روش مونت کارلو (انتگرال گیری)

روش های انتگرال گیری عددی

فرض کنید که انتگرال

$$F=\int_a^b f(x)dx$$

را می خواهیم محاسبه کنیم. در بیشتر روش های کلاسیک فاصله بین a تا b را به قسمت های مساوی Δx تقسیم می کنیم به طوری که:

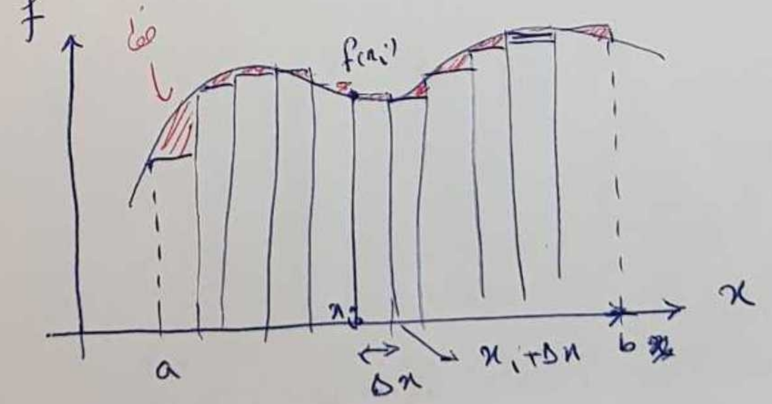
$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$x_n=x_0+n\Delta x \qquad x_0=a,\ x_n=b$$

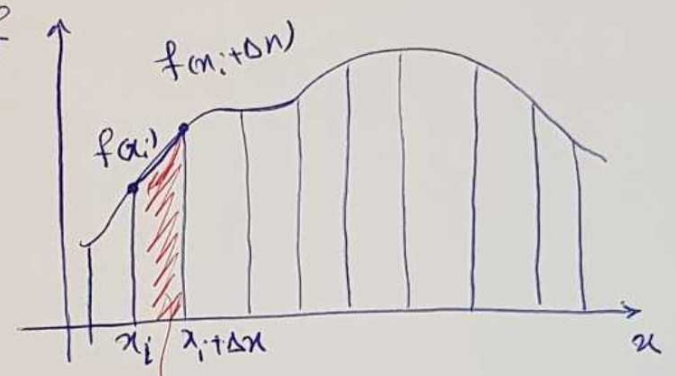
$$x_i=x_0+i\Delta x$$

سپس تابع $f(x)$ را در فاصله بین x_i تا $x_i+\Delta x$ محاسبه می کنیم. مثلاً در تقریب مستطیل $f(x)$ را در ابتدای نقاط تقسیم (x_i) محاسبه می شود و بنابراین انتگرال به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$F_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$



روش دیگری که دقت بهتری دارد روش ذوزنقه است. در این روش به جای اینکه فقط نقاط ابتدای تقسیم انتخاب شود نقطه‌های کناری آن که در فاصله Δx قرار دارند انتخاب می‌شوند، مساحت باریکه‌هایی که عرض آنها Δx است درست‌تر محاسبه شود:



$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{1}{2}\left[f(x_i)+f(x_i+\Delta x)\right]\Delta x$$

بنابراین

$$F_n = \frac{1}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]\Delta x + \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]\Delta x$$

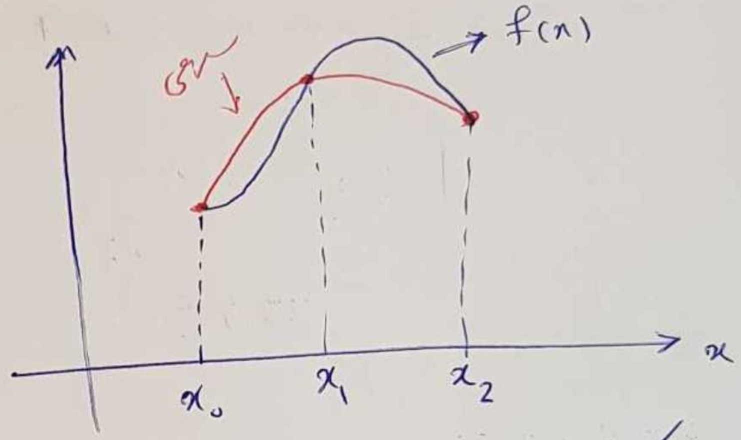
$$+\frac{1}{2}\left[f(x_2)+f(x_3)\right]\Delta x + \cdots + \frac{1}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n = \left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]\Delta x}$$

