیم که $r_1=\lambda+i\mu$، $r_2=\lambda-i\mu$، و ریشه‌های دیگر، r_3، . . . ، r_n همه حقیقی ومتمایزند. اگر بردارهای ویژهٔ متناظررا بهصورت

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}=\mathbf{a}+i\mathbf{b}\ ,\ \boldsymbol{\xi}^{(2)}=\mathbf{a}-i\mathbf{b}\ ,\ \boldsymbol{\xi}^{(3)}\ ,\ \ldots\ ,\ \boldsymbol{\xi}^{(n)}$$

درنظر بگیریم، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x}=c_1\mathbf{u}(t)+c_2\mathbf{v}(t)+c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{r_3t}+\ldots+c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_nt} \qquad (۱۰)$$

که درآن $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ با روابط (۹) داده شده‌اند. باید توجه داشت‌که این تحلیل تنها هنگامی‌که ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ درمعادلهٔ (۱) حقیقی باشد قابل اجراست، زیرا تنها در این حالت مقادیرویژهٔ مختلط وبردارهای ویژهٔ مختلط بهصورت زوجهای مزدوج می‌باشند.

مثال ۱. مطلوب است تعیین یك مجموعهٔ اساسی جوابهای با مقدار حقیقی دستگاه

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{x}\,. \qquad (۱۱)$$

با فرض

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}e^{rt} \qquad (۱۲)$$

به دستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix}1-r & -1\\ 5 & -3-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (۱۳)$$

می‌رسیم که مقادیر ویژه وبردارهای ویژهٔ $\mathbf{A}$ را معین می‌کند. معادلهٔ مشخصه عبارت‌است‌از

$$\begin{vmatrix}1-r & -1\\ 5 & -3-r\end{vmatrix}=r^2+2r+2=0 \qquad (۱۴)$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتنداز $r_1=-1+i$ و $r_2=-1-i$. از معادلهٔ (۱۳) با محاسبهٔ ساده‌ای بردارهای ویژهٔ متناظر بهدست می‌آیند

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \qquad (15)$$

بنا براین یك مجموعهٔ اساسی جواب دستگاه (۱۱) چنین است

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}e^{(-1+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}e^{(-1-i)t} \qquad (16)$$

برای تعیین یك مجموعهٔ جواب بامقدارحقیقی، باید قسمتهای حقیقی‌وموهومی $\mathbf{x}^{(1)}$ یا $\mathbf{x}^{(2)}$ را به‌دست آوریم. در واقع

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t)&=\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}e^{-t}(\cos t+i\sin t)\\ &=\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ 2e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t \end{pmatrix} \qquad (17)\end{aligned}$$

بنا براین

$$\mathbf{u}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t+\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t+2\sin t \end{pmatrix} \qquad (18)$$

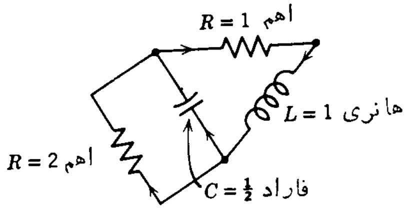
یك مجموعهٔ جواب با مقدار حقیقی معادلـهٔ (۱۱) می‌باشند. برای تحقیق آنکـه $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ مستقل خطی‌اند به محاسبهٔ رونسکین آنها می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}W(\mathbf{u},\mathbf{v})(t)&=\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(2\cos t+\sin t) & e^{-t}(-\cos t+2\sin t) \end{vmatrix}\\ &=e^{-2t}(-\cos^2 t+2\sin t\cos t-2\sin t\cos t-\sin^2 t)\\ &=-e^{-2t}.\end{aligned}$$

چون این رونسکین هیچگاه صفر نیست، نتیجه می‌شود که $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ یك مجموعهٔ اساسی جواب (بامقدار حقیقی) برای دستگاه (۱۱) تشکیل می‌دهند.

مثال ۲. مدار الکتریکی که درشکل ۶.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \qquad (19)$$



شکل ۶.۷

بیان می‌شودکه درآن I جریان درخودالقا، و V افت ولتاژبین دوسرخازن‌است‌.این‌معادلات درمسئلهٔ ۸ بند ۱.۷ به‌دست آمد. فرض کنیم که درزمان $t = ۰$ جریان برابر ۱ آمپر و ولتاژ برابر ۲ ولت باشد. $I(t)$ و $V(t)$ را برحسب زمان بیابید.

اگرفرض کنیم

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi} e^{rt} \qquad (۲۰)$$

معادلات جبری زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} -۱-r & -۱ \\ ۲ & -۱-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_۱ \\ \xi_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}. \qquad (۲۱)$$

مقادیر ویژه ازشرط زیر تعیین می‌شوند

$$\begin{vmatrix} -۱-r & -۱ \\ ۲ & -۱-r \end{vmatrix} = r^۲ + ۲r + ۳ = ۰ \qquad (۲۲)$$

بدین‌سان $r_۱ = -۱ + \sqrt{۲}i$ و $r_۲ = -۱ - \sqrt{۲}i$. بردارهای‌ویژهٔ متناظرازمعادلهٔ (۲۱) به‌دست می‌آیند

$$\boldsymbol{\xi}^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -\sqrt{۲}i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲}\ i \end{pmatrix} \qquad (۲۳)$$

بدین‌سان بردارهای ویژه به‌صورت $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ هستند، که درآن

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} ۰ \\ -\sqrt{۲} \end{pmatrix} \qquad (۲۴)$$

اگر همانند مثال ۱ عمل کنیم، یا ازفرمولهای (۹) استفاده شود، جوابهای با مقدار حقیقی

مستقل خطی زیر برای دستگاه (۱۹) عاید می‌شود:

$$\mathbf{u}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{۲}t\\ \sqrt{۲}\sin\sqrt{۲}t\end{pmatrix}\qquad \mathbf{v}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{۲}t\\ -\sqrt{۲}\cos\sqrt{۲}t\end{pmatrix}. \qquad (۲۵)$$

بنابراین جواب عمومی دستگاه (۱۹) عبارت است از

$$\begin{pmatrix}I\\ V\end{pmatrix}=c_۱e^{-t}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{۲}t\\ \sqrt{۲}\sin\sqrt{۲}t\end{pmatrix}+c_۲e^{-t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{۲}t\\ -\sqrt{۲}\cos\sqrt{۲}t\end{pmatrix}. \qquad (۲۶)$$

با اعمال شرایط اولیهٔ

$$\begin{pmatrix}I\\ V\end{pmatrix}(۰)=\begin{pmatrix}۱\\ ۲\end{pmatrix}, \qquad (۲۷)$$

خواهیم داشت

$$c_۱\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}+c_۲\begin{pmatrix}۰\\ -\sqrt{۲}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱\\ ۲\end{pmatrix}. \qquad (۲۸)$$

بدین‌سان $c_۱=۱$ و $c_۲=-\sqrt{۲}$. بامنظور کردن این مقادیر به‌جای $c_۱$ و $c_۲$ در رابطهٔ (۲۶) جواب مسئلهٔ مزبور معین می‌شود.

مسائل

درهر یك ازمسائل ۱ تا ۶، جواب عمومی دستگاه معادلات را برحسب توابعی با مقدار حقیقی بیان کنید.

۱. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}۳ & -۲\\ ۴ & -۱\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۱\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۳. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}۲ & -۵\\ ۱ & -۲\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۴. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}۲ & -\frac{۵}{۲}\\ \frac{۹}{۵} & -۱\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۵. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & -۲\\ ۳ & ۲ & ۱\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۶. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-۳ & ۰ & ۲\\ ۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & -۱ & ۰\end{pmatrix}\mathbf{x}$

درهریك ازمسائل ۷ و ۸ جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را بیابید.

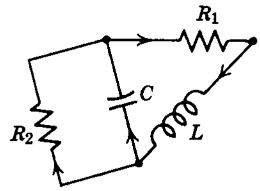
۷. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۱ & -۵ \\ ۱ & -۳ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(۰)=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$

۸. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(۰)=\begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \end{pmatrix}$

درهریك ازمسائل ۹ و ۱۰ دستگاه معادلات را باروش مسئلهٔ ۱۵ بند ۶.۷ حل کنید. فرض کنیدکه $t > ۰$.

