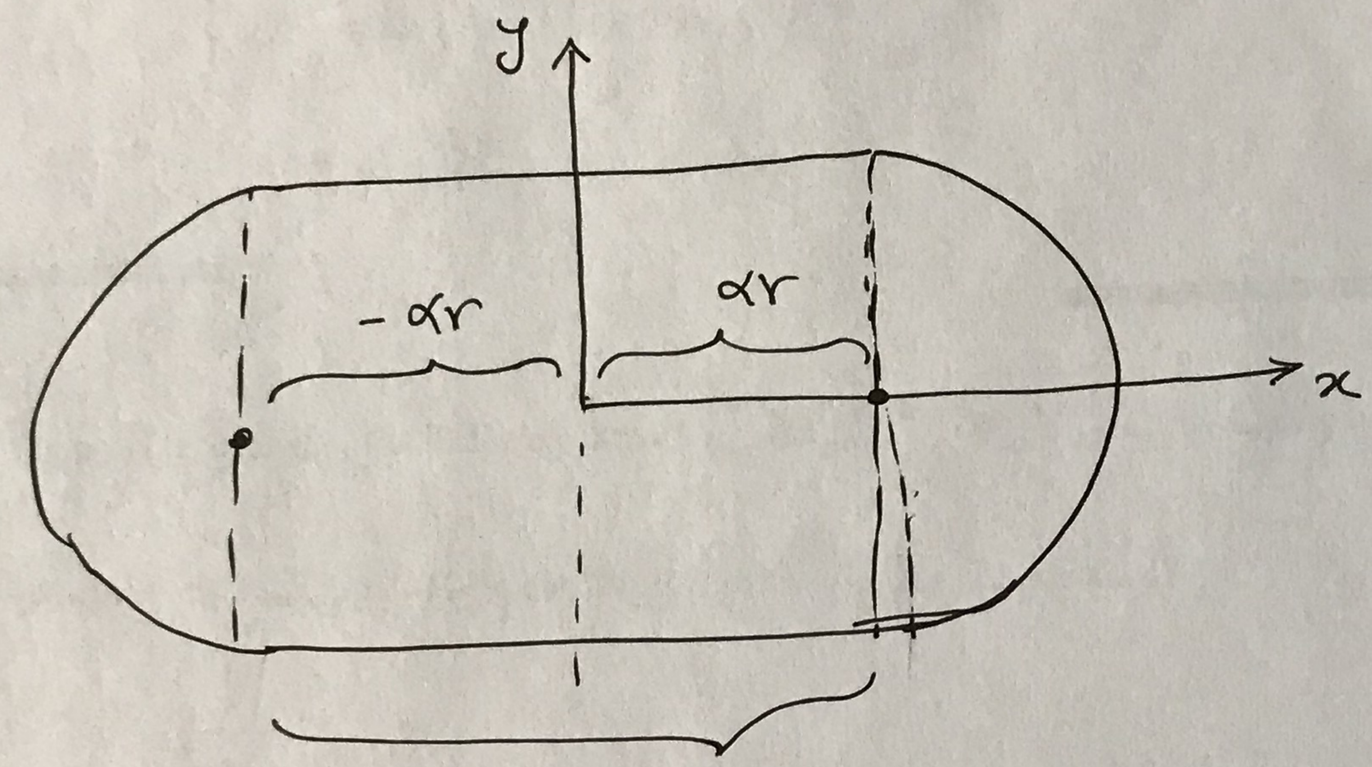
بیلیارد استادیوم (مسئله بیلیارد)

(Stadium Billiard problem)

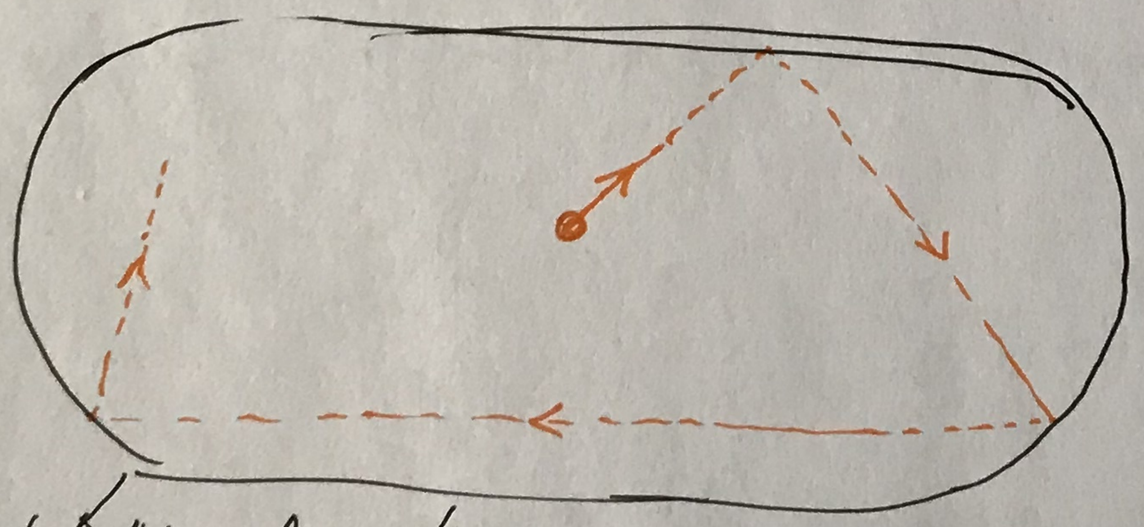
- استادیوم دوبُعدی

هندسه یک استادیوم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:



همانطور که از شکل بالا مشخص است، یک استادیوم از دو نیم دایره که بین آن‌ها یک مستطیل قرار گرفته است که به اندازه $2\alpha r$ $(\alpha > 0)$ از هم جدا شده‌اند.