روش ذوزنقه

تقریب قانون (قاعده) سیمپسون (Simpson's rule)

ایده این تقریب استفاده از سهمی برای گذراندن از نقاط تقسیم، x_i ها، است:



می‌توان نشان داد که معادله درجه دو ($y = ax^2+bx+c$) که از سه نقطهٔ (x_0,y_0)، (x_1,y_1) و (x_2,y_2) می‌گذرد به صورت زیر خواهد بود:

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

و ناحیه زیر این نمودار در فاصله x_0 تا x_2 به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$F_0 = \frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)\Delta x$$

که در اینجا $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$

بنابراین، با این روش مقدار انتگرال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_n = \frac{1}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots + 2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\Delta x$$

(قانون سیمپسون
(روش

quad فوق ,
simps

scipy.integrate.simps

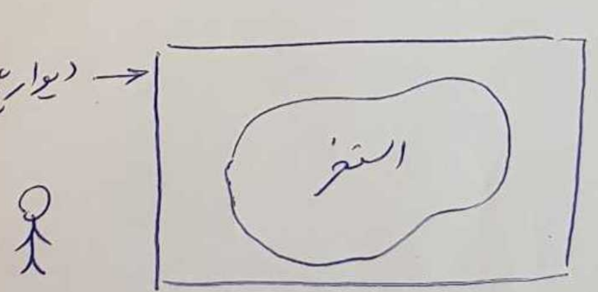
این روش در scipy (scipy.integrate) وجود دارد.

در quad از Inf تا ... می‌توان استفاده کرد

محاسبه انتگرال ها به روش مونت کارلو

ایده‌ی روش مونت کارلو را می‌توان به طور بسیار ساده به صورت زیر مطرح کرد:

یک استخر را داخل یک باغ در نظر بگیرید:

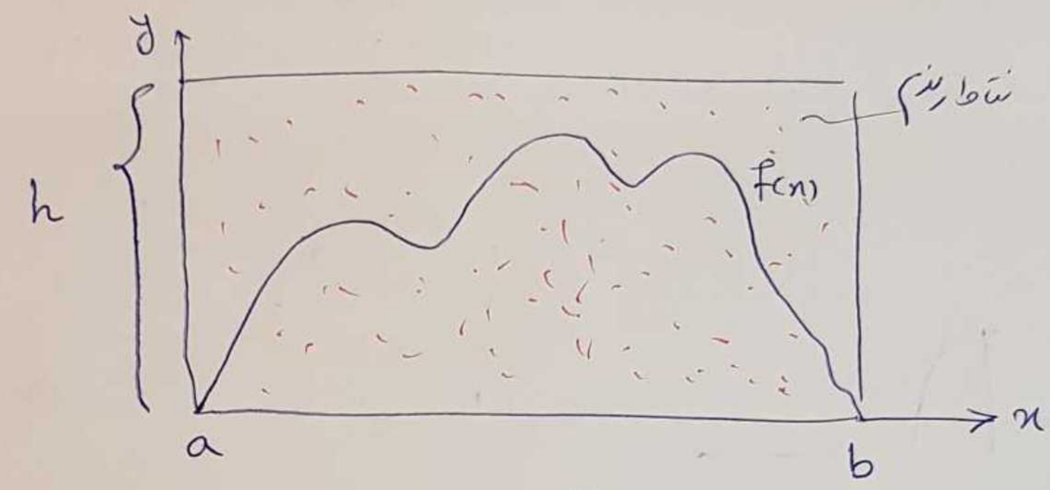


فرض کنید شما مساحت باغ را می‌دانید (شما در بیرون باغ قرار دارید). برای اینکه مساحت استخر را متوجه شوید می‌توانیم، پرتاب سنگ (به صورت تصادفی) به داخل باغ و با شنیدن صدای "شلپ" تعداد سنگ‌هایی که به داخل استخر افتاده است را شمارش کنیم. بدین ترتیب:

$$\frac{A_{\text{استخر}}}{A_{\text{باغ}}} = \frac{N_{\text{شلپ}}}{N_{\text{کل}}} \longrightarrow A_{\text{استخر}} = \frac{N_{\text{شلپ}}}{N_{\text{کل}}} \times A_{\text{باغ}}$$