۹. $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۱۰. $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}$



شکل ۷.۷

۱۱. مدار الکتریکی راکه درشکل ۷.۷ نشان داده شده درنظرمی‌گیریم. فرض کنیم که اهـم ۴ $= R_۱ = R_۲$ ، فـاراد$\frac{۱}{۲}$$= C$، و هنری ۸ $= L$.

(الف) نشان دهیدکه این مدار بادستگاه معادلات دیفرانسیل زیربیان می‌شود

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۸} \\ ۲ & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \qquad \text{(یك)}$$

که درآن I جریان درخودالقا، و V افت ولتاژبین دوسر خازن‌است.

راهنمایی: مسئلهٔ ۷ بند ۱.۷ را ببینید.

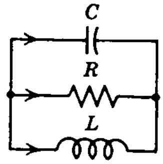
(ب) جواب عمومی معادلات (یك) را برحسب توابعی بامقدار حقیقی بیابید.

(ج) مطلوب است تعیین $I(t)$ و $V(t)$ اگر آمپر ۲ $= I(۰)$ وولت ۳ $= V(۰)$.

(د) مقادیر حدی $I(t)$ و $V(t)$ را وقتی $t \to \infty$ تعیین‌کنید. آیا این مقادیر حدی به شرط اولیه بستگی دارند؟

۱۲. مـدار الکتریکی کـه در شکل ۸.۷ نمایش داده شده‌است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \qquad \text{(یک)}$$



شکل ۸.۷

بیان می‌شود که در آن I جریان در خودالقا و V افت‌ولتاژ بین‌دوسر خازن است. این معادلات دیفرانسیل را درمسئلهٔ ۷ بند ۱.۷ به دست آوردیم.

(الف) نشان دهید کـه مقادیـر ویژهٔ ماتریس ضرایب، حقیقی و متمایزنـد اگـر $L > 4R^2C$ ومزدوج مختلط‌اند اگر $L < 4R^2C$.

(ب) فرض کنیم که اهم $R = 1$، فاراد $C = \frac{1}{2}$، و هنری $L = 1$. جـواب عمومی دستگاه (یك) را دراین حالت بیابید.

(ج) مطلـوب است تعیین $I(t)$ و $V(t)$ اگر آمپر $I(0) = 2$ و ولت $V(0) = 1$.

(د) برای مدار قسمت (ب) مقادیر حـدی $I(t)$ و $V(t)$ را وقتی $t \to \infty$ بیابید. آیا این مقادیرحدی به شرایط اولیه بستگی دارند؟

۱۳. دراین مسئله طـرز اثبات استقلال خطی $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ راکه درفرمولهای (۹) داده شده‌اند نشان می‌دهیم.

(الف) فرض کنیم $r_1 = \lambda + i\mu$ و $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ یك زوج مقدار ویژهٔ مزدوج $\mathbf{A}$، ماتریس ضرایب معادلهٔ (۱) باشند؛ و $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ و $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ بردارهای ویـژهٔ متناظر را نشان دهند. یادآور می‌شویم که دربند ۴.۷ بیان شدکه اگر $r_1 \neq \bar{r}_1$، آنگاه $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ مستقل خطی‌اند. بامحاسبهٔ رونسکین $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ نشان‌دهیدکه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نیز مستقل خطی‌اند.

(ب) بامحاسبهٔ رونسکین $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$، وبا استفاده ازایـن نکته‌کـه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مستقل خطی‌اند نشان دهیدکه $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ مستقل خطی‌اند.

۸.۷ مقادیر ویژهٔ مکرر

بحث دربارهٔ دستگاه خطی همگن باضرایب ثابت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{۱}$$

را با بررسی حالتی‌که در آن ماتریس $\mathbf{A}$ دارای مقدار ویژهٔ مکرر باشد به‌پایان می‌بریم. این بحث نیز هنگامی‌که $\mathbf{A}$ حقیقی یا مختلط باشد معتبر است. اگر $r=\rho$ یك ریشهٔ مکرر مرتبهٔ k ام معادلهٔ دترمینانی

$$\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I})=0 \tag{۲}$$

باشد، آنگاه ρ را یك مقدار ویژهٔ مرتبه k ماتریس $\mathbf{A}$ مـی‌نامند. دراینجا دو حالت پیش می‌آید: یا به‌ازای ρ، k بردار ویژهٔ مستقل خطی وجود دارد یاتعداد این بردارهای ویژه از k کمتراست. این حالتها را درمثالهای ۳ و ۴ بند ۴.۷ دیدیم، درمثال ۴ متناظر به یك مقدار ویژهٔ مضاعف دوبردار ویژهٔ مستقل خطی وجود داشت، اما درمثال ۳ به مقدار ویژهٔ مضاعف تنها یك بردار ویژهٔ مستقل خطی متناظر قرار گرفت.

درحالت اول، اگر k بردار ویژهٔ مستقل خطی متناظربه مقدارویژهٔ ρ بامرتبهٔ تکرار k را با $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ نشان دهیم، آنگاه $\mathbf{x}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}$ ، . . . ، $\mathbf{x}^{(k)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{\rho t}$ k جواب مستقل خطی معادلهٔ (۱) خواهند بود. بدین‌سان دراین حالت مکرر بودن مقدار ویژهٔ $r=\rho$ تأثیری نـدارد و همچنان یك مجموعـهٔ اساسی جواب برای معادلهٔ (۱) بـه صورت $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ وجود دارد. این حالت همواره هنگامی‌که ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد پیش می‌آید.

اما، اگر ماتریس ضرایب هرمیتی نباشد، آنگاه امکان دارد تعداد بـردارهای ویژهٔ مستقل خطی متناظر به ρ از k کمتر باشد، ودر این صورت تعداد جوابهای معادلهٔ (۱) به شکل $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ کـه به‌مقدار ویژهٔ مزبور متناظرند از k کمتراست. بنابرایـن، بـرای ساختن جواب عمومی معادلهٔ (۱) لازم است جوابهای دیگری به‌شکل متفاوتی پیداکرد. بادرنظر گرفتن نتایج پیش درمورد معادلات خطی مرتبهٔ nام، طبیعی‌است جوابهای دیگری‌که شامل حاصل‌ضرب توابع چندجمله‌ای و نمایی‌باشند جستجوکنیم. نخست به‌ذکرمثالی‌می‌پردازیم.

مثال ۰ مطلوب است تعیین یك مجموعهٔ اساسی جواب دستگاه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}\,. \tag{۳}$$

بافرض $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ از معادلهٔ (۳) به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{۴}$$

درنتیجه مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ عبارتنداز $r_1=r_2=2$. بـه‌ازای این مقدار r، از معادلات (۴) نتیجه می‌شودکه $\xi_1+\xi_2=0$. بنابراین متناظر بامقدار ویژهٔ مضاعف مزبورتنها یك‌بردار

ویژهٔ $\boldsymbol{\xi}$ وجود دارد که با $\boldsymbol{\xi}^T=(۱,\ -۱)$ معین می‌گردد. بدین‌سان یك جـواب دستگاه (۳) عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(۱)}(t)=\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{۲t}, \qquad (۵)$$

وجواب دیگری به‌صورت $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ وجود ندارد. طبیعی است جواب دوم دستگاه (۳)را به صورت

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}te^{۲t} \qquad (۶)$$

درنظر بگیریم، که درآن $\boldsymbol{\eta}$ یك بردار ثابت است. با گذاشتن $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ (۳) داریم

$$۲\boldsymbol{\eta}te^{۲t}+\boldsymbol{\eta}e^{۲t}-\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}te^{۲t}=۰\,. \qquad (۷)$$

برای آنکه رابطهٔ (۷) به‌ازای همهٔ مقادیر t برقرار باشد لازم‌است‌که ضرایب $te^{۲t}$ و $e^{۲t}$ صفر باشند. ازجملهٔ $e^{۲t}$ نتیجه می‌شود که

$$\boldsymbol{\eta}=۰\,. \qquad (۸)$$

بنابراین دستگاه (۳) دارای جواب مخالف صفری به‌صورت (۶) نیست.

