تمرینات سری اول

هندسه جبری - تاریخ تحویل:

۱. فرض کنیم S یک زیرحلقه R باشد و 0_R و 0_S به ترتیب عضو خنثی عمل جمع در حلقه‌های R و S باشد. ثابت کنید $0_S = 0_R$.
(راهنمایی: می‌توانید از رابطه‌های $0_S + 0_S = 0_S + 0_R = 0_S$ استفاده کنید.)

۲. در این تمرین قصد داریم نحوهٔ توسیع یک میدان دلخواه را بررسی کنیم. به سوالات زیر پاسخ دهید:

(آ) میدان $\mathbb{Z}_5$ را در نظر بگیرید.

- نشان دهید چندجمله‌ای $f := x^2 + x + 1$ در $\mathbb{Z}_5$ ریشه ندارد و لذا در $\mathbb{Z}_5[x]$ تجزیه نمی‌شود.
- قرار دهید $F := \mathbb{Z}_5[x]/\langle f\rangle$. اعضای F را مشخص کنید.
- نشان دهید F یک میدان است و وارون هر عنصر غیرصفر آن را مشخص کنید.
- اگر $\alpha \in \mathbb{C}$ یک ریشهٔ f در $\mathbb{C}$ باشد، نشان دهید $\mathbb{Z}_5[\alpha] = \{a + \alpha b \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\}$ و $\mathbb{Z}_5 \subset \mathbb{Z}_5[\alpha]$.

به $\mathbb{Z}_5[\alpha]$، توسیع میدان $\mathbb{Z}_5$ بوسیلهٔ ریشهٔ α از f گوییم. توجه می‌کنیم که می توان با روش مشابهی، $\mathbb{Z}_5[\alpha]$ را نیز توسیع داد و میدان حاصل، یک توسیع $\mathbb{Z}_5$ نیز خواهد بود.

(ب) شکل کلی اعضای $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ را معرفی کنید و ثابت کنید که $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ یک میدان است.

۳. اگر R یک حلقه باشد و مجموعهٔ عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نمایش دهیم، به سوالات زیر پاسخ دهید:

- فرض کنید $f, g \in R[x]$. نشان دهید $deg(fg) \le deg(f) + deg(g)$.
- نشان دهید R یک حوزهٔ صحیح است اگروتنهااگر نامساوی بالا یک تساوی باشد.
- نشان دهید $U(\mathbb{Z}[x]) = \{-1, +1\}$.
- اگر R حوزهٔ صحیح باشد و x یک متغیر، ثابت کنید $U(R[x]) = U(R)$.

۴. فرض کنید R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را پوچتوان گوییم هرگاه عدد طبیعی m وجود داشته باشد چنانکه $a^m = 0$. به عنوان مثال ۲ در $\mathbb{Z}_4$ پوچتوان است. به سوالات زیر پاسخ دهید:

- نشان دهید $1 + 2x \in U(\mathbb{Z}_4[x])$ و $(1 + 2x)^{-1}$ را به دست آورید.
- فرض کنید $f = a + bx \in R[x]$ وارون‌پذیر است و وارون آن چندجمله ای $g = c_0 + \cdots + c_m x^m$ باشد. از عبارت $fg = 1$ داریم:

$$ac_0 = 1,\ ac_1 + bc_0 = 0,\ \ldots,\ ac_m + bc_{m-1} = 0,\ bc_m = 0$$

با استفاده از تساوی دوم تا آخر و وارون‌پذیری a و c_0، $c_1, \ldots, c_m$ را برحسب a, b, c_0 بدست آورید و با استفاده از رابطهٔ $bc_m = 0$ نشان دهید b پوچتوان است.

- اگر a یک عنصر پوچتوان R باشد و $u \in U(R)$، با استفاده از بسط $u^k - a^k$ نشان دهید $u - a \in U(R)$.
- (اختیاری) اگر $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in U(R[x])$، ثابت کنید a_n یک عنصر پوچتوان R است.
- اگر $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in U(R[x])$، با استفاده از دو رابطهٔ اخیر نشان دهید $a_1, \ldots, a_n$ پوچتوان هستند و a_0 وارون‌پذیر است.
- با استفاده از روابط بالا، اگر R فاقد عنصر پوچتوان ناصفر باشد $U(R[x])$ را مشخص کنید.

۵. فرض کنید $n > 1$. نشان دهید حلقهٔ $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ جابجایی نیست.