بنابراین با این روش می‌توانیم انتگرال $f(x)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

تابع $f(x)$ را در داخل یک مستطیل به مساحت $A = h(b-a)$ محصور می‌کنیم.



و سپس n نقطه رندم (x_i, y_i) تولید می‌کنیم. مقدار نقاطی که در زیر سطح نمودار قرار می‌گیرند را n_s می‌نامیم (s اول کلمه splash به معنی "صدای شلپ" است!). بدین ترتیب مقدار F_n به صورت زیر بدست می‌آید:

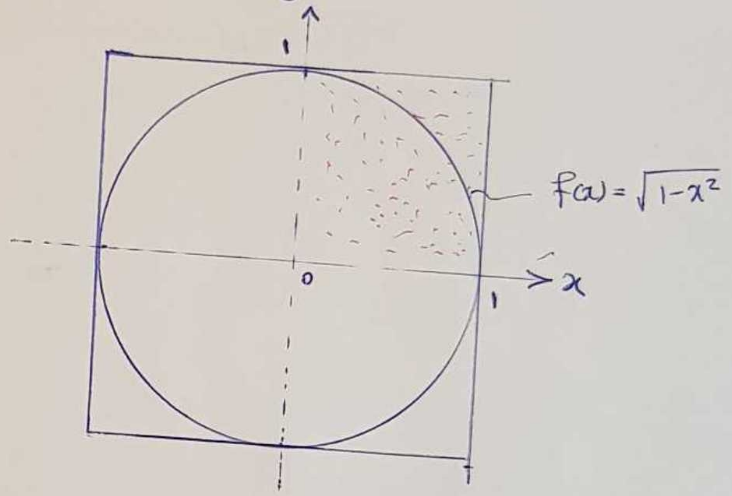
$$F_n = A \frac{n_s}{n}$$

این روش را روش hit and miss می‌نامند

مثال: محاسبه عدد π با استفاده از روش مونت کارلو hit and miss :

همانطور که می‌دانیم مساحت یک دایره به شعاع $R=1$ برابر خواهد بود با π :

بنابراین ما می‌توانیم به صورت زیر مقدار عدد π را محاسبه کنیم:



n جفت نقطه (x_i, y_i) را به صورت رندم تولید می‌کنیم به طوری که $\begin{cases} 0 \leq x_i < 1 \\ 0 \leq y_i < 1 \end{cases}$

اگر $y_i < \sqrt{1-x_i^2}$ این به معنی این است که این نقطه در داخل ربع دایره قرار گرفته است. بدین ترتیب با شمارش تعداد جفت‌هایی که در داخل ربع دایره قرار گرفته است مقدار π را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\pi = 4 \times \frac{n_s}{n}$$

روش دیگر انتگرال مونت کارلو بر اساس قضیه مقدار میانگین است:

$$F = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\langle f \rangle$$

برای تعیین $\langle f \rangle$ ، x_i ها را به صورت رندوم انتخاب می‌کنیم:

$$F_n = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \simeq (b-a)\langle f \rangle$$

این روش مونت کارلو را روش sample mean می‌نامند.