وجود جمله‌های $te^{۲t}$ و $e^{۲t}$ در رابطـهٔ (۷) نشان می‌دهد کـه جواب دوم علاوه بر $\boldsymbol{\eta}te^{۲t}$ باید شامل جمله‌ای به‌صورت $\boldsymbol{\zeta}e^{۲t}$ باشد؛ به‌عبارت دیگر لازم است‌که فـرض‌کنیم

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}te^{۲t}+\boldsymbol{\zeta}e^{۲t} \qquad (۹)$$

که درآن $\boldsymbol{\eta}$ و $\boldsymbol{\zeta}$ بردارهای‌ثابت‌اند. باقراردادن این‌عبارت به‌جای $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ (۳) داریم

$$۲\boldsymbol{\eta}te^{۲t}+(\boldsymbol{\eta}+۲\boldsymbol{\zeta})e^{۲t}=\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}te^{۲t}+\boldsymbol{\zeta}e^{۲t}) \qquad (۱۰)$$

با برابر قراردادن ضرایب $te^{۲t}$ و $e^{۲t}$ در دوطرف رابطهٔ (۱۰) برای تعیین $\boldsymbol{\eta}$ و $\boldsymbol{\zeta}$ شرایط زیر عاید می‌شود

$$(\mathbf{A}-۲\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}=۰\,, \qquad (۱۱)$$

و

$$(\mathbf{A}-۲\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}\,. \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ (۱۱) هنگامی‌برقراراست‌که $\boldsymbol{\eta}$ بردار ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ متناظر به مقدار ویژهٔ $r=۲$ باشد، یعنی، $\boldsymbol{\eta}^T=(۱,\ -۱)$. چون $\det(\mathbf{A}-۲\mathbf{I})$ صفر است، ممکن است گمان رود که معادلهٔ (۱۲) را نمی‌توان حل‌کرد. اما، این حدس لزوماً درست نیست زیـرا معادلـهٔ (۱۲) را می‌توان به‌ازای برخی‌ازبردارهای $\boldsymbol{\eta}$ حل‌کرد. برای این منظور $\boldsymbol{\eta}$ باید در شرط $(\boldsymbol{\eta},\ \mathbf{y})=۰$ به‌ازای هرجواب $\mathbf{y}$ ازمعادلهٔ $(\mathbf{A}^*-۲\mathbf{I})\mathbf{y}=۰$ صدق‌کند. بـررسی تحقق

این شرط آسان است؛ وآن‌را درمسئلهٔ ۱۰ مطرح کرده‌ایم. جواب معادلهٔ (۱۲) یکتا نیست زیرا می‌تواند شامل هرمضرب دلخواه $\boldsymbol{\eta}$ باشد. ازحل معادلهٔ (۱۲) به‌دست می‌آید

$$\boldsymbol{\zeta}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad (13)$$

که درآن k ثابتی دلخواه است. باقراردادن $\boldsymbol{\eta}$ و $\boldsymbol{\zeta}$ درمعادلهٔ (۹) داریم

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}. \qquad (14)$$

آخرین جمله در رابطهٔ (۱۴) فقط مضربی ازجواب اول $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ است، ومی‌توان ازآن صرف‌نظر کرد، اما دوجملهٔ اول جواب جدیدی را تشکیل می‌دهند

$$\mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t} \qquad (15)$$

محاسبهٔ ساده‌ای نشان‌می‌دهد که $\mathbf{W}[\mathbf{x}^{(1)},\ \mathbf{x}^{(2)}](t)=-e^{4t}$، وبنابراین $\mathbf{x}^{(1)}$ و$\mathbf{x}^{(2)}$ برای دستگاه (۳) یک مجموعهٔ اساسی جواب را تشکیل می‌دهند. جواب عمومی عبارت است‌از

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)\\&=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\right]\end{aligned} \qquad (16)$$

ازمثال بالا یک وجه‌تمایز بین دستگاه دومعادلهٔ مرتبهٔ اول ویک معادلهٔ مرتبهٔ دوم آشکار می‌گردد. چنانکه می‌دانیم برای یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم که معادلهٔ مشخصهٔ آن دارای ریشهٔ مکرر r_1 باشد، درجواب دوم به جملهٔ ce^{r_1t} نیازی نیست، زیرا مضربی ازجواب اول است. ازطرف دیگر، درمورد دستگاه دومعادلهٔ مرتبه اول، جملهٔ $\boldsymbol{\zeta}e^{r_1t}$ در رابطهٔ (۹) به‌ازای $r_1=2$ مضربی ازجواب اول $\boldsymbol{\xi}e^{r_1t}$ نیست مگرآنکه $\boldsymbol{\zeta}$ با $\boldsymbol{\xi}$ بردار ویژهٔ متناظر به مقدار ویژهٔ r_1 متناسب باشد و چون معمولاً چنین نیست، جملهٔ $\boldsymbol{\zeta}e^{r_1t}$ را باید حفظ کرد.

همین روش را می‌توان درحالت کلی به کارگرفت. دستگاه (۱) رادرنظرگرفته و فرض کنیم که $r=\rho$ یک مقدار ویژهٔ مضاعف $\mathbf{A}$ باشد، که تنها یک بردار ویژهٔ $\boldsymbol{\xi}$ باآن متناظراست. آنگاه

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\xi}e^{\rho t} \qquad (17)$$

بافرض آنکه $\boldsymbol{\xi}$ در

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}=0 \qquad (18)$$

صدق کند یك جواب است [همانند رابطهٔ (۵)]. با همان روشی که در مثال به‌کار رفت، جواب دوم به‌صورت

$$\mathbf{x}^{(2)}(t)=\boldsymbol{\xi} te^{\rho t}+\boldsymbol{\eta} e^{\rho t} \qquad (19)$$

به‌دست می‌آید [همانند رابطهٔ (۱۵)] که در آن $\boldsymbol{\xi}$ درمعادلهٔ (۱۸) صدق می‌کند و $\boldsymbol{\eta}$ از

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi} \qquad (20)$$

حاصل می‌شود. به‌آسانی ثابت می‌شودکه می‌توان معادلهٔ (۲۰) راهمواره برحسب $\boldsymbol{\eta}$ حل کرد، حتی اگر $\det(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})=0$.

هنگامی‌که $r=\rho$ مقدار ویــژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ دارای مرتبهٔ تکرار بزرگتر ازدو باشد، آنگاه تنوع حالتها افزایش می‌یابد. این موضوع رامی‌توان بادرنظرگرفتن مقدارویژه‌ای با مرتبهٔ تکرارسه توضیح داد. نخست فرض‌کنیم‌که مقدارویــژهٔ سه‌گانه $r=\rho$ دارای سه بردار ویــژهٔ مستقل خطی $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ بـاشد. دراین حالت مجموعهٔ جوابهای مستقل متناظر عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t},\mathbf{x}^{(2)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho t}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{\rho t}. \qquad (21)$$

اکنون فرض‌کنیم‌که متناظربه مقدار ویژهٔ سه‌گانه $r=\rho$ تنها یك بردار ویژهٔ مستقل خطی وجود داشته بـاشد. آنگاه نخستین جواب بـا رابطهٔ (۱۷)، ودومین جواب بارابطهٔ (۱۹)، وسومین جواب به‌صورت زیرتعیین می گردد

$$\mathbf{x}^{(3)}(t)=\boldsymbol{\xi}\frac{t^2}{2!}e^{\rho t}+\boldsymbol{\eta} te^{\rho t}+\boldsymbol{\zeta} e^{\rho t} \qquad (22)$$

که در آن $\boldsymbol{\xi}$ درمعادلهٔ (۱۸) و $\boldsymbol{\eta}$ درمعادلهٔ (۲۰) صدق می‌کند، و $\boldsymbol{\zeta}$ از

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta} \qquad (23)$$

به‌دست می‌آید. دراینجا نیزحل معادلهٔ (۲۳) برحسب $\boldsymbol{\zeta}$ همواره امکان دارد.