- حرکت یک ذره در استادیوم

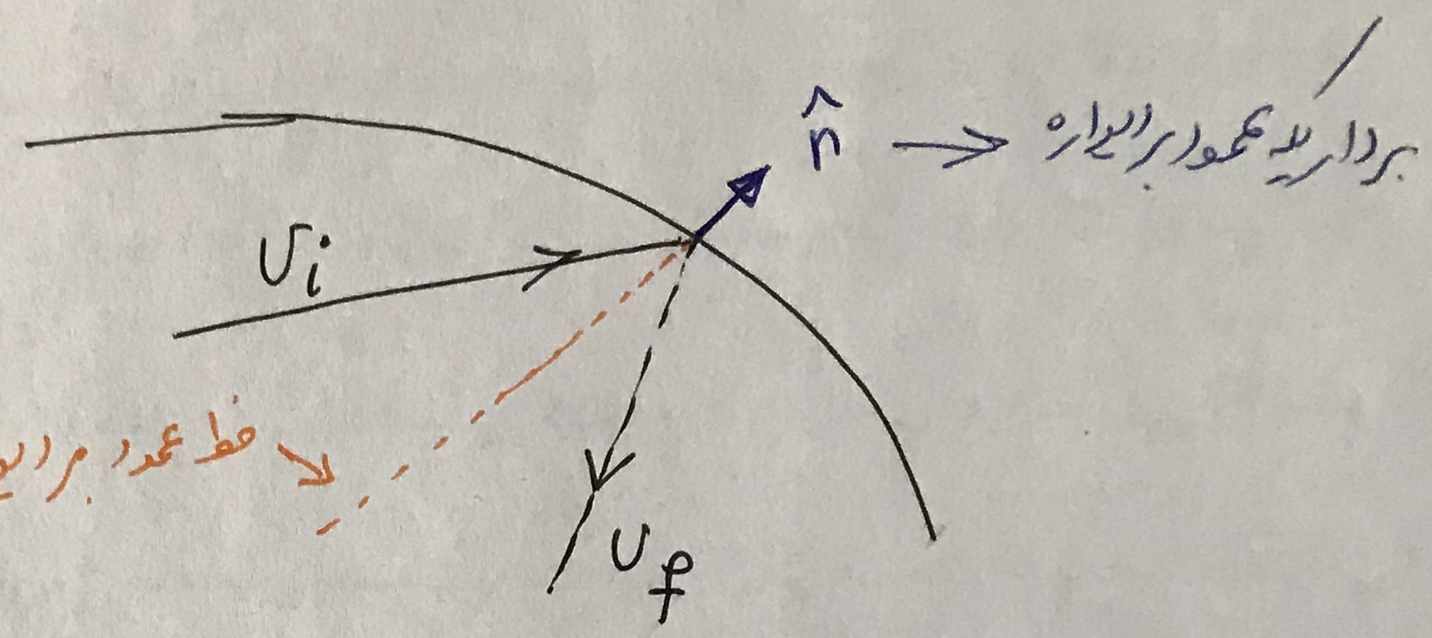


تا وقتی که ذره محدود به دیواره‌های استادیوم برخورد نکرده باشد، مسیر حرکت ذره:

معادلات زیر داده می‌شود:

$$x = x + v_x * dt$$
$$y = y + v_y * dt$$

سرعت ذره نیز v_x، v_y فقط زمانی تغییر می‌کند که به دیواره‌های استادیوم برخورد می‌کند:



برای تغییر سرعت در نقطه برخورد، با دیواره چنین عمل می‌کنیم:

$$v_{i\perp} = (v_i \cdot \hat{n})\,\hat{n} \qquad \text{(مؤلفه عمودی سرعت قبل از برخورد)}$$

$$v_{i\parallel} = v_i - v_{i\perp} \qquad \text{(مؤلفه موازی سرعت قبل از برخورد)}$$

$$v_{f\perp} = -v_{i\perp} \qquad \text{(مؤلفه عمودی سرعت بعد از برخورد)}$$

$$v_{f\parallel} = v_{i\parallel} \qquad \text{(مؤلفه موازی سرعت قبل از برخورد)}$$

نکته:

گام‌های زمانی را کوچک‌تری ذره وقتی ذره از دیوار استادیوم عبور می‌کند، به یک گام قبلی رفته و با گام‌های کوچک‌تری ذره را حرکت می‌دهیم. مثلاً dt (گام زمانی) را به 2000 تقسیم می‌کنیم ($dt \to dt/2000$)، و با این گام زمانی جدید حرکت ذره را دنبال می‌کنیم تا دوباره از دیوار استادیوم عبور کند، به این حالت نقطه برخورد را با یک گام قبلی در نظر می‌گیریم و با استفاده از معادلات بالا تغییر سرعت را محاسبه می‌کنیم.

تمرین ۲:

۱- دو ذره در یک استادیم ($\alpha = 0.1$ و $r = 3$) با شرایط اولیه زیر در نظر بگیرید:

ذره اول
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ v_{x0} = 2.0 \\ v_{y0} = 2.0 \end{cases}$$

ذره دوم
$$\begin{cases} x_0 = 1 \times 10^{-5} \\ y_0 = 0 \\ v_{x0} = 2.0 \\ v_{y0} = 2.0 \end{cases}$$

گام زمانی را $dt = 0.1$ در نظر بگیرید. حرکت این دو ذره را تا زمان $t = 400\,dt$ به صورت انیمیشن رسم کنید.

۲- فاصله بین این دو ذره را برحسب زمان رسم کنید.