(۸)

تمرین ۷ - محاسبه مقدار π به روش مونت کارلو

الف - مقدار تابع $f(x)=4\sqrt{1-x^2}$ را به روش hit and miss محاسبه کنید.
برای اینکار $h=1$ و $0\leq x \leq 1$ در نظر بگیرید $(a=0, b=1)$ و
مقدار انتگرال $\sqrt{1-x^2}$ را محاسبه کنید (که همان مساحت یک ربع دایره به شعاع
$R=1$ خواهد شد). مقدار بدست آمده را در 4 ضرب کنید تا F_n بدست آید.
سپس اختلاف مقدار F_n را با مقدار دقیق π محاسبه کنید. این اختلاف
خطای این روش مونت کارلو است. یک نمودار log-log از F_n بر حسب n
را رسم کنید (برای n های بزرگتر از 1000). برای n های بزرگ نمودار
چه شکل خواهد بود؟

ب - مقدار تابع $f(x)=4\sqrt{1-x^2}$ را به روش sample mean
در فاصله بین $0\leq x \leq 1$ محاسبه کنید $(a=0, b=1)$. مقدار خطا را
برحسب n رسم کنید (مانند قسمت الف)

ج - کدام روش سریع‌تر است (محاسبه کنید)

انتگرال‌های چندگانه و مزیت روش‌های مونت کارلو

فرض کنید که یک تابع داشته باشیم که وابسته به ۶۰ متغیر باشد (مثلاً ۲۰ ذره در سه بُعد). برای انتگرال گیری از این تابع یعنی

$$F=\int f(x_1,x_2,\dots x_m)\,dx_1dx_2\dots dx_m$$

ما باید به تعداد $n=p^{60}$ نقطه داشته باشیم که p تعداد نقاط است که در یک جهت برای انتگرال گیری در نظر گرفته‌ایم. بنابراین عملاً روش‌های مش بندی مانند سیمپسون برای چنین انتگرال‌هایی کاملاً غیر کارآمد خواهند شد.

می‌توان نشان داد که خطا برای مش n نقطه‌ای برای انتگرال یک بعدی $(d=1)$ برابر با

$$n^{-a}$$

خواهد شد، که a بستگی به روش انتگرال گیری دارد. حال اگر ابعاد انتگرال گیری (d) زیاد شود این خطا برای همان تعداد نقطه، n، برابر خواهد بود با

$$n^{-a/d}$$

(چرا؟ بررسی کنید) ولی برای انتگرال گیری به روش مونت کارلو این خطا به صورت

$$n^{-1/2}$$

خواهد بود، بدون اینکه وابسته به ابعاد باشد. بنابراین انتگرال گیری مونت کارلو در ابعاد بالا برنده خواهد بود.

آنالیز خطای مونت کارلو

سؤالی که در روشی مانند روش مونت کارلو پیش می‌آید، محاسبه خطای این روش است یعنی اختلاف $|F_n - F|$. ولی اگر این مقدار را می‌دانستیم دیگر احتیاج به محاسبه دیگر نبود، چون با داشتن خطا می‌توانیم مقدار دقیق F را محاسبه کنیم.

ولی می‌توانیم احتمال اینکه مقدار درست، یعنی F، در یک بازه مشخصی با مرکزیت F_n قرار دارد را محاسبه کنیم.

برای درک بهتر، فرض کنید که $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، در این صورت مقدار خطا برابر خواهد بود با صفر. این رفتار حدی در واقع یک روش را برای اندازه‌گیری مقدار خطا به ما پیشنهاد می‌کند که آن ~~انحراف~~ استفاده از واریانس نمونه (sample Variance) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - \langle f \rangle]^2$$

که

$$\langle f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

دلیل اینکه به جای n از $n-1$ برای محاسبه σ^2 استفاده شده این است که برای محاسبه $\langle f \rangle$، احتیاج به n نمونه داریم و بنابراین برای محاسبه σ^2 $n-1$ نمونه مستقل باقی خواهد ماند. (اگر به جای $n-1$ از n استفاده کنیم مثلاً اگر $n=1$ باشد، صورت صفر می‌شود و σ^2 برابر صفر خواهد شد که کاملاً غیرمنطقی است)

(11)

می‌توان برای $n \gg 1$ ، σ^2 را (واریانس Variance) جایگزین کرد

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - \langle f \rangle]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) + \langle f \rangle^2 - 2\langle f \rangle^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma^2 = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$$