آخرین حالت‌آنکه تنها دوبردار ویژهٔ مستقل خطی $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ بامقدارویژهٔ $r=\rho$ متناظرقرارگیرد. دراین‌صورت دوجواب دستگاه (۱) عبارتند از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t)=\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho t} \qquad (24)$$

جواب سوم به‌صورت

$$\mathbf{x}^{(3)}(t)=\boldsymbol{\xi} te^{\rho t}+\boldsymbol{\eta} e^{\rho t} \qquad (25)$$

است‌که در آن $\boldsymbol{\xi}$ درمعادلهٔ (۱۸) صدق می‌کند و $\boldsymbol{\eta}$ جوابی ازمعادلهٔ (۲۰) است. دراینجا لازم است‌که $\boldsymbol{\xi}$ رابه‌صورت یك ترکیب خطی $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ طوری انتخاب کردکه معادلهٔ

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi} \qquad (26)$$

قابل حل باشد. اگرقراردهیم

$$\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)} \tag{۲۷}$$

آنگاه بـــاید c_1 و c_2 را طوری انتخاب کرد که به ازای هر $\mathbf{y}$ که در $(\mathbf{A}^* - \bar{\rho}\mathbf{I})\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$ صدق کند، داشته باشیم $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) = 0$. به‌ازای این انتخاب $\boldsymbol{\xi}$ می‌توان $\boldsymbol{\eta}$ را از معادلهٔ (۲۶) به‌دست آورد. جوابهای $\mathbf{x}^{(1)}(t)$، $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ کـــه باروابط (۲۴) و (۲۵) تعیین می‌شوند دراین حالت یك مجموعهٔ جوابهای مستقل متناظر به‌مقدار ویژهٔ $r = \rho$ را تشکیل می‌دهند. برای توضیح ومثال این‌حالت مسئلهٔ ۱۱ را ببینید.

روشن است کـــه اگر مقدار ویژه‌ای دارای مرتبهٔ تکرار بالاتری باشد، آنگاه ممکن است وضعیت ازاین هم پیچیده‌تر گردد. به‌عنوان مثال، اگر $r = \rho$ مقدار ویژه‌ای ازمرتبهٔ تکرارچهار باشد، آنگاه بـــاید حالتهای مختلفی را بـــرحسب آنکه چهار، سه، دو، یا یك بردار ویژهٔ مستقل خطی وجود داشته باشد درنظر گرفت. می‌توان حالت کلی مسائلی راکه دارای مقادیرویژهٔ مکررند مورد بررسی قرارداد، اما این‌کارمتضمن مباحث پیشرفته‌ای از نظریهٔ ماتریسها است وخارج ازمحدودهٔ این‌کتاب است. ماتوجه خودرا به‌فنون محاسباتی لازم برای تعیین مجموعهٔ اساسی جواب درمواردی کـــه مرتبهٔ تکرار مقادیر ویـــژه از سه تجاوزنکند متمرکز می‌کنیم.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید.

۱. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۳. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۴. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}\mathbf{x}$

درهریك ازمسائل ۵ و ۶ جواب مسئلهٔ مقداراولیه داده شده را بیابید.

۵. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & -۷ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}$

۶. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۲ \\ -۳۰ \end{pmatrix}$

۷. نشان دهید $r=۲$ ریشهٔ سه‌گانهٔ معادلهٔ مشخصهٔ دستگاه

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

است وسه جواب مستقل خطی برای‌آن بیابید.

درهریك ازمسائل ۸ و ۹ دستگاه معادلات داده شده را با روش مسئلهٔ ۱۵ بند ۶.۷ حل کنید. فرض کنیم که $t>۰$.

۸. $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۹. $t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & -۷ \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۱۰. دستگاه معادلات مذکوردرمثال متن را درنظرمی‌گیریم،

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

این دستگاه متناظر به مقدار ویـژهٔ مضاعف $r=۲$ دارای یك بردار ویـژهٔ $\boldsymbol{\eta}$ است‌که بـا $\boldsymbol{\eta}^T=(۱,\ -۱)$ داده می‌شود.

(الف) نشان دهیدکه همهٔ جوابهای $(\mathbf{A}^*-۲\mathbf{I})\mathbf{y}=۰$ به صورت $\mathbf{y}^T=c(۱,\ ۱)$ می‌باشند،که در آن c ثابت دلخواهی است.

(ب) نشان دهیدکـه به‌ازای همهٔ $\mathbf{y}$ ها کـه درقسمت (الف) بـه دست آمد داریم $(\boldsymbol{\eta},\ \mathbf{y})=۰$.

(ج) دستگاه $(\mathbf{A}-۲\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}$ را حل‌کرده، نشان دهیدکه $\boldsymbol{\zeta}$ باید به‌صورتی‌که در رابطهٔ (۱۳) متن‌آمده است باشد.

۱۱. دراین مسئله به‌بیان طرزعمل درحالتی‌که متناظربه‌مقدار ویژهٔ مکررمرتبهٔ سوم تنها دوبردار ویژه وجود داشته باشد می‌پردازیم. دستگاه زیررا درنظرمی‌گیریم

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۵ & -۳ & -۲ \\ ۸ & -۵ & -۴ \\ -۴ & ۳ & ۳ \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad \text{(یك)}$$

(الف) نشان دهیدکه $r=۱$ مقدارویژهٔ مکررمرتبهٔ سوم ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ است، وتنها دوبردار ویژهٔ مستقل خطی وجود دارد

(دو)
$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}.$$

برای معادلهٔ (یك) دوجواب مستقل خطی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ بیابید.

(ب) برای تعیین جواب سوم قراردهید

(سه)
$$\mathbf{x}^{(3)}(t)=\boldsymbol{\xi}te^{t}+\boldsymbol{\eta}e^{t}$$

ونشان دهیدکه $\boldsymbol{\xi}$ و $\boldsymbol{\eta}$ باید درمعادلات زیر صدق کنند

(چهار)
$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}=0$$

(پنج)
$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}$$

(ج) نشان دهید $\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}+c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهند ، عمومی‌ترین جواب معادلهٔ (چهار) است. برای حل معادلهٔ (پنج) لازم است که c_1 و c_2 را طوری انتخاب کنیم که $\boldsymbol{\xi}$ به همهٔ جوابهای دستگاه الحاقی $(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{y}=0$ متعامد باشد. $\mathbf{A}^*$ راتعیین کنید ونشان دهیدکه جواب عمومی دستگاه الحاقی عبارت است از

(شش)
$$\mathbf{y}=\alpha\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

که درآن α و β ثابتهای دلخواهند.

(د) $(\boldsymbol{\xi},\mathbf{y})$ را حساب کرده وتحقیق کنیدکه تنها اگر $c_1=c_2$ این مقداربه ازای همهٔ مقادیر α و β برابرصفراست. برای آسانی $c_1=c_2=2$ انتخاب کنید. آنگاه

(هفت)
$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

(ه) برای $\boldsymbol{\xi}$ مقداری راکه با رابطهٔ (هفت) داده شده‌است درنظر گرفته معادلهٔ (پنج) راحل کنید ونشان دهیدکه

(هشت)
$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$$

k_1 و k_2 ثابتهای دلخواهند. با استفاده از روابط (هفت) و (هشت) برای معادلهٔ (یك) سومین جواب مستقل خطی $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ را بیابید.

۱۲. نشان دهیدکه همهٔ جوابهای دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

وقتی $t \to \infty$ به‌سوی صفرمی‌گرایند اگر، وفقط اگر، $a+d<0$ و $ad-bc>0$. این نتیجه را با نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۰ بند ۱.۵.۳ مقایسه کنید.

۱۳. باردیگر مدار الکتریکی مسئلهٔ ۱۲ بند ۷.۷ را درنظرمی‌گیریم. این مدار بادستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

بیان می‌شود.

(الف) نشان دهیدکه مقادیرویژهٔ آن حقیقی وبرابرند اگر $L = 4R^2C$.

(ب) فرض کنیم که اهم $R = 1$، فاراد $C = 1$ و هنری $L = 4$ و نیز آمپر $I(0) = 1$ و ولت $V(0) = 2$. $I(t)$ و $V(t)$ را بیابید.

۹.۷ ماتریسهای اساسی

نظریهٔ دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی را می‌توان با به کار گرفتن مفهوم ماتریس اساسی گسترش بیشتری داد. در بند بعدی که به تعمیم روش تغییر پارامترها در مورد دستگاههای معادلات خطی مرتبهٔ‌اول می‌پردازیم این مفهوم اهمیت ویژه‌ای خواهد داشت.

فرض کنیم که $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ یك مجموعهٔ اساسی جواب معادلهٔ

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \qquad (1)$$

را روی فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ تشکیل دهند. آنگاه ماتریس

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

که ستونهای آن بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ می‌باشند، ماتریس اساسی دستگاه (۱) نامیده

می‌شود. توجه شود که هرماتریس اساسی یک ماتریس عادی است، زیرا ستونهای آن بردارهای مستقل خطی‌اند.