حال بیایید σ را برای انتگرال $f(x) = 4\sqrt{1-x^2}$ ؛ n ها مختلف

می‌سنجیم:

n	F_n	خطای واقعی	σ	$\sigma/\sqrt{n}$
10^2	3.0692	0.0724	0.8550	0.0855
10^3	3.1704	0.0288	0.8790	0.0270
10^4	3.1489	0.0073	0.8850	0.0089

به نوعی می‌گوییم خطای واقعی:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

داده می‌شود. (البته درستر این است

$$\sigma_m = \pm (b-a)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

که در این مثال خاص
$b-a=1$

بدست آوردن خطا در مونت کارلو

همانطور که گفته شد، انتگرال گیری در روش مونت کارلو به صورت زیر انجام می شود:

$$I = \int_a^b dx\, f(x) \simeq \frac{(b-a)}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_i)$$

که x_iها به صورت تصادفی انتخاب می شوند. برای اینکه خطا را حدس بزنیم، می توان آن را به انحراف معیار I نسبت داد. در واقع برای هر بار انتگرال گیری یک I بدست می آید که انحراف معیار I معیار مناسبی از خطا می باشد:

$$I_m = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{m,n}) \qquad m = 1, \dots, M$$

در اینجا اندیس m انتگرال گیری mام را نشان می دهد و M تعداد دفعات انتگرال گیری را.

انحراف معیار I_m به صورت زیر است:

انحراف معیار I (یا همان خطا)
$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} I_m^2 - \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} I_m\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(I_m - \frac{1}{M} \sum_{m'=1}^{M} I_{m'}\right)^2}$$

از طرفی متوسط ~~برابر~~ f برابر خواهد بود با:

$$\bar{f} = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} f(x_{m,n})$$

کمیت $\delta f_{m,n}$ نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\delta f_{m,n} = f(x_{m,n}) - \bar{f}$$

بنابراین

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(I_m - \frac{1}{M}\sum_{m'=1}^{M} I_{m'}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{(b-a)}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_{m,n}) - \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{m'=1}^{M}\frac{b-a}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_{m',n})}_{(b-a)\bar{f}}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{N^2M}\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N}\underbrace{\left(f(x_{m,n})-\bar{f}\right)}_{\delta f_{m,n}}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{N^2M}\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N}\delta f_{m,n}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{N^2M}\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N}\delta f_{m,n}\right)\left(\sum_{n'=1}^{N}\delta f_{m,n'}\right)$$

جمله بالا را می‌توان به دو نوع جمله تقسیم‌بندی کرد:

۱- جملاتی که در آن $n \neq n'$ باشد

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'\neq n}^{N}\sum_{m=1}^{M}\delta f_{m,n}\,\delta f_{m,n'}$$

چون $\delta f_{m,n}$ ها از هم مستقل هستند بنابراین جمع بالا برابر با صفر خواهد شد.

۲- جملاتی که در آن $n = n'$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\delta f_{m,n}\right)^2$$

که غیرصفر خواهد شد.

99,10,8

پس

$$\sigma_M^2 = \frac{(b-a)^2}{MN^2} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} (\delta f_{m,n})^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{N} \left[\frac{1}{MN} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \delta f_{m,n}^2 \right]$$

با توجه به اینکه

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{MN} \sum \big(\underbrace{f(x_{m,n}) - \bar{f}}_{\delta f_{m,n}} \big)^2$$

پس:

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_M^2 = \frac{(b-a)^2}{N} \sigma_f^2}$$

بنابراین

$$I = \int_a^b dx\, f(x) \simeq (b-a) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_i) \pm \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}} \right]$$

در واقع خطای انتگرال مونت کارلو برابر است:

$$\boxed{\pm \sigma_M = \pm (b-a) \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}}$$

99/1/8

تمرین کلاسی

مقدار خطای واقعی و خطای مونت کارلو ($\{\pi/2-(-\pi/2)\}\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$)

را برای انتگرال زیر

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

حساب کنید. برای این کار $N=1000,000$ در نظر بگیرید. این کار را $M=10$ بار انجام دهید و در هر بار مقدار خطا واقعی و خطای مونت کارلو را پرینت کنید.

جواب دقیق انتگرال برابر ۲ می باشد.