مثال ۱. مطلوب است تعیین یك ماتریس اساسی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{3}$$

دربند ۶.۷ دیده شد که

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} \tag{4}$$

جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (۳) می‌باشند. بدین‌سان یك ماتریس اساسی دستگاه (۳) عبارت است از

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

جواب یك مسئلهٔ مقداراولیه را می‌توان به‌طوربسیارفشرده برحسب ماتریس اساسی نوشت. جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{6}$$

یا، برحسب $\mathbf{\Psi}(t)$،

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} \tag{7}$$

که درآن $\mathbf{c}$ بردارثابتی با مؤلفه‌های دلخواه $c_1, \ldots, c_n$ است. هنگامی‌که مسئلهٔ مقدار اولیه ازمعادلهٔ دیفرانسیل (۱) وشرط اولیهٔ

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \tag{8}$$

تشکیل‌شده باشد‌که درآن t_0 نقطهٔ مفروضی در $\alpha < t < \beta$ و $\mathbf{x}^0$ برداراولیهٔ داده شده‌است، تنها لازم است‌که بردار $\mathbf{c}$ موجود در رابطهٔ (۷) را طوری تعیین‌کرد‌که شرط اولیهٔ (۸) برقرارباشد. ازاین‌رو $\mathbf{c}$ باید در

$$\mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0 \tag{9}$$

صدق‌کند. بنابراین، چون $\mathbf{\Psi}(t)$ عادی است،

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \tag{10}$$

و

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \qquad (11)$$

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مزبوراست. اما باید تأکیدکردکه برای حل مسئلهٔ مقدار اولیه معمولاً بهتراست معادلهٔ (۹) را بهروش سادهکردن سطری حل کرد، و $\mathbf{c}$ را بهدست آورده در معادلهٔ (۷) قرارداد، بهجای اینکه $\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$ را مستقیماً محاسبهکرده واز معادلهٔ (۱۱) استفاده کنیم.

گاهی آسانتر است که ازماتریس اساسی خاصیکه با $\mathbf{\Phi}(t)$ نشان داده میشود استفادهکرد، ستونهای این ماتریس همان بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}$، . . . ، $\mathbf{x}^{(n)}$ مذکور درقضیهٔ ۶.۷ بند ۵.۷ میباشند. علاوه برمعادلهٔ دیفرانسیل (۱) این بردارها درشرایط اولیهٔ

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0)=\mathbf{e}^{(j)} \qquad (12)$$

صدق میکنند، که درآن $\mathbf{e}^{(j)}$ بردار یکهٔ مذکور درقضیهٔ ۶.۷ است، مؤلفهٔ jام آن یك و مؤلفههای دیگر آن صفرند. بدینسان $\mathbf{\Phi}(t)$ دارای این ویژگی است که

$$\mathbf{\Phi}(t_0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{I} \qquad (13)$$

ما همواره نماد $\mathbf{\Phi}$ را برای نمایش ماتریس اساسی که درشرط اولیهٔ (۱۳) صدقکند اختصاص میدهیم، وهرگاه مقصود یك ماتریس اساسی دلخواه باشد ازنماد $\mathbf{\Psi}$ استفاده میکنیم. جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱) و (۸) برحسب $\mathbf{\Phi}(t)$ حتی دارای ظاهری سادهتر است؛ چون $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)=\mathbf{I}$، از رابطهٔ (۱۱) نتیجه میشودکه

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 \qquad (14)$$

گرچه ماتریساساسی $\mathbf{\Phi}(t)$ غالباً از $\mathbf{\Psi}(t)$ پیچیدهتراست، اما هنگامیکه یكدستگاه معادلات دیفرانسیل را باید مکرراً با چندین شرایط اولیهٔ متفاوت حلکرد بسیار سودمند است. این وضعیت متناظر به یك دستگاه فیزیکی استکه میتواند درچندین حالت اولیهٔ متفاوت آغازبهکارکند. اگرماتریس اساسی $\mathbf{\Phi}(t)$ تعیین شده باشد،آنگاه جواب متناظر بههرمجموعهٔ شرایط اولیه را میتوان تنها با ضرب ماتریسی چنانکه در رابطهٔ (۱۴) مشخص شده است به دست آورد. بدینسان ماتریس $\mathbf{\Phi}(t)$ نمایشگر تبدیل شرایط اولیهٔ $\mathbf{x}^0$ به جواب $\mathbf{x}(t)$ در زمان دلخواه t است. ازمقایسهٔ روابط (۱۱) و (۱۴) دیده میشودکه

$$\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0).$$

مثال ۲. برای دستگاه (۳)

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

که درمثال ۱ موردبحث قرار گرفت، ماتریس‌اساسی $\mathbf{\Phi}$ را طوری تعیین کنیدکه $\mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I}$.
ستونهای $\mathbf{\Phi}$ عبارتند ازجوابهای معادلهٔ (۳) که درشرایط اولیهٔ زیر صدق کنند

$$\mathbf{x}^{(1)}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^{(2)}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{15}$$

چون جواب عمومی معادلهٔ (۳) عبارت است از

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

می‌توان با انتخاب $c_1=c_2=1/2$، جوابی را به‌دست آوردکه درنخستین شرط اولیه صدق کند؛ به‌همین ترتیب جوابی‌که در شرط اولیهٔ دوم صدق کند با انتخاب $c_1=\frac{1}{4}$ و $c_2=-\frac{1}{4}$ معین می‌شود. بنابراین

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix} \tag{16}$$

توجه شودکه عنصرهای $\mathbf{\Phi}(t)$ ازعنصرهای ماتریس اساسی $\mathbf{\Psi}(t)$ که بـا رابطهٔ (۵) داده شده‌است پیچیده‌ترند؛ اما، اکنون به‌آسانی می‌توان جواب متناظر به‌هر دسته شرایط اولیه را تعیین کرد.

اکنون بار دیگر دستگاه

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{17}$$

را درنظر می‌گیریم، که درآن $\mathbf{A}$ یك ماتریس ثابت است‌که می‌تواند حقیقی نباشد. قبلاً دو روش حل این‌گونه دستگاهها را بیان‌کردیم: دربند ۲.۷ روش حذفی، ودربند ۶.۷ با فرض‌آنکه $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}e^{rt}$. دراینجا می‌خواهیم علاوه برآنها نظر دیگری را مطرح‌کنیم. علت اساسی دشواری دستگاه معادلات آن است‌که معادلات معمولاً به‌هم مرتبط‌اند؛ به‌عبارت دیگر، برخی ازمعادلات یـا همهٔ آنها شامل بیش ازیك تابع، شایـد هم شامل همهٔ توابع باشند. این حالت هنگامی اتفاق می‌افتدکـه ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ قطری نباشد. بنابـراین معادلات دستگاه را به‌جای‌آنکه متوالیاً حل‌کنیم باید توأماً حل‌کرد. ازاینجا نتیجه می‌شود که یك راه حل دستگاه معادلات آن است‌که آن‌را به‌یك دستگاه هم‌ارز نامرتبط تبدیل‌کنیم که درآن هرمعادله فقط شامل یك تـابع باشد. این عمل متناظر با آن است‌کـه ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ را به‌یك ماتریس قطری تبدیل‌کنیم.

براساس نتایج مذکور دربند ۴.۷، هـرگاه $\mathbf{A}$ دارای یك دستهٔ کامل n بردار ویژهٔ

مستقل خطی باشد می‌توان این تبدیل را انجام داد. اگر $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ بردارهای ویژهٔ متناظر به‌مقادیر ویژهٔ r_1، . . . ، r_n ماتریس $\mathbf{A}$ باشند و $\mathbf{T}$ ماتریس تبدیلی باشدکه ستونهای آن $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ باشند، آنگاه

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

چون تابع جدید $\mathbf{y}$ را با رابطهٔ

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y} \qquad (۱۹)$$

تعریف کنیم، ازمعادلهٔ (۱۷) داریم

$$\mathbf{T}\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}\,, \qquad (۲۰)$$

یا

$$\mathbf{y}'=(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}\,. \qquad (۲۱)$$

بنابر رابطهٔ (۴۰) بند ۴.۷،

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \qquad (۲۲)$$

یك ماتریس قطری است‌که عنصرهای قطری آن همان مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ می‌باشند. بدین‌سان $\mathbf{y}$ در دستگاه معادلات نامرتبط زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{y}'=\mathbf{D}\mathbf{y} \qquad (۲۳)$$

که ماتریس اساسی آن عبارت است ازماتریس قطری

$$\mathbf{Q}(t)=\begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{r_n t} \end{pmatrix} \qquad (۲۴)$$

ماتریس‌اساسی $\boldsymbol{\Psi}$ مربوط به دستگاه (۱۷) را می‌توان با تبدیل (۱۹) از $\mathbf{Q}$ به‌دست‌آورد،

$$\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{T}\mathbf{Q} \qquad (۲۵)$$

یعنی،

$$\mathbf{\Psi}(t)=\begin{pmatrix}\xi_1^{(1)}e^{r_1t} & \cdots & \xi_1^{(n)}e^{r_nt}\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_n^{(1)}e^{r_1t} & \cdots & \xi_n^{(n)}e^{r_nt}\end{pmatrix} \qquad (۲۶)$$

معادلهٔ (۲۶) همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آمد. این روش قطری کردن هیچ امتیاز محاسباتی بر روش مذکور در بند ۶.۷ ندارد، زیرا درهر دوحالت لازم است که مقادیر ویژه وبردارهای ویژهٔ ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل را به‌دست‌آورد. با وجود این شایان توجه است که مسئلهٔ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با مسئلهٔ قطری کردن ماتریس، ازنظر ریاضی یکی است.

مسائل

درهریك‌ازمسائل ۱ تا ۱۰ ماتریس اساسی دستگاه معادلات داده شده را بیابید. درهرمورد ماتریس اساسی $\mathbf{\Phi}(t)$ را نیز که در $\mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I}$ صدق می‌کند به دست آورید.

۱. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۲. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 8 & -6\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۳. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۴. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۵. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۶. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۷. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۸. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۹. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -8 & -5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{x}$ ۱۰. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

۱۱. با استفاده ازتعریف $\mathbf{\Phi}(t)$ و $\mathbf{\Psi}(t)$ که دراین بند آمد، نشان دهید که

$$\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$$

*۱۲. روش تقریبات متوالی (بند ۱۱.۲ را ببینید) را می‌توان درمورد دستگاه معادلات نیز به‌کاربرد. دراین مسئله به‌طورصوری طرزاستفاده ازآن را درمورد دستگاههای

خطی با ضرایب ثابت نشان می‌دهیم. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\boldsymbol{\eta} \qquad \text{(یك)}$$

را که درآن $\mathbf{A}$ یك ماتریس ثابت، و $\boldsymbol{\eta}$ بردار مفروضی است درنظر می‌گیریم.

(الف) فرض‌کنیم‌که برای معادلهٔ (یك) یك جواب $\mathbf{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ وجود دارد، نشان دهیدکه $\boldsymbol{\Phi}(t)$ باید درمعادلهٔ انتگرالی زیر صدق کند

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{0}^{t}\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(s)\,ds \qquad \text{(دو)}$$

(ب) با تقریب اولیهٔ $\boldsymbol{\Phi}^{(0)}(t)=\boldsymbol{\eta}$ آغازکرده آن را به جای $\boldsymbol{\Phi}(s)$ درطرف دوم معادلهٔ (دو) قرار دهید و تقریب جدید $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(t)$ را به دست آورید. نشان دهیدکه

$$\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{A}t)\boldsymbol{\eta} \qquad \text{(سه)}$$

(ج) این روش را تکرارکرده عبارت (سه) را به‌جای $\boldsymbol{\Phi}(s)$ درطرف دوم معادلهٔ (دو) بگذارید تا تقریب جدید $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(t)$ به دست آید. نشان دهیدکه

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(t)=\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^{2}\frac{t^{2}}{2}\right)\boldsymbol{\eta}. \qquad \text{(چهار)}$$

(د) با ادامهٔ این روش دنبالهٔ تقریبات $\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$، $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}$، $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$، . . .، $\boldsymbol{\Phi}^{(n)}$، . . . را به دست آورید. با استقراء نشان دهیدکه

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n)}(t)=\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^{2}\frac{t^{2}}{2!}+\cdots+\mathbf{A}^{n}\frac{t^{n}}{n!}\right)\boldsymbol{\eta}. \qquad \text{(پنج)}$$

(ه) مجموعی‌که در رابطهٔ (پنج) وجود دارد، یك جمع ماتریسی است. می‌توان نشان دادکه هرمؤلفهٔ این مجموع هنگامی‌که $n\to\infty$ همگراست، و بنابراین می‌توان ماتریس $\mathbf{M}(t)$ را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\mathbf{M}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^{2}\frac{t^{2}}{2!}+\cdots+\mathbf{A}^{n}\frac{t^{n}}{n!}\right)=\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}^{k}\frac{t^{k}}{k!}. \qquad \text{(شش)}$$

با فرض آنکه مشتق‌گیری جمله به جمله جایز باشد، نشان دهیدکه $\mathbf{M}(t)$ در $\mathbf{M}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ ، $\mathbf{M}(0)=\mathbf{I}$ صدق می‌کند. بدین‌سان نشان دهیدکه $\mathbf{M}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)$.

(و) سری (شش) شبیه به سری نمایی است. بدین‌سان طبیعی است‌که نماد $e^{\mathbf{A}t}$ را برای این مجموع بپذیریم:

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}^{k}\frac{t^{k}}{k!} \qquad \text{(هفت)}$$

نشان دهیدکه جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (یك) را می‌توان به‌صورت $\mathbf{x}=e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\eta}$ نوشت.

*۱۳. فرض کنیم $\boldsymbol{\Phi}(t)$ نمایشگر یك ماتریس اساسی است‌که در $\boldsymbol{\Phi}'=\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}$، $\boldsymbol{\Phi}(0)=\mathbf{I}$ صدق می‌کند. همان‌طورکه درمسئلهٔ ۱۲ دیده شد می‌توان آن‌را با $e^{\mathbf{A}t}$ نمایش داد. دراین مسئله نشان می‌دهیم‌که $\boldsymbol{\Phi}$ واقعاً دارای خواص جبری اصلی تابع نمایی است.

(الف) نشان دهیدکه $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(s)=\boldsymbol{\Phi}(t+s)$؛ یعنی $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}=e^{\mathbf{A}(t+s)}$.

راهنمایی: نشان دهیدکه اگر s ثابت و t متغیر باشد، آنگاه $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(s)$ و $\boldsymbol{\Phi}(t+s)$ هردو درمسئلهٔ مقدار اولیهٔ $\mathbf{Z}'=\mathbf{A}\mathbf{Z}$، $\mathbf{Z}(0)=\boldsymbol{\Phi}(s)$ صدق می‌کنند.

(ب) نشان دهید که $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(-t)=\mathbf{I}$، یا $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}(-t)}=\mathbf{I}$، و از این‌رو $\boldsymbol{\Phi}(-t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$.

(ج) نشان دهیدکه $\boldsymbol{\Phi}(t-s)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)$.

۱۰.۷ دستگاههای خطی ناهمگن

دراین بند به اختصار روشهای حل دستگاههای خطی ناهمگن را مورد بحث قرار می‌دهیم. بحث را با دستگاههایی به‌صورت

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{g}(t) \tag{1}$$

آغاز می‌کنیم‌که در آن $\mathbf{A}$ یك ماتریس ثابت $n\times n$ قطری شدنی است و $\mathbf{g}(t)$ به ازای $\alpha<t<\beta$ پیوسته است. دراینجا به روش مذکور درپایان بند ۹.۷ عمل می‌کنیم. ماتریسی راکه ستونهای آن $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ بردارهای ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ باشد با $\mathbf{T}$ نمایش داده وتابع جدید $\mathbf{y}$ را با

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y} \tag{2}$$

تعریف می‌کنیم.