نمونه‌گیری با اهمیت (Importance Sampling)

همانطور که ذکر شد، خطای انتگرال‌گیری به روش مونت کارلو را می‌توان با $\pm \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}(b-a)$ تخمین زد.
بنابراین برای کاهش خطا می‌توان دو کار را انجام داد:

۱- افزایش تعداد نقاط نمونه برداری (یعنی n)

۲- کاهش مقدار واریانس (یعنی σ_f^2)

مشخص است که کاهش σ_f زمان کمتری بر روی کامپیوتر می‌برد درحالی که افزایش تعداد نقاط نمونه برداری نیاز به زمان بیشتری بر روی کامپیوتر دارد. در واقع با انتخاب هوشمندانه تر نقاط می‌توان σ_f را کاهش داد.

دراینجا تکنیکی را معرفی می‌کنیم که به نام نمونه‌گیری با اهمیت (importance sampling) معروف است و هدف آن کاهش مقدار σ_f است.

تابع مثبت $P(x)$ را طوری درنظر بگیرید که:

$$\int_a^b P(x)dx = 1$$

حال انتگرال $F=\int_a^b f(x)dx$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$F=\int_a^b \underbrace{\left[\frac{f(x)}{P(x)}\right]}_{g(x)} P(x)\,dx$$

$$=\int_a^b g(x)P(x)\,dx$$

دراینجا تابع $g(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$g(x) \equiv \frac{f(x)}{P(x)}$$

99,10,8

حال نقاط x را طبق توزیع احتمال $p(x)$ انتخاب می‌کنیم بنابراین F به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{p(x_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

توجه کنید که برای توزیع یکنواخت یعنی $p(x)=\frac{1}{b-a}$ رابطهٔ بالا به رابطهٔ مبنی روش مونت کارلو تبدیل می‌شود:

$$F_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

حال سؤالی که پیش می‌آید این است که تابع $p(x)$ را چه طور انتخاب کنیم. در حقیقت هرچه $p(x)$ را نزدیک به $f(x)$ انتخاب کنیم جواب‌های بهتری خواهیم گرفت به عبارتی اگر $p(x)$ رفتار تابع $f(x)$ را تقلید کند بهترین نتیجه بدست می‌آید، خصوصاً جاهایی که تابع $f(x)$ مقدار بزرگی دارد. در بسیاری از موارد ما نیازی به تولید تابع $p(x)$ نداریم و در واقع انتگرال‌ها در فیزیک (یا جمع‌ها) به صورت طبیعی به شکل زیر هستند:

$$\langle g(x)\rangle = \int g(x)p(x)\,dx$$

بنابراین کافی است xهای را انتخاب کنیم که طبق توزیع $p(x)$ باشد:

$$\langle g\rangle \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

در این جمع x_iها طبق توزیع $p(x)$ انتخاب می‌شوند (البته به طور تصادفی)

99,10,8

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

که در انتگرال بالا $P(x)$ را می‌توانیم از دل خود انتگرال انتخاب کنیم یعنی :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

و $g(x)$ به صورت :

$$g(x) = x^2$$

در اینجا $P(x)$ یک توزیع گوسی است. به صورت کلی یک توزیع گوسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}$$

که x_0 مرکز تابع است و σ پهنای توزیع را نشان می‌دهد (در واقع σ انحراف معیار x را نشان می‌دهد یعنی $\sigma^2 = \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle$ یا $\sigma^2 = \langle (x-x_0)^2\rangle$ چرا که $\langle x\rangle = x_0$)

بنابراین در تابع $P(x)$ بالا :

$$x_0 = 0$$
$$\sigma = 1$$

نام دیگر تابع گوسی، تابع توزیع نرمال (Normal distribution) است و معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

99,10,8

خوشبختانه در کتابخانه random پایتون و همچنین در کتابخانه random ، numpy اعداد تصادفی را می‌توان طبق برخی توزیع های معروفی تولید کرد. یکی از این توزیع ها همان توزیع گوسی است.