آنگاه با جایگزینی $\mathbf{x}$ درمعادلهٔ (۱) داریم

$$\mathbf{T}\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}+\mathbf{g}(t)$$

ازضرب در $\mathbf{T}^{-1}$ نتیجه می‌شودکه

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'&=(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)\\&=\mathbf{D}\mathbf{y}+\mathbf{h}(t)\end{aligned} \tag{3}$$

که درآن $\mathbf{h}(t)=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$، و $\mathbf{D}$ ماتریسی است‌قطری که عنصرهای‌قطری آن r_1، . . . ، r_n مقادیر ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشندکه به همان ترتیب بردارهای ویژهٔ متناظر $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$، . . . ، $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ درستونهای $\mathbf{T}$ قرار گرفته‌اند. معادلهٔ (۳) یك دستگاه متشکل از n معادلهٔ‌نامرتبط برحسب $y_1(t)$، . . . ، $y_n(t)$ می‌باشد؛ در نتیجه می‌توان هرمعادله را جداگانه حل کرد. صورت اسکالری معادلهٔ (۳) عبارت است از

$$y_j'(t)=r_j y_j(t)+h_j(t)\,,\quad j=1\,,\,\dots,\,n \tag{۴}$$

که در آن $h_j(t)$ یك ترکیب خطی از $g_1(t)$ ، . . . ، $g_n(t)$ است. معادلهٔ (۴) یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول است و می‌توان آن را با روش بند ۱.۲ حل‌کرد. در واقع، داریم

$$y_j(t)=e^{r_j t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_j s}h_j(s)\,ds+c_j e^{r_j t}\,,\quad j=1,\,\dots,\,n \tag{۵}$$

که در آن c_j ثابت دلخواهی است. بالاخره، $\mathbf{x}$ جواب معادلهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) عاید می‌شود.

مثال. جواب عمومی دستگاه

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} -4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} t^{-1}\\ 2t^{-1}+4\end{pmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{g}(t) \tag{۶}$$

را روی فاصلهٔ $t>0$ بیابید.

چون همانند بند ۶.۷ عمل‌کنیم دیده می‌شود که مقادیر ویژهٔ ماتریس ضریب برابرند با $r_1=0$ و $r_2=-5$، و بردارهای ویژهٔ متناظر عبارتند از

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}^{(2)}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \tag{۷}$$

پیش ازآنکه به‌تشکیل $\mathbf{T}$ ماتریس بردارهای ویژه‌بپردازیم، یادآوری می‌کنیم که سرانجام باید $\mathbf{T}^{-1}$ را نیز به‌دست آورد. ماتریس $\mathbf{A}$ حقیقی ومتقارن است، بنابراین می‌توان از نتیجهٔ مذکور درپایان بند ۴.۷ استفاده‌کرد: اگر بردارهای ویژهٔ $\mathbf{A}$ یکانی باشند، یعنی $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=1$ آنگاه $\mathbf{T}^{-1}$ با $\mathbf{T}^*$ ماتریس وابستهٔ آن و چون $\mathbf{T}$ حقیقی است با $\mathbf{T}'$ یعنی ترانهادهٔآن برابر است. بدین‌سان، با یکانی‌کردن $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ و $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ داریم

$$\mathbf{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}. \tag{۸}$$

چون قرار دهیم $\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y}$ وآن را در معادلهٔ (۶) بگذاریم،دستگاه معادلات زیر برای تابع جدید $\mathbf{y}$ به دست می‌آید:

$$\mathbf{y}'=\mathbf{D}\mathbf{y}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}\mathbf{y}+\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}5t^{-1}+8\\ 4\end{pmatrix} \tag{۹}$$

بدین‌سان

$$y_1'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5}{t}+8\right),\quad y_2'=-5y_2+\frac{4}{\sqrt{5}} \tag{۱۰}$$

و

$$\mathbf{y} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \begin{pmatrix} ۵ \ln t + ۸t + c_۱ \\ \frac{۴}{۵} + c_۲ e^{-۵t} \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

بالاخره

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} \ln t + \frac{۸}{۵}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} t + \frac{۴}{۲۵}\begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix} + \hat{c}_۱ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} + \hat{c}_۲ \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix} e^{-۵t} \qquad (۱۲)$$

دوجملهٔ آخر درجواب (۱۲) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر را تشکیل می‌دهند. سه جملهٔ نخست جواب خصوصی دستگاه ناهمگن مزبور است. بدین‌سان جوابی که دراینجا به‌دست آمد دارای همان ساختمان بنیادی است که درفصول ۳ و ۵ برای معادلات اسکالری خطی به دست آمد.

اکنون به مسائل کلیتری که در آنها ماتریس ضرایب ثابت نیست و یا قطری‌پذیر نمی‌باشد، برمی‌گردیم. فرض کنیم

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \qquad (۱۳)$$

که در آن $\mathbf{P}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند. فرض‌کنیم ماتریس اساسی $\mathbf{\Psi}(t)$ مربوط به دستگاه همگن متناظر

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \qquad (۱۴)$$

را یافته‌ایم. با استفاده از روش تغییرپارامترها یك جواب خصوصی، و درنتیجه جواب عمومی دستگاه ناهمگن (۱۳) را به دست می‌آوریم.

چون جواب عمومی دستگاه همگن (۱۴) به صورت $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}$ است، طبعاً می‌توان همانند بند ۲.۶.۳ عمل کرد، وبا گذاردن تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ به‌جای بردار ثابت $\mathbf{c}$ به جستجوی جوابی برای دستگاه ناهمگن (۱۳) پرداخت. بدین‌سان، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) \qquad (۱۵)$$

که در آن $\mathbf{u}(t)$ برداری است که باید تعیین شود. با مشتق‌گیری از $\mathbf{x}$ که با رابطهٔ (۱۵) داده شده‌است وتوجه به معادلهٔ (۱۳) داریم

$$\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t) \qquad (۱۶)$$

چون $\mathbf{\Psi}(t)$ ماتریس اساسی‌است، $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Psi}(t)$، وبنابراین معادلهٔ (۱۶) به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t) \qquad (۱۷)$$

چون $\boldsymbol{\Psi}(t)$ روی هر فاصله‌ای که $\mathbf{P}$ پیوسته باشد عادی است بنابراین $\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)$ وجود دارد، واز آنجا

$$\mathbf{u}'(t)=\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \qquad (۱۸)$$

بدین‌سان هر بردار از ردهٔ بردارهایی راکه درمعادلهٔ (۱۸) صدق می‌کنند می‌توان به‌عنوان بردار $\mathbf{u}(t)$ انتخاب کرد؛ این بردارها با تقریب یك (بردار) ثابت دلخواه جمعی معین می‌شوند؛ ازاین‌رو $\mathbf{u}(t)$ را با

$$\mathbf{u}(t)=\int^{t}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds+\mathbf{c}\,, \qquad (۱۹)$$

نشان می‌دهیم که درآن بردار ثابت $\mathbf{c}$ دلخواه است. بالاخره، باگذاشتن $\mathbf{u}(t)$ در رابطهٔ (۱۵)، $\mathbf{x}$ جواب دستگاه (۱۳) به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}+\boldsymbol{\Psi}(t)\int^{t}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \qquad (۲۰)$$

چون $\mathbf{c}$ دلخواه است، هرشرط اولیه درنقطهٔ $t=t_{\circ}$ را می‌توان با انتخاب مناسب $\mathbf{c}$ برقرار کرد. بدین‌سان، عبارتی که با رابطهٔ (۲۰) داده شده است شامل هرجواب دستگاه (۱۳) می‌باشد وبنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۱۳) است. توجه شود که جملهٔ اول طرف دوم رابطهٔ (۲۰) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر (۱۴) است، وجملهٔ دوم یك جواب خصوصی خود معادلهٔ (۱۳) می‌باشد.

اکنون مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مشتمل برمعادلهٔ (۱۳) وشرط اولیهٔ

$$\mathbf{x}(t_{\circ})=\mathbf{x}^{\circ} \qquad (۲۱)$$

را درنظر می‌گیریم. اگر به‌عنوان جواب خصوصی در رابطهٔ (۲۰) جوابی را انتخاب کنیم که به‌ازای $t=t_{\circ}$ برابر صفر باشد، جواب این مسئله را به‌ساده‌ترین وجه می‌توان نوشت. برای این منظور حد پایین انتگرال موجود در رابطهٔ (۲۰) را برابر $t_{\circ}$ می‌گیریم، بدین‌سان جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}+\boldsymbol{\Psi}(t)\int_{t_{\circ}}^{t}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \qquad (۲۲)$$

شرط اولیهٔ (۲۱) نیز با انتخاب

$$\mathbf{c}=\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_{\circ})\mathbf{x}^{\circ} \qquad (۲۳)$$

برقرار می‌گردد. بنابراین

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_{\circ})\mathbf{x}^{\circ}+\boldsymbol{\Psi}(t)\int_{t_{\circ}}^{t}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \qquad (۲۴)$$

جواب مسئلهٔ مقدار اولیه است. بار دیگر، متذکر می‌شویم که گرچه استفاده از $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ برای

نوشتن جوابهای (۲۰) و (۲۴) مفید است، اما معمولاً درحالتهای خاص بهتر است که معادلات لازم را بــا روش ساده‌کردن سطری حل‌کنیم بــه‌جای اینکه $\mathbf{\Psi}^{-1}$ را محاسبه‌کرده و در رابطه‌های (۲۰) و (۲۴) جایگزین‌کنیم.

جواب (۲۴) را می‌توان بااستفاده ازماتریس اساسی $\mathbf{\Phi}(t)$ که درشرط $\mathbf{\Phi}(t_\circ)=\mathbf{I}$ صدق می‌کند به‌صورت ساده‌تری درآورد. دراین حالت داریم

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^\circ+\mathbf{\Phi}(t)\int_{t_\circ}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \qquad (۲۵)$$

هنگامی‌کــه ماتریس ضرایب $\mathbf{P}(t)$ ماتــریسی ثابت باشد رابطهٔ (۲۵) را می‌توان بازهم ساده‌ترکرد (مسئلهٔ ۱۳ را ببینید).

دربرخی ازحالتها برای تعیین جواب خصوصی دستگاه ناهمگن (۱۳) آسانتر است که از روش ضرایب نامعین استفاده‌کنیم. دراین روش، جواب را به‌صورت مناسبی‌که در آن همه یا برخی ازضرایب نامشخصند در نظر گــرفته وسپس ضرایب را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنندکه درمعادلهٔ دیفرانسیل صدق‌کند. عملاً، این روش تنها هنگامی قابل‌استفاده است که ماتریس ضرایب $\mathbf{P}$ ماتریسی‌ثابت ومؤلفه‌های $\mathbf{g}$ توابع چندجمله‌ای، نمایی، یا سینوسی، یا مجموع حاصلضربهــای این توابع باشند. تنها دراین حالتهــا می‌توان صورت صحیح جواب را به‌آسانی وطبق قواعدی پیش‌بینی‌کرد. روش انتخاب صورت جواب ذاتاً همان است‌که در بند ۱.۶.۳ درمورد معادلات خطی مرتبهٔ دوم بیان شد. تفاوت اساسی آنها را می‌توان درحالتی‌که جملهٔ ناهمگن به‌صورت $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ است و λ یك ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ مشخصه باشد مشاهده‌کرد. دراین شرایط، به‌جای آنکه جواب را به‌صورت $\mathbf{a}te^{\lambda t}$ فرض‌کنیم لازم است عبارت $\mathbf{a}te^{\lambda t}+\mathbf{b}e^{\lambda t}$ را درنظر بگیریم و باگذاردن در معادلهٔ دیفرانسیل، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را تعیین‌کنیم.

مسائل

درهریك ازمسائل ۱ تا ۷ دستگاه داده شده را حل‌کنید.

۱. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} e^{t} \\ t \end{pmatrix}$

۲. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} e^{t} \\ \sqrt{۳}\,e^{-t} \end{pmatrix}$

۳. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

۴. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} e^{-۲t} \\ -۲e^{t} \end{pmatrix}$

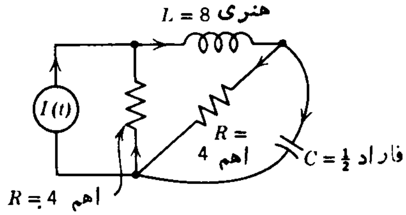
$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} t^{-۳} \\ -t^{-۲} \end{pmatrix}, \quad t>۰$$.۵

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} ۰ \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad ۰<t<\pi$$.۶

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{۲}<t<\pi$$.۷

.۸ مدار الکتریکی که درشکل ۹.۷ نشان داده شده‌است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۸} \\ ۲ & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۰ \end{pmatrix}I(t) \qquad \text{(یك)}$$



شکل ۹.۷

بیان شده است که در آن $x_۱$ جریان درسیم‌پیچ، و $x_۲$ افت ولتاژ بین دوسر خازن، و $I(t)$ جریان وارده ازمنبع خارجی است.

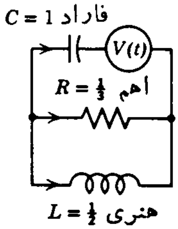
(الف) ماتریس اساسی $\mathbf{\Psi}(t)$ را بـرای دستگاه همگن متناظر بـه معادلات (یك) بیابید. به مسئلهٔ ۱۱ بند ۷.۷ رجوع شود.

(ب) اگر $I(t)=e^{-t/۲}$ ، جواب دستگاه (یك) راکه درشرط اولیهٔ $\mathbf{x}(۰)=\mathbf{۰}$ نیز صدق کند بیابید.

.۹ مدار الکتریکی کـه در شکل ۱۰.۷ نشان داده شده است بـا دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & -۳ \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}V(t) \qquad \text{(یك)}$$

که درآن $x_۱$ جریان درخودالقا، و $x_۲$ افت ولتاژ بین دوسر خـازن، و $V(t)$ ولتاژ وارده



شکل ۱۰.۷

ازمنبع خارجی است.

(الف) ماتریس‌اساسی $\mathbf{\Psi}(t)$ را برای دستگاه همگن متناظر به‌معادلات (یك) بیابید.

(ب) با فرض

$$V(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

جواب دستگاه (یك) راکه درشرایط اولیهٔ $\mathbf{x}(0)=0$ صدق می‌کند بیابید.

درهریك ازمسائل ۱۰ و ۱۱ تحقیق کنیدکه بردار داده شده جواب عمومی دستگاه همگن متناظر است، وسپس دستگاه ناهمگن را حل کنید. $t>0$ فرض شود.

۱۰. $$t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1-t^2\\ 2t\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^{(c)}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}t+c_2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}t^{-1}$$

۱۱. $$t\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}-2t\\ t^4-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^{(c)}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}t^{-1}+c_2\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}t^2$$

۱۲. نشان دهیدکه جواب عمومی دستگاه $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$ را می‌توان به‌صورت $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(c)}(t)+\mathbf{x}^{(p)}(t)$ بیان‌کرد، که در آن $\mathbf{x}^{(c)}$ جواب عمومی دستگاه همگن متناظر، و $\mathbf{x}^{(p)}$ یك جواب دستگاه ناهمگن داده شده است.

۱۳*. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{g}(t),\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^{0}$$

را درنظر می‌گیریم.

(الف) با مراجعه به‌مسئلهٔ ۱۳ (ج) بند ۹.۷ نشان دهیدکه

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^{0}+\int_0^t\mathbf{\Phi}(t-s)\mathbf{g}(s)\,ds.$$

(ب) همچنین نشان دهیدکه

$$\mathbf{x}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^{0}+\int_{0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{g}(s)\,ds$$

۱۴. با استفاده از روش ضرایب نامعین جواب عمومی هریك از دستگاههای زیر را بیابید.

(الف) $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

(ب) $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

مراجع

کتب ذیل نمونه‌ای است ازکتابهای بسیار زیادی‌که اخیراً دربارهٔ ماتریسها وجبرخطی انتشار یافته است:

Campbell, H. G., *Linear Algebra with Applications*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1971.

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra*, Macmillan, New York, 1970.

Noble, B., *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

Schneider, H. and Barker, G. P., *Matrices and Linear Algebra*, Holt, New York, 1968.

Stewart, F. M., *Introduction to Linear Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1963.

Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1976.

Williams, G., *Computational Linear Algebra with Models*, Allyn and Bacon, Boston, 1975.

درموضوع شبکه‌های الکتریکی‌کتب زیادی وجود دارد، کتاب زیر نمونه‌ای از آنها است:

Bose, A. G. and Stevens, K. N., *Introductory Network Theory*, Harper and Row, New York, 1965.