در کتابخانه random پایتون این توزیع به صورت زیر صدا زده می‌شود:

```
normalvariate(mu, sigma)
```

μ σ

برای شکلی که طرح شد:

```
mu=0
sigma=1
```

برای مشاهده اینکه واقعاً این دستور یک توزیع گوسی تولید می‌کند، کافی است برنامه زیر را اجرا کنید:

```
from random import normalvariate
import matplotlib.pyplot as plt
x=[]
for i in range(1000):
    x.append(normalvariate(0,1))
plt.hist(x, bins=100, density=True)
plt.show()
```

در numpy این تابع به صورت زیر صدا زده می‌شود:

```
np.random.noramal(mu, sigma, n)
```

که n تعداد اعداد تصادفی است که می‌خواهیم تولید شود.

۹۹/۱۰/8

بنابراین برنامه ما بصورت زیر می‌شود :

```
import nampy as np
import matplotlib.pyplot as plt
mu, sigma = 0, 1.0
x = np.random.normal(mu, sigma, 1000)
plt.hist(x, bins=100, density= True)
plt.show()
```

۹۹,۱۰,8

تمرین کلاسی

مقایسه روش نمونه‌گیری با اهمیت با روش sample mean برای انتگرال

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx$$

در این تمرین تعداد نقاط را $N=1,000,000$ انتخاب کنید. همچنین برای اینکه مقایسه بهتر انجام شود این کار را ۱۰ بار انجام دهید و در هر بار مقدار انتگرال و خطا در انتگرال را برای هر یک از روش‌ها پرینت کنید.

نکته: برای روش sample mean به جای $-\infty , +\infty$ از یک طول قطع استفاده کنید. مثلاً $L_{cut}=100$، در نتیجه

$$I \approx \int_{-L_{cut}}^{L_{cut}} x^2 e^{-x^2/2}\, dx$$

$L_{cut}=100$ طول قطعی است که تقریباً می‌توان گفت به جای ∞ قابل جایگزینی است چراکه

$$(L_{cut})^2 e^{-L_{cut}^2/2} \simeq 0$$

در واقع

$$e^{-100^2/2} = 3\times10^{-2189} \simeq 0$$

(در حقیقت این مقدار را در پایتون به صورت مستقیم نمی‌توانید بدست بیاورید. کاری که باید انجام دهید به صورت زیر است:

$$\underset{\text{قابل انجام در پایتون}}{e^{-500} = 7\times10^{-218}} \rightarrow e^{-5000} = (7)^{-10}\times10^{-2180} = 3\times10^{-9}\times10^{-2180}$$

(22)

تمرین ۹ - خطای مونت کارلو - مقایسه روش مونت کارلو sample mean و روش نمونه‌گیری با اهمیت

قسمت اول:

مقدار خطای واقعی و خطای مونت کارلو ($\{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\}\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$)

را برای انتگرال زیر

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\, dx$$

محاسبه کنید. برای این کار $N = 1,000,000$ در نظر بگیرید. این کار را $M=10$ بار انجام دهید و در هر بار مقدار خطای واقعی و خطای مونت کارلو را پرینت کنید.
جواب دقیق انتگرال برابر ۲ می‌باشد.

قسمت دوم:

مقایسه روش نمونه گیری با اهمیت با روش sample mean برای انتگرال

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx$$

در این تمرین تعداد نقاط را $N=1,000,000$ انتخاب کنید. همچنین برای اینکه مقایسه بهتر انجام شود این کار را ۱۰ بار انجام دهید و در هر بار مقدار انتگرال و خطا در انتگرال را برای هر یک از روش ها پرینت کنید.

نکته: برای روش sample mean باید به جای $-\infty$ و $+\infty$ از یک طول قطع استفاده کنید. مثلاً $L_{cut}=100$ در نتیجه

$$I \simeq \int_{-L_{cut}}^{L_{cut}} x^2 e^{-x^2/2} \, dx$$

$L_{cut}=100$ طول قطعی است که تقریباً می‌توان گفت به جای ∞ قابل جایگزینی است چرا که

$$(L_{cut})^2 e^{-L_{cut}^2/2} \simeq 0$$

در واقع

$$e^{-100^2/2} = 3 \times 10^{-2189} \simeq 